



CHECKED - 1963



كتاب  
رياضي  
202

كتاب  
الاصول الهندسية  
وهو مشتمل على  
كتب اقليدس الستة  
ومضافات في تربيعة الدائرة  
وهندسة الاجسام  
واصول قياس المثلثات المستوية والكروية  
ترجمة

كهرتليوش فان ديك

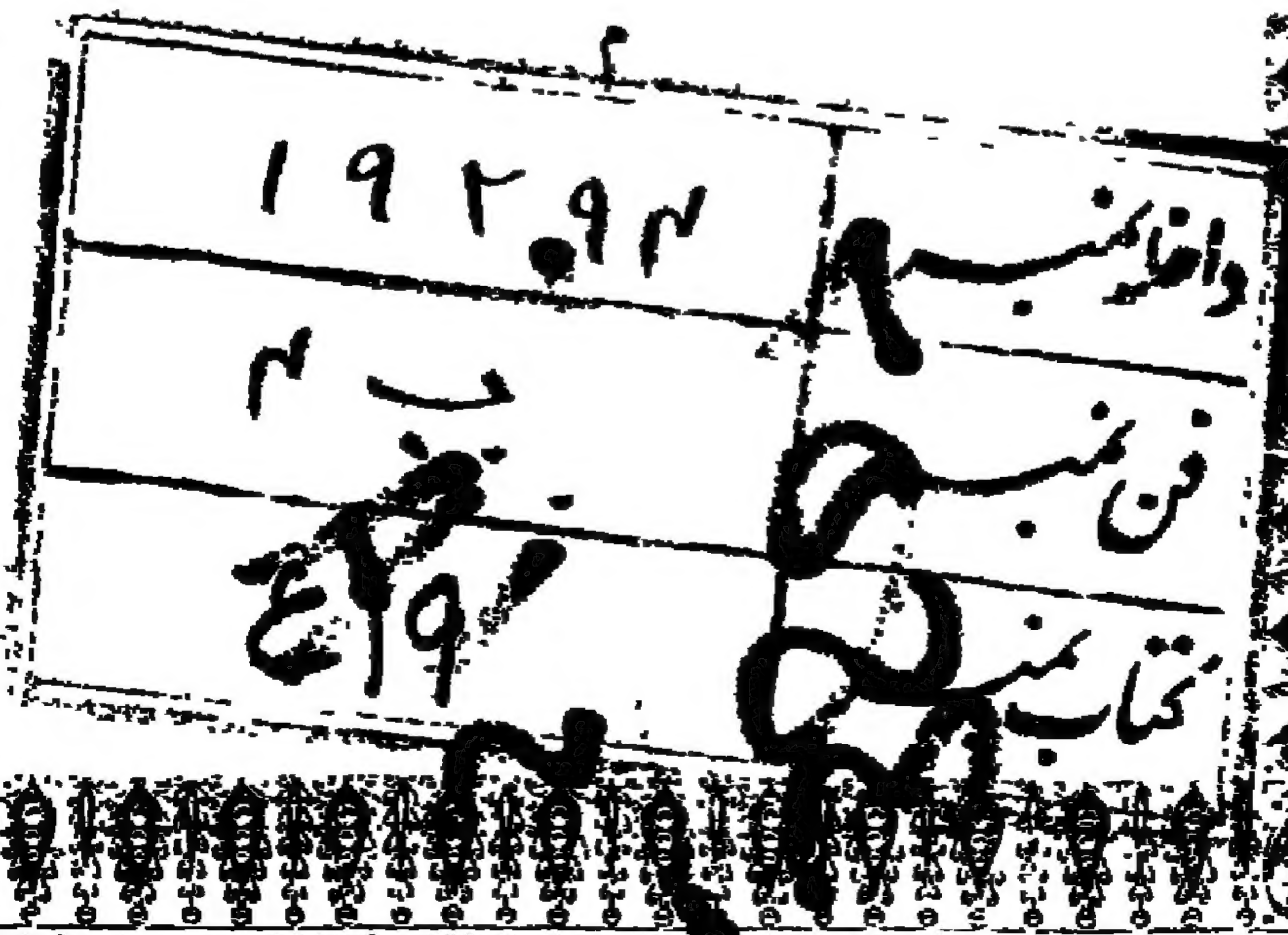
CHECKED

1801  
1801



## مقدمة

الحمد لله الذي لا تحيط بدائرة علمه الاوهام. وهو المنزه عن  
مقادير الاشكال ومساحة الاجسام. أما بعد فيقول العبد  
الفقير الى ربه القدير كرنيلس فان ديك الاميركاني اني  
لما رايت افتقار المدارس في هذه البلاد الى الكتب الهندسية  
التي بها تتم الفائدة المقصودة منها اعتنيت بترجمة هذا  
الكتاب المفيد وهو مشتمل على كتب اقليدس الستة  
ومضافات اخرى في تربيع الدائرة وهندسة الاجسام  
واصول قياس المثلثات المستوية والكروية. والله المسؤل  
ان ينفع به الطالبين ويفيد الراغبين ويجعله  
مخلصاً لوجهه الكريم وهو ارحم  
الراحمين





## نبذة تاريخية

ان الفيلسوف اقليدس صاحب كتاب الاصول الهندسية  
عاش في بلاد مصر ق م نحو ٢٨٠ سنة في عصر الملك  
بطليموس لاغوس. قيل وُلد في الاسكندرية وقيل مولده  
مجهول وصار معلم العلوم التعليمية في مدرسة الاسكندرية  
وكثر تلاميذه ومنهم الملك بطليموس نفسه. قيل سأل  
الملك يوماً ألا يوجد سبيل اسهل لمعرفة العالم فقال  
لا توجد سكة سلطانية لذلك. وله مؤلفات في علم الهيئة  
والبصريّات واشهر مؤلفاته الاصول الهندسية ولم تنزل الى  
ايامنا هذه افضل ما صُنّف في هذا الفن. غير انه قد دخل  
عليها بعض التغيرات والنقائص على تمادي الاجيال. وقد  
رجعها الى اصلها المعلم سيمسون الاسكوتسي ثم اضاف اليها  
بعض المعلمين عدّة قضايا لكي تصير بذلك اكثر مناسبة  
لحال العالم في هذا العصر. واحسن نسخها واكثرها فائدة  
النسخة التي اغنى بها المعلم بلايفار الاسكوتسي وهي  
المعول عليها في هذه الترجمة

وبالله التوفيق



# اصول الهندسة

## الكتاب الاول

### ايضاح الاصطلاحات والعلامات

- ١ الهندسة علم موضوعه قياس المقادير. وللقدار هو كل ما له واحد من ثلاثة اشياء وهي طول وعرض وعمق
- ٢ قد استعملت في علم الهندسة اصطلاحات شتى كالحد والقضية والاولية والنظرية والعملية والسابقة والتعليلة والفرع وغير ذلك مما سترى
- ٣ الحد هو ايضاح معنى لفظة اصطلاحية. ويجب ان يكون تاماً لا اشكال فيه وان تكون الفاظه المفردة اعنيادية مفهومة
- ٤ الاولية قضية واضحة لا تقبل زيادة ايضاح كقولهم الكل اعظم من جزءه
- ٥ النظرية قضية محتاجة الى برهان لاثبات صحتها كقولهم ان الزوايا الثلاث من كل مثلث تعدل قائمتين
- ٦ البرهان المستقيم هو ما اثبت صحة قضية ويسمى ايضاً البرهان الايجابي
- ٧ البرهان الغير المستقيم هو ما اثبت صحة قضية باثبات محالة فسادها ويسمى ايضاً البرهان السلبي والتحويل الى المحال
- ٨ العملية هي قضية حاوية عملاً مطلوباً انما كقولهم علينا ان نرسم خطاً عموداً على آخر او ان قسم عدداً الى اجزاء مفروضة
- ٩ ~~العملية~~ هي قضية حاوية عملاً مطلوباً انما كقولهم علينا ان نرسم خطاً عموداً على آخر او ان قسم عدداً الى اجزاء مفروضة
- ١٠ ~~العملية~~ هي قضية حاوية عملاً مطلوباً انما كقولهم علينا ان نرسم خطاً عموداً على آخر او ان قسم عدداً الى اجزاء مفروضة
- ١١ ~~العملية~~ هي قضية حاوية عملاً مطلوباً انما كقولهم علينا ان نرسم خطاً عموداً على آخر او ان قسم عدداً الى اجزاء مفروضة
- ١٢ ~~العملية~~ هي قضية حاوية عملاً مطلوباً انما كقولهم علينا ان نرسم خطاً عموداً على آخر او ان قسم عدداً الى اجزاء مفروضة
- ١٣ ~~العملية~~ هي قضية حاوية عملاً مطلوباً انما كقولهم علينا ان نرسم خطاً عموداً على آخر او ان قسم عدداً الى اجزاء مفروضة
- ١٤ ~~العملية~~ هي قضية حاوية عملاً مطلوباً انما كقولهم علينا ان نرسم خطاً عموداً على آخر او ان قسم عدداً الى اجزاء مفروضة
- ١٥ ~~العملية~~ هي قضية حاوية عملاً مطلوباً انما كقولهم علينا ان نرسم خطاً عموداً على آخر او ان قسم عدداً الى اجزاء مفروضة
- ١٦ ~~العملية~~ هي قضية حاوية عملاً مطلوباً انما كقولهم علينا ان نرسم خطاً عموداً على آخر او ان قسم عدداً الى اجزاء مفروضة
- ١٧ ~~العملية~~ هي قضية حاوية عملاً مطلوباً انما كقولهم علينا ان نرسم خطاً عموداً على آخر او ان قسم عدداً الى اجزاء مفروضة
- ١٨ ~~العملية~~ هي قضية حاوية عملاً مطلوباً انما كقولهم علينا ان نرسم خطاً عموداً على آخر او ان قسم عدداً الى اجزاء مفروضة
- ١٩ ~~العملية~~ هي قضية حاوية عملاً مطلوباً انما كقولهم علينا ان نرسم خطاً عموداً على آخر او ان قسم عدداً الى اجزاء مفروضة
- ٢٠ ~~العملية~~ هي قضية حاوية عملاً مطلوباً انما كقولهم علينا ان نرسم خطاً عموداً على آخر او ان قسم عدداً الى اجزاء مفروضة

بسم الله الرحمن الرحيم



- ١١ الفرع نتيجة تُستنتج بالاستقامة من قضية سابقة لها
- ١٢ التعليقة قول مبني على قضية سبقت
- ١٣ الافتراض هو ان يسلم بصحة قضية لكي يبنى عليها برهان قضية اخرى
- ١٤ المنتضيات او الممكنات عمليات يسلم بامكان عملها من اول وهلة
- ١٥ النظام هو صناعة وضع جملة براهين متتابعة على ترتيب ملائم للبحث عن صحة قضية او فسادها او لبرهانها للغير
- ١٦ التحليل هو استعمال صحة قضية بالناظر من القضية نفسها الى مبداء معلوم ويسمى ايضا النظام التحليلي وهو المستعمل في علم الجبر والمقابلة
- ١٧ التركيب هو التقدم شيئا فشيئا من مبداء معلوم بسيط الى النتيجة ويسمى ايضا النظام التركيبي وهو المستعمل في علم الهندسة
- ١٨ العلامات المستعملة في هذا الكتاب قد تقدم ترحيها في كتاب علم الجبر والمقابلة فعليك بالمراجعة

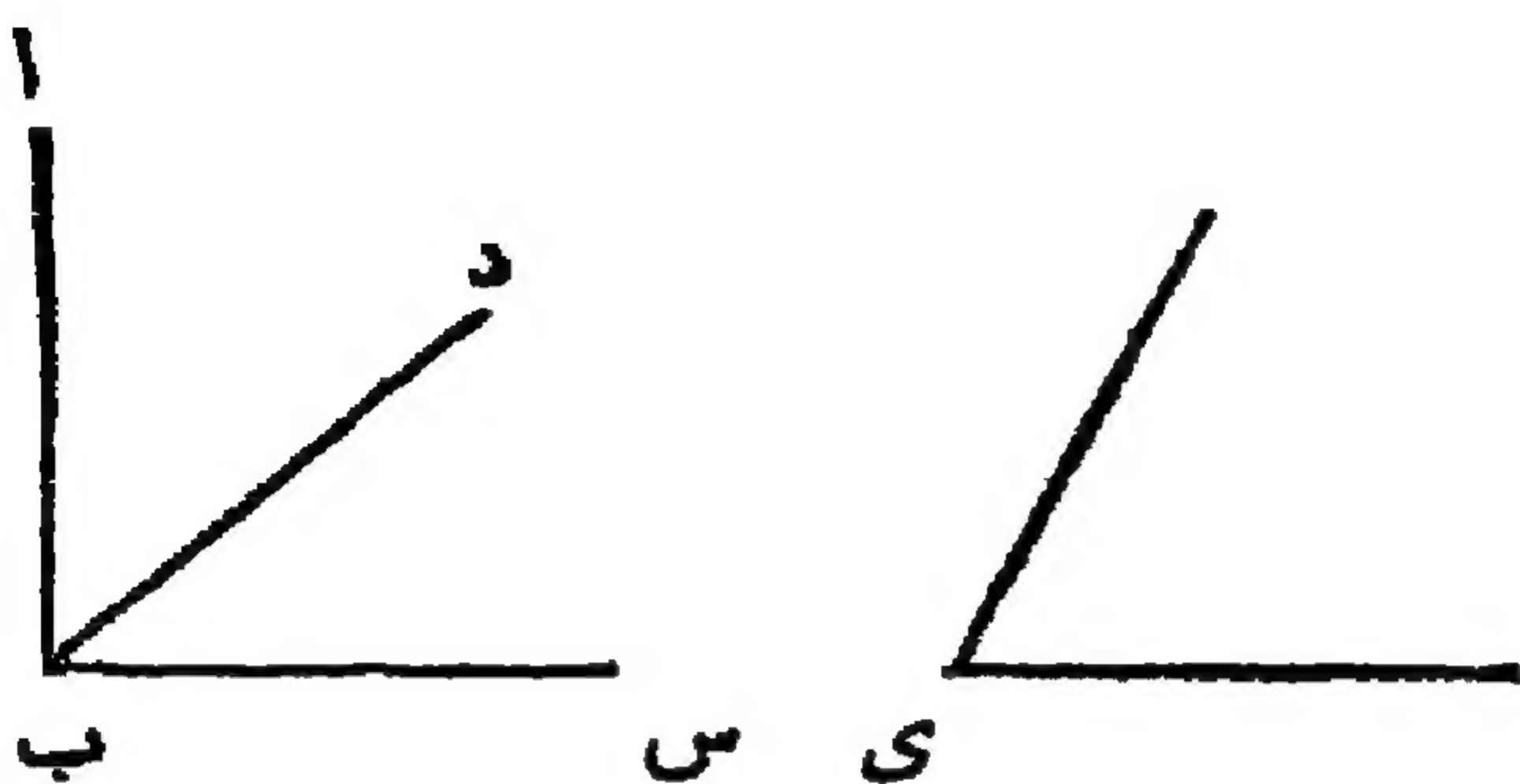
### حدود

- ١ النقطة شيء له وضع فقط وليس له طول ولا عرض ولا عمق
- ٢ الخط طول بدون عرض او عمق
- فرع. نهايتا خطي تقطعان وموضع تقاطع خطين نقطة
- ٣ خطان لا يتوافقان في تقطعين منها بدون ان يتوافقا بالكلية
- يُسميان مستقيمين. وقيل ايضا الخط المستقيم هو البعد الاقرب بين تقطين
- فرع. خطان مستقيمان لا يحيطان بمساحة ولا يتطابقان في جزء
- منهما ان لم يتطابقا بالكلية
- ٤ السطح او البسيط ما كان له طول وعرض بدون عمق
- فرع. نهايات سطح خطوط. وموضع تقاطع سطحين خط



٥ السطح المستوي هو سطح اذا فرضت فيه نقطتان فالخط المستقيم الموصل بينهما يقع جميعه في ذلك السطح

٦ الزاوية المستقيمة البسيطة هي انفراج خطين مستقيمين التقيا بنقطة وليست على استقامة واحدة



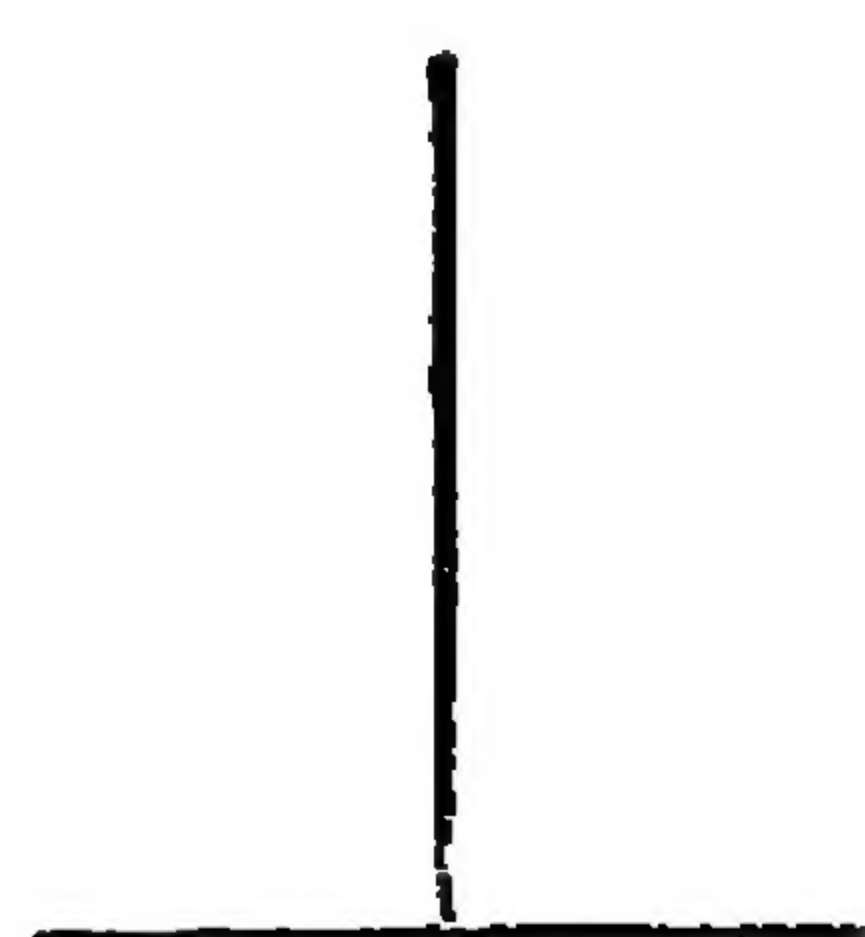
تنبيه: متى التقت

زاويتان فاكثري في نقطة

واحدة كما يرى عند ب

فكل واحدة منها تتعين

بثلاثة احرف اوسطها عند راس الزاوية. فالزاوية الواقعة بين خط اب وخط دب تسمى زاوية اب د او دب ا والواقعة بين دب وس ب تسمى دب س او س ب د واما الزاوية المفردة فيدل عليها بحرف واحد كالزاوية عند س



٧ اذا قام خط مستقيم على آخر مستقيم

واحدث زاويتين متساويتين على جانبيه فالخط

القائم يسمى عموداً وكل زاوية منها قائمة

٨ الزاوية المنفرجة هي كل زاوية اكبر من قائمة



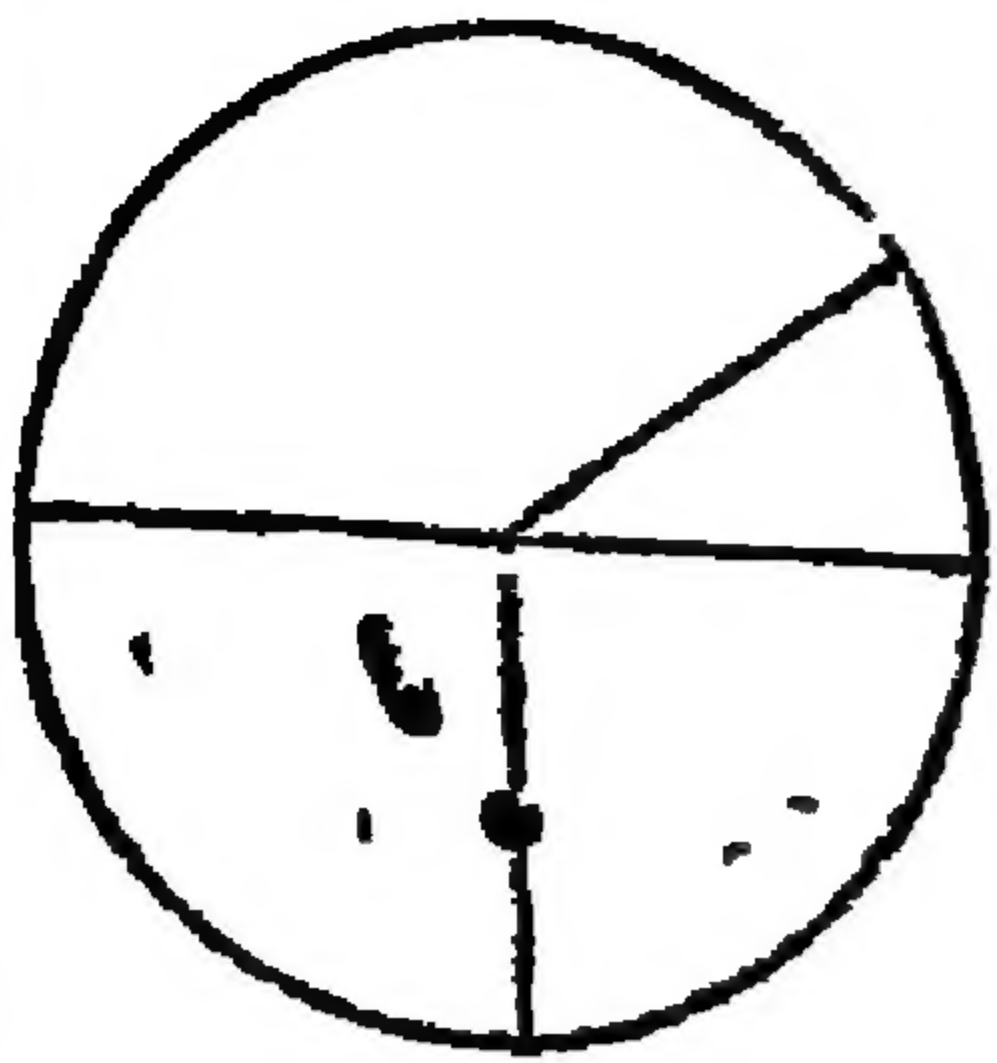
٩ الزاوية الحادة

هي كل زاوية اصغر

من قائمة

١٠ الشكل هيئة محدودة. ومساحة الشكل هي الفسحة المنحصرة





في حدوده بدون نظر الى ماهية تلك الحدود  
١١ الدائرة شكل مستوي يحيط به خط  
واحد ويسمى المحيط. وفي وسطه نقطة جميع  
الخطوط المستقيمة الخارجة منها الى المحيط  
متساوية

١٢ النقطة المشار اليها تسمى مركز الدائرة

١٣ قطر الدائرة خط مستقيم مار بمركزها ونهايتاه في محيطها

١٤ نصف الدائرة هو الشكل المحاط بالقطر والجزء من المحيط  
المقطوع بالقطر

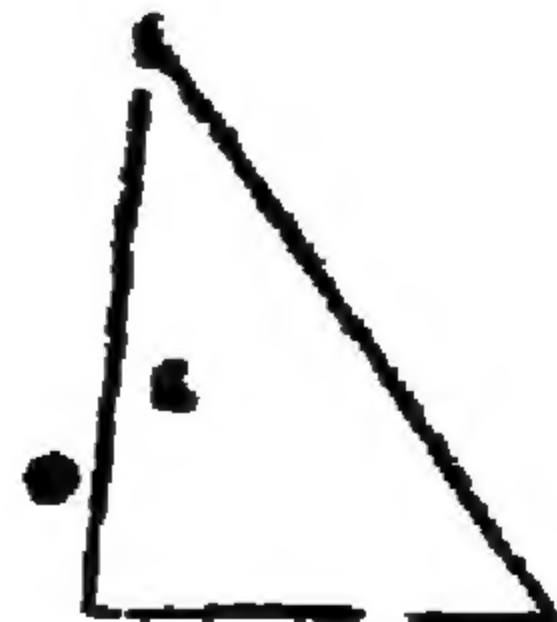
١٥ الاشكال المستقيمة الاضلاع هي المحدودة بخطوط مستقيمة

١٦ المثلث شكل يحيط به ثلاثة خطوط

تنبية. المثلث المستوي هو ما احاط به ثلاثة خطوط مستقيمة  
والكروي ما احاط به ثلاثة خطوط منحنية

١٧ ذو الاربعة الاضلاع شكل احاط به اربعة خطوط مستقيمة

١٨ الشكل الكثير الاضلاع ما احاط به اكثر من اربعة  
خطوط مستقيمة



١٩ المثلث

المتساوي الاضلاع

هو ما كانت اضلاعه الثلاثة متساوية

٢٠ المثلث المتساوي الساقين هو ما كان ضلعان من اضلاعه



الثلثة متساويين

٢١ المثلث المختلف الاضلاع هو ما كانت اضلاعه الثلثة غير

متساوية

٢٢ المثلث

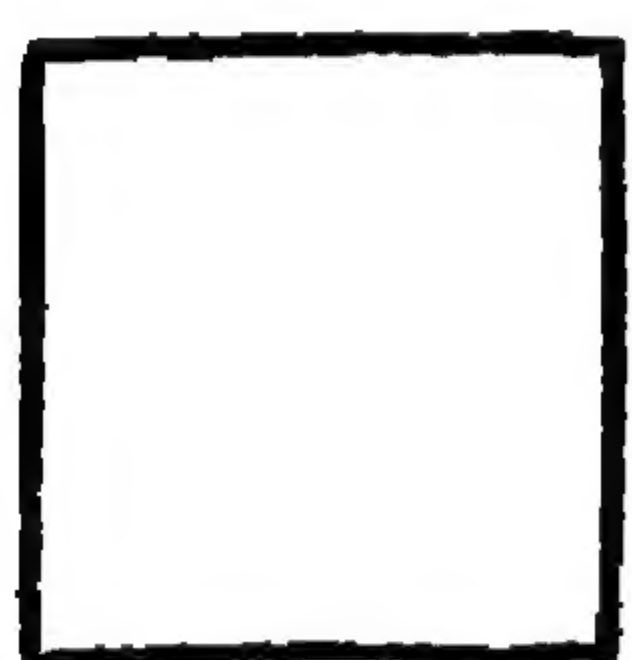


القائم الزاوية هو ما

كانت احدى زواياه قائمة

٢٣ المثلث المنفرج الزاوية هو ما كانت احدى زواياه منفرجة

٢٤ المثلث الحاد الزاوية هو ما كانت زواياه الثلاث حادة



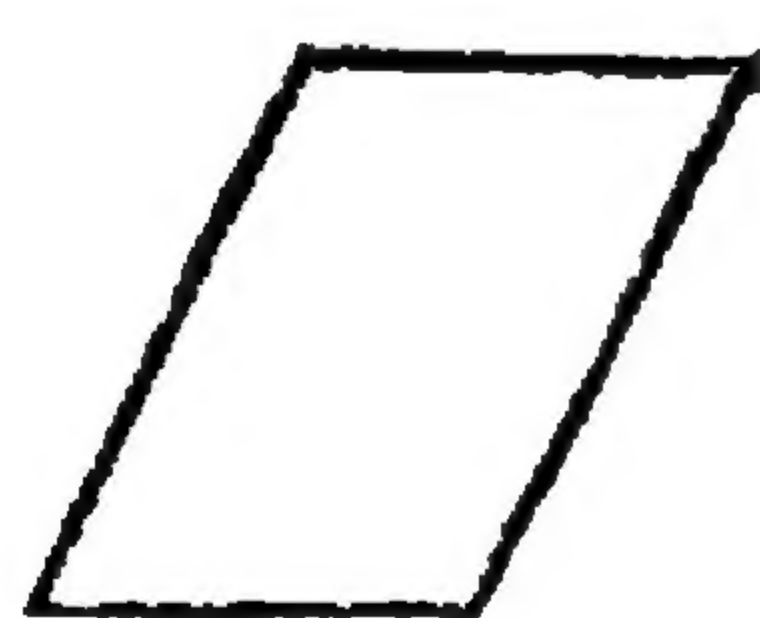
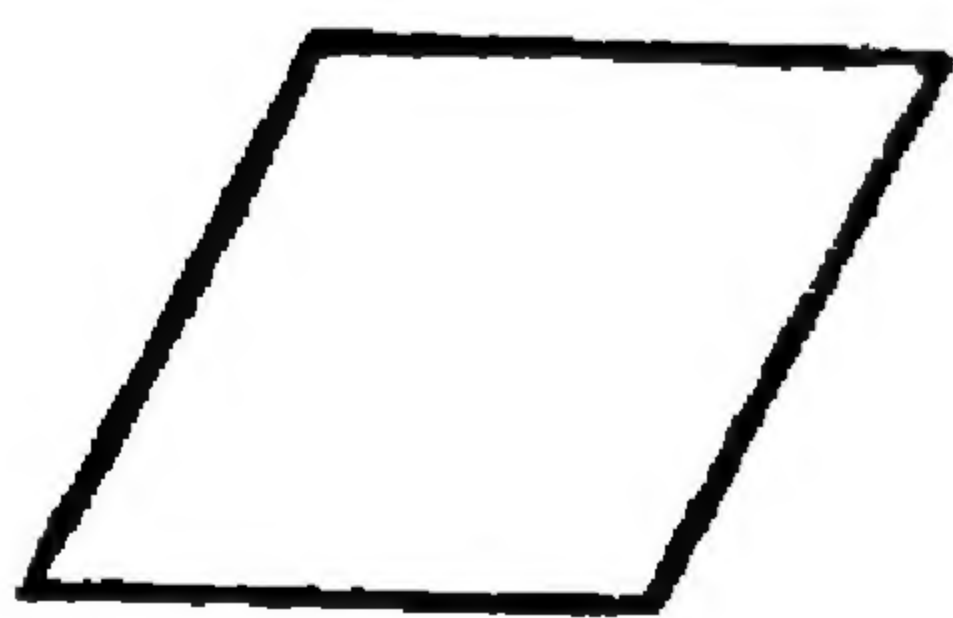
٢٥ المربع شكل يحيط به اربعة

خطوط مستقيمة متساوية وكل زواياه

قائمة

٢٦ المستطيل هو ما كانت كل زواياه قائمة ولكن ليس كل

اضلاعه متساوية



٢٧ المعين ما كانت

اضلاعه متساوية ولكن

ليست فيه قائمة

٢٨ الشبيه بالمعين ما كان ضلعاؤا المتقابلان متساويين وليست

فيه قائمة و اضلاعه الاربعة ليست متساوية

٢٩ كل ذي اربعة اضلاع غير ما ذكر يسمى منحرفا

٣٠ الخطوط المستقيمة المتوازية هي الواقعة في سطح واحد مستو



ولا تلتقي ولو أخرجت في جهتها الى غير نهاية .

### مقتضيات او إمكانات

- ١ يمكن ان يوصل بين كل تقطين بخط مستقيم او بغير مستقيم
- ٢ يمكن ان يُخرج خط مستقيم محدود على استقامته في جهتيه الى حد ما يُراد
- ٣ يمكن ان تُرسم دائرة على اي مركز فرض وعلى اي بُعد فرض منه

### اوليات

- ١ الاشياء المساوية لشيء واحد هي متساوية بعضها لبعض
- ٢ اذا اُضيفت اشياء متساوية الى اشياء متساوية تكون المجموعات متساوية
- ٣ اذا طُرِحَت اشياء متساوية من اشياء متساوية تكون البقايا متساوية
- ٤ اذا اُضيفت اشياء متساوية الى اشياء غير متساوية تكون المجموعات غير متساوية
- ٥ اذا طُرِحَت اشياء متساوية من اشياء غير متساوية تكون البقايا غير متساوية
- ٦ الاشياء التي هي مضاعف شيء واحد هي متساوية
- ٧ الاشياء التي تعدل نصف شيء واحد هي متساوية
- ٨ المقادير المتطابقة اي التي تملأ مساحة واحدة هي متساوية



٩ الكل اعظم من جزئه

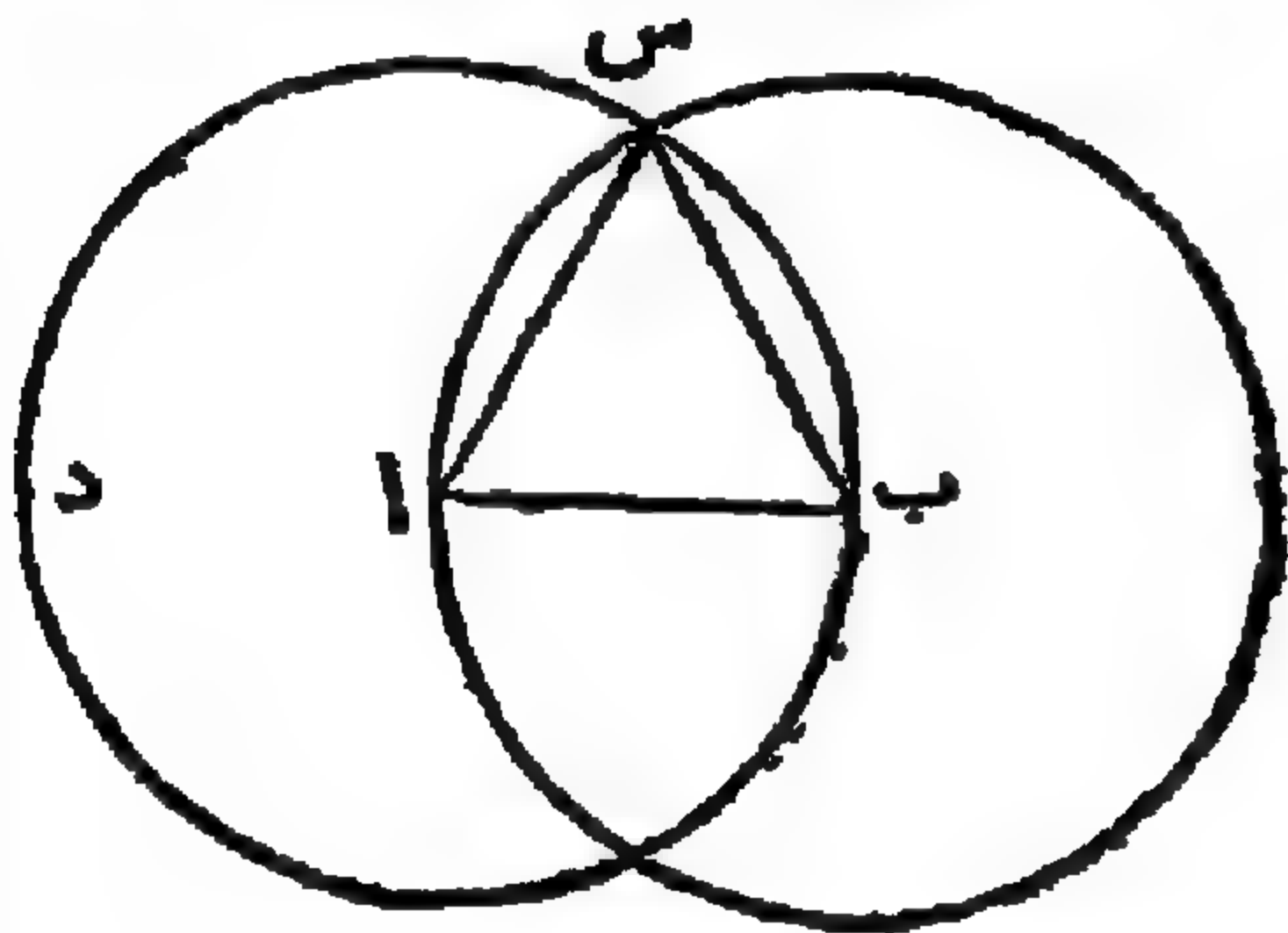
١٠ جميع الزوايا القائمة متساوية

١١ اذا تقاطع خطان مستقيمان لا يكونان موازيين لخط آخر

مستقيم

### القضية الاولى. علمية

علينا ان نرسم مثلثاً متساوي الاضلاع على خطٍ مستقيم محدود مفروض  
ليكن ا ب الخط المستقيم المفروض فعلياً ان نرسم عليه مثلثاً متساوي الاضلاع.



اجعل ا مركزاً و ا ب بُعداً وارسم دائرة  
ب س د ثم اجعل ب مركزاً و ب ا بُعداً  
وارسم دائرة ا س ر (حسب ثالثة  
الممكنات) ثم من س اي نقطة تقاطع  
الدائرتين ارسم خطاً الى ا وآخر الى ب

(حسب اولى الممكنات) فيكون ا ب س مثلثاً متساوي الاضلاع

فالنقطة ا هي مركز الدائرة ب س د ولذلك الخط ا س يعدل الخط ا ب (حسب  
الحديث الحادي عشر) و ب مركز الدائرة ا س ر ولذلك ب ا يعدل ب س وقد تبهرن  
ان ا س يعدل ا ب والاشياء المساوية لشيء واحد هي متساوية بعضها لبعض  
(اولية اولى) فلذلك ب س يعدل ا س فالخطوط الثلاثة ا ب ا س ب س هي  
متساوية فيكون ا ب س مثلثاً متساوي الاضلاع وقد رسم على ا ب وذلك ما كان  
علينا ان نجعله

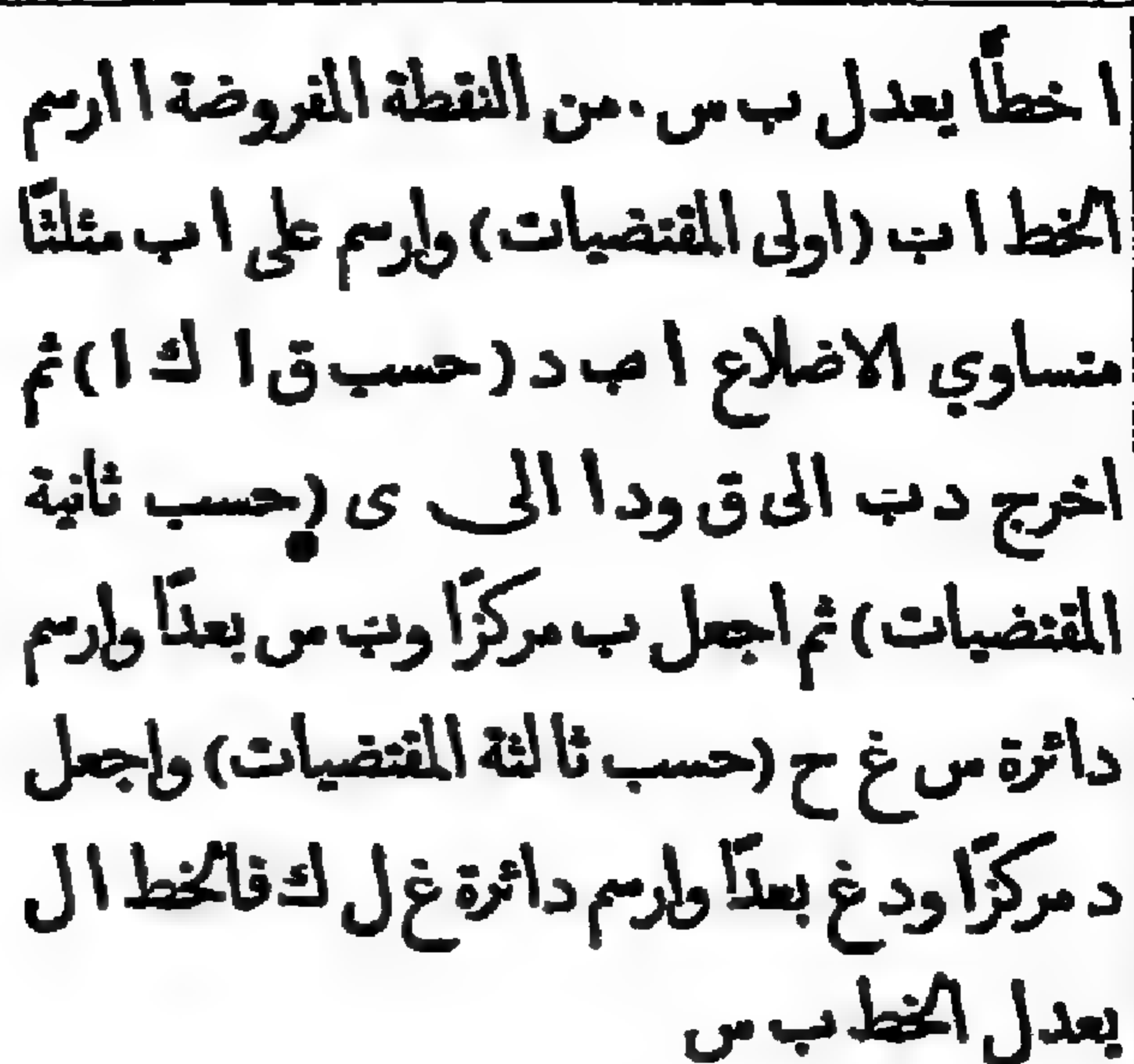
### القضية الثانية. ع

علينا ان نرسم من نقطة مفروضة خطاً مستقيماً يعدل خطاً اخر مستقيماً

مفروضاً

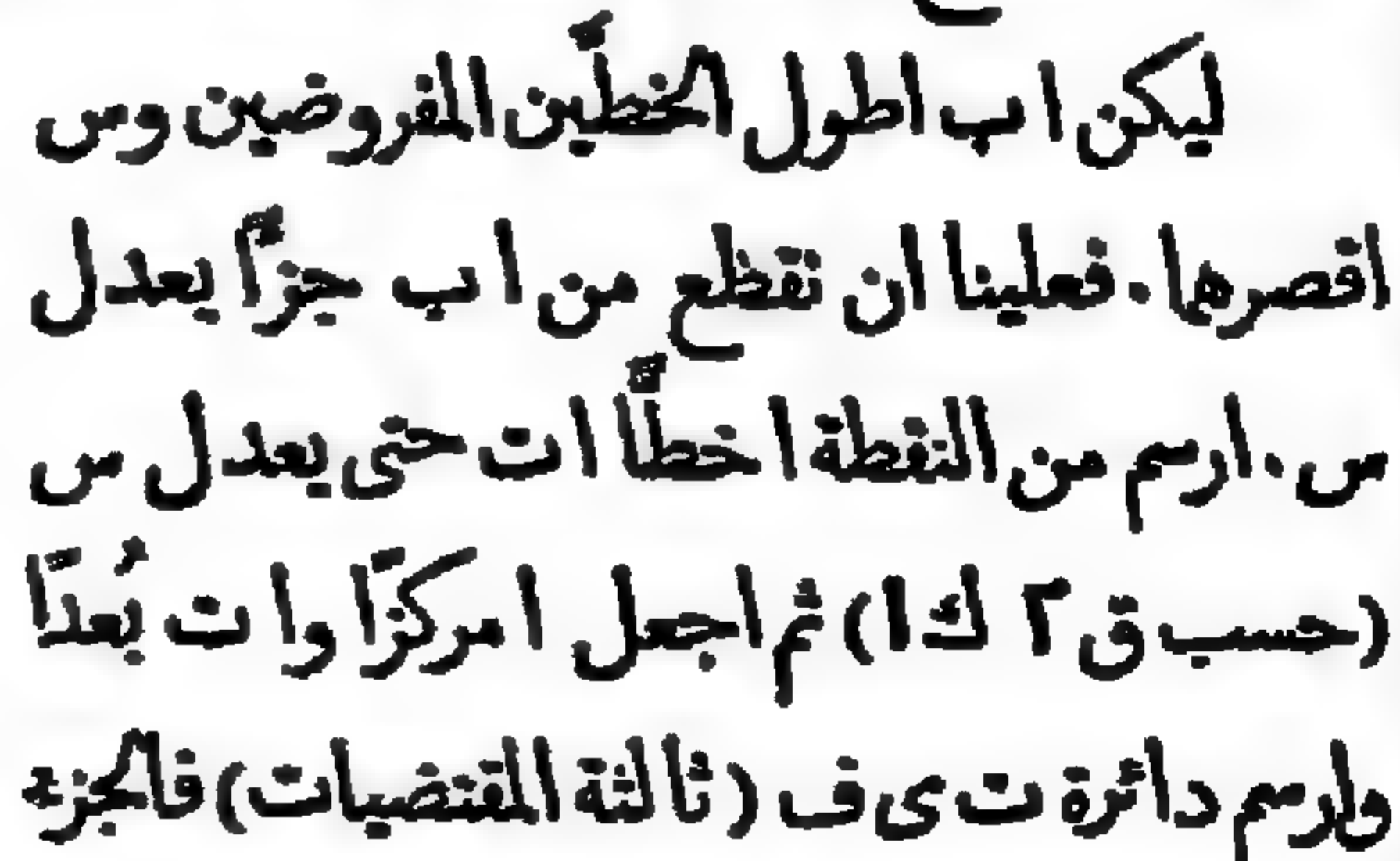
لتكن ا النقطة المفروضة و ب س الخط المستقيم المفروض فعلياً ان نرسم من





النقطة ب هي مركز الدائرة غ س ح ولذلك ب س يعدل ب غ (حدا ١) والنقطة  
د هي مركز الدائرة غ ك ل ولذلك الحظ د ل يعدل د غ والجزء د ا يعدل الجزء د ب  
فالبقية ا ل تعدل البقية ب غ (اولية ثالثة) وقد تبرهن ان ب س يعدل ب غ  
والاشياء المساوية لشيء واحد هي متساوية بعضها لبعض فالخط ا ل يعدل الخط  
ب س وقد رُسم من ا النقطة المفروضة وذلك ما كان علينا ان نعلمه

علینا ان تقطع من اطول خطین مستقیمین مفروضین جزاً یعدل اقصرها



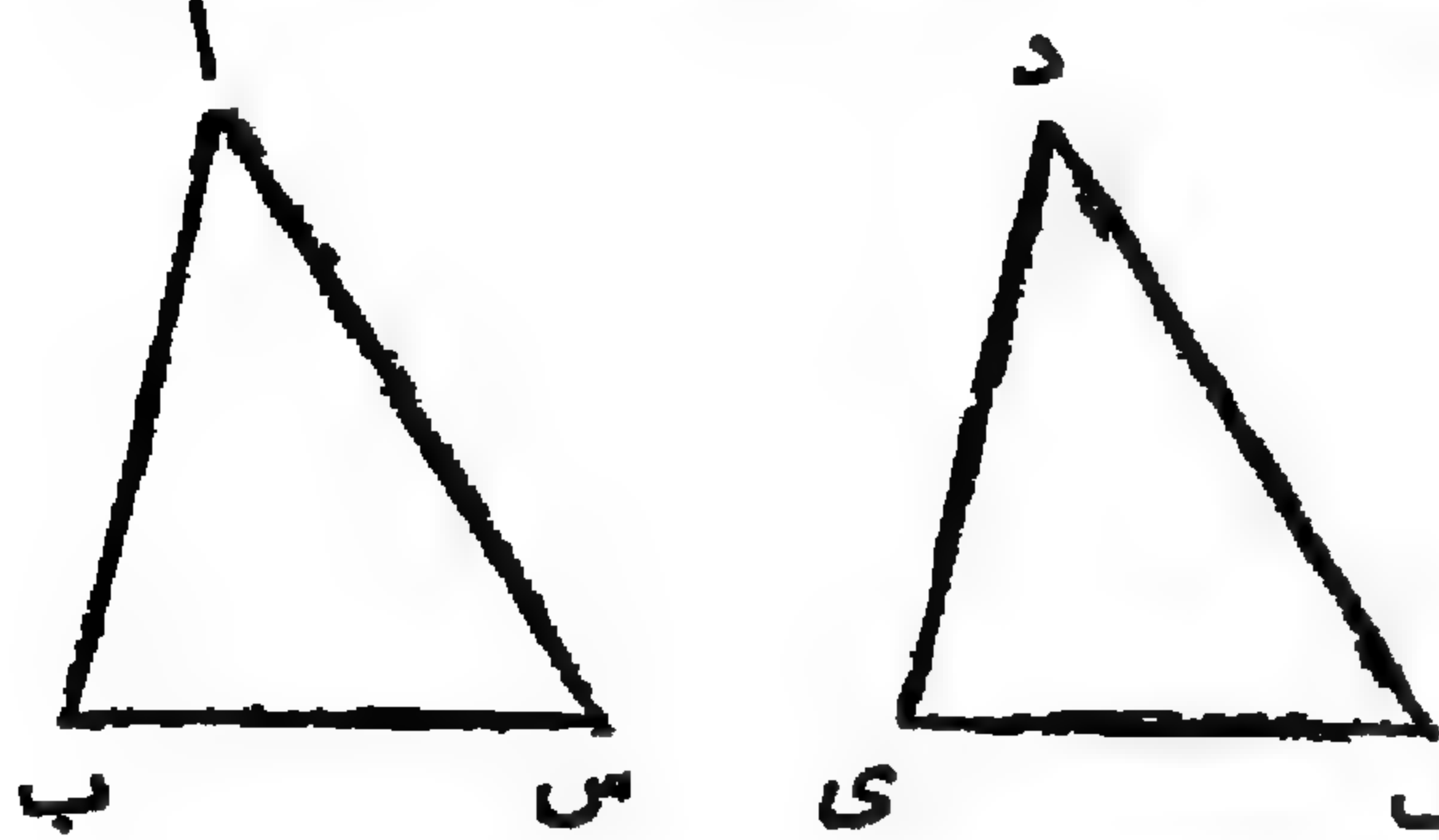
اي يعدل ا ت (حدا ١) وات يعدل من فلذلك اى يعدل من (اولية اولي)  
وقد قطع من اب اطول الخطين المكروحين وذلك ما كان علينا ان نعمله

إذا عدل ضلعاً مثلثٍ ضلعي مثلثٍ آخر والزاوية الواقعة بين ضلعي



احدها عدلت الواقعة بين ضلعي الآخر فالضلع الثالث من الواحد  
يعدل الثالث من الآخر ويكون المثلثان متساويين والزوايتان  
الآخرتان من الواحد تعدلان الاخرتين من الآخر

ليكن ا ب س دى ف مثلثين. والضلعان ا ب س من الواحد يعدلان دى دى دى



من الآخر كل واحد يعدل نظيره

والزاوية ب ا س تعدل الزاوية دى

د ف فيثبت القاعدة ب س تعدل

القاعدة دى ف. والمثلث ا ب س

يعدل المثلث دى ف. وبقيت الزوايا

ايضا متساوية اي التي تقابلها الاضلاع المتساوية كل واحدة تعدل نظيرها. اي ا ب

س تعدل دى ف. و ا س ب تعدل دى فى

لانه اذا وضع المثلث ا ب س على المثلث دى ف حتى تقع النقطة ا على النقطة

د والخط ا ب على الخط دى فالنقطة ب تقع على النقطة دى لان ا ب يعدل دى.

واذا وقع ا ب على دى فيثبت ا س يقع على د ف لان الزاوية ب ا س تعدل الزاوية

دى د ف والنقطة س تقع على النقطة ف لان ا س يعدل د ف. وقد تبين ان النقطة

ب تقع على النقطة دى فالقاعدة ب س تقع على القاعدة دى ف ونعدها (فرع حد ٣)

وكذلك كل المثلث ا ب س يقع على كل المثلث دى ف ويكونان متساويين. والزوايتان

الآخرتان من الواحد تقع على الاخرتين من الآخر. وكل واحدة تعدل نظيرها اي

ا ب س تعدل دى ف و ا س ب تعدل دى ف. وذلك ما كان علينا ان نبرهنه

### القضية الخامسة. ن

في كل مثلث متساوي الساقين الزاويتان عند القاعدة متساويتان.

واذا أخرج الضلعان المتساويان فالزاويتان الحادتان على الجانب

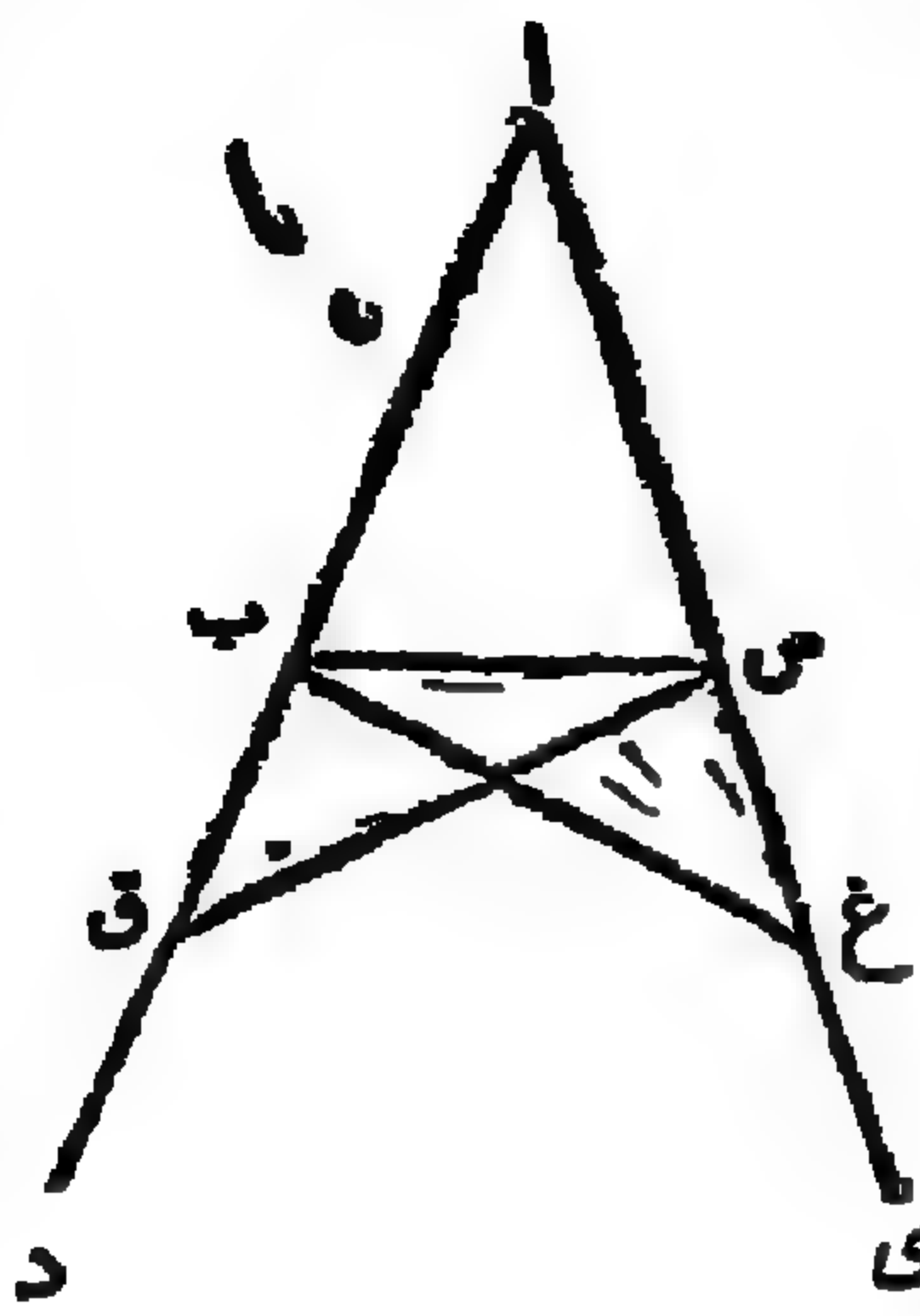
الآخر من القاعدة متساويتان ايضا

ليكن ا ب س مثلثا متساوي الساقين اي الساق ا ب يعدل الساق ا س. ولخرج



الضلع اب الى د والضلع اس الى ي. فالزاوية اب س تعدل الزاوية اس ب  
والزاوية س ب د تعدل الزاوية س ب ي

عين اي نقطة شئت في ب د كالنقطة ق مثلاً. ومن اي اطول خطين اقطع اغ



حتى يعدل اق اقصرها (حسب ق ٢ ك ١) ولرم  
الخط ق س والخط غ ب. فالخط اق يعدل اغ  
وكذلك اب يعدل اس. فالخطان ق ا اس  
يعدلان غ ا اب وبينهما الزاوية ق اغ المشتركة  
بين المثلثين اق س اغ ب فالقاعدة ق س  
تعدل القاعدة غ ب (حسب ق ٤ ك ١) وللمثلث  
اق س يعدل المثلث اغ ب ببقية الزوايا من  
الواحد تعدل بقية الزوايا من الاخر (ق ٤ ك ١)

كل واحدة تعدل نظيرها اي التي نحاذيها الاضلاع المتساوية اي الزاوية اس ق  
تعدل اب غ والزاوية اق س تعدل اغ ب. وقد تقدم ان اق يعدل اغ وان  
اب يعدل اس فالبقية ب ق تعدل البقية س غ (اولية ثالثة) وقد تبهرن ان  
ق س يعدل غ ب فالضلعان ب ق ق س يعدلان الضلعين س غ غ ب وتبهرن ان  
الزاوية ب ق س تعدل الزاوية س غ ب فالمثلث ب ق س يعدل المثلث س غ ب  
(ق ٤ ك ١) وبقية الزوايا من الواحد تعدل بقية الزوايا من الاخر اي التي تقابلها  
الاضلاع المتساوية اي الزاوية ق ب س تعدل الزاوية غ س ب والزاوية ب س ق  
تعدل الزاوية س ب غ وقد تبهرن ان كل الزاوية اس ق تعدل الكل اب غ وان  
الجزء ب س ق يعدل الجزء س ب غ فالبقية اس ب تعدل البقية اب س وهما  
الزاويتان عند قاعدة المثلث اب س وقد تبهرن ان الزاوية ق ب س تعدل غ س ب  
وهما الزاويتان على الجانب الاخر من القاعدة. وذلك ما كان علينا ان نبهرنه  
فرع. اذ ذاك يكون كل مثلث متساوي الاضلاع متساوي الزوايا ايضاً

### القضية السادسة. ن

اذا كانت زاويتان من مثلث متساويتين فالضلعان اللذان يقابلانها  
هما متساويان ايضاً



لیکن اب س مثلثاۃ زاویتان اب س اس ب متساویتان فضلاۃ اب اس  
ہا متساویتان ایضاً



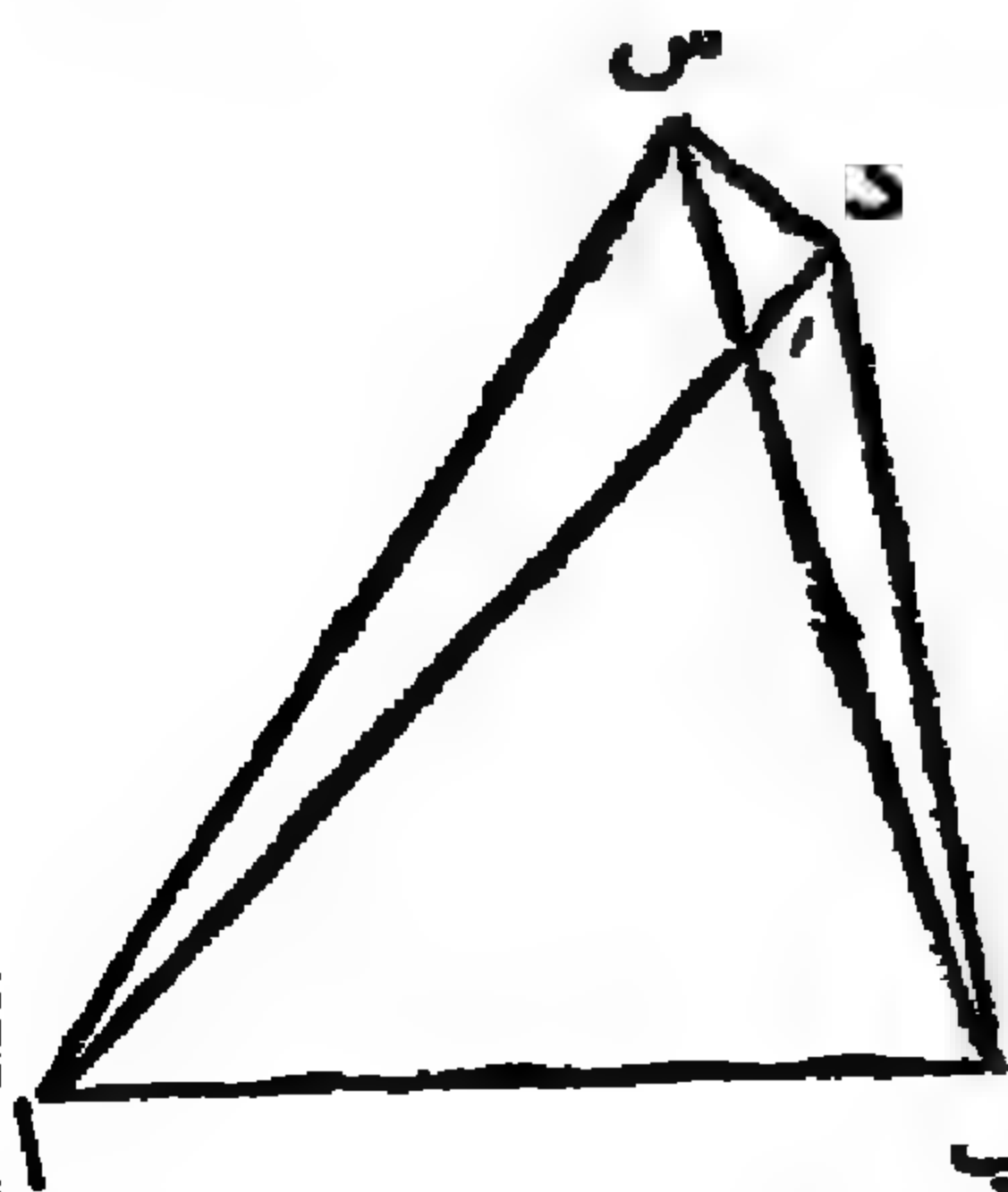
والأفاحدها أطول من الآخر. فلنفرض  $AB$  أطولها  
ولنقطع منه جزءاً  $DB$  يعدل  $AS$  أقصرها (ق ٢ ك ١)  
فلنا في المثلثين  $DBS$   $AB$   $S$  ضلع من الواحد  $DB$   
يعدل ضلعاً من الآخر  $AS$  والقاعدة  $BS$  مشتركة بينهما  
فالضلعان  $DB$   $BS$  يعدلان  $AS$   $S$   $B$  كل واحد  
نظيرة. والزاوية  $DBS$  تعدل  $ASB$  فالقاعدة  $DS$  تعدل القاعدة  $AB$  والمثلث  
 $DBS$  يعدل المثلث  $ABS$  (ق ٤ ك ١) أي الأصغر يعدل الأكبر وذلك  
محال فلا يمكن أن يكون  $AB$   $AS$  غير متساويين بل هما متساويان. وذلك ما كان  
علينا أن نبرهنه

فرع ٣. كل مثلث متساوي الزوايا هو متساوي الاضلاع ايضاً

## القضية السابعة.ن

لا يكون على قاعدة واحدة وعلى جانب واحد منها مثلثان الضلعان  
منها المنتهيان في طرف واحد من القاعدة متساويان والمنتهيان في  
طرفها الآخر متساويان ايضاً

ليكن اس ب ادب مثلثين على قاعدة واحدة اب وعلى جانب واحد منها  
والضلعان اس ا د المنتهيان في ا متساويان فالمتهيان في ب الطرف الآخر من  
القاعدة لا يكونان متساويين

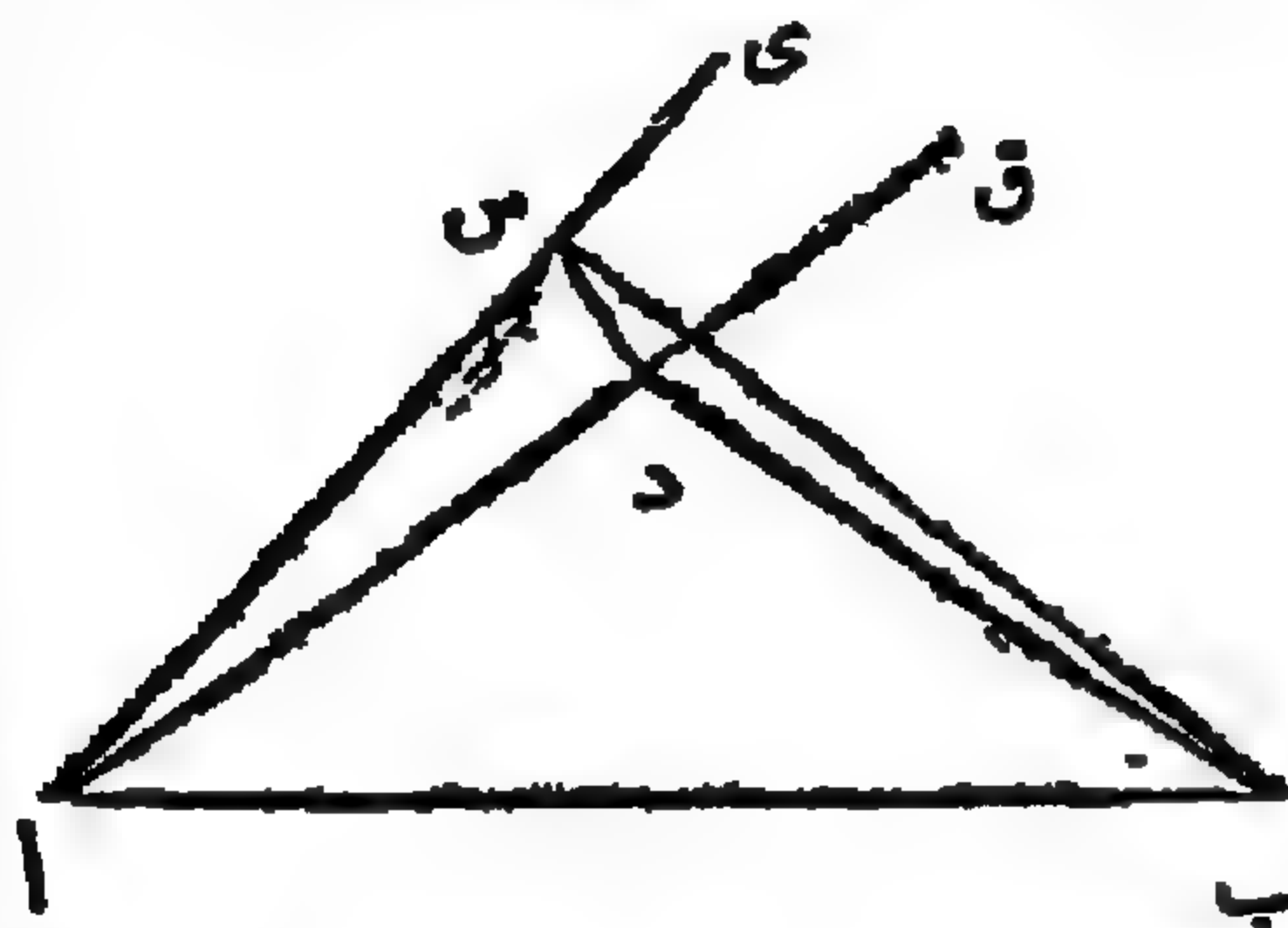


ارسم المخطط من د (حسب اولى الممكثات) فاذا  
كان ب س ب د متساويين وكان راس احد المثلثين  
خارج الاخر فلما اس ا د متساويان فالزاوية اس  
د تعدل الزاوية اد س (حسب ق ٥ ك ١) والزاوية  
اس د انما هي اكبر من الزاوية ب س د فالزاوية  
اد س ايضا اكبر من ب س د وبالاخرى الزاوية ب د س اكبر من ب س د وعلى



ما فُرض ان  $\angle$  ب س ب يعدل  $\angle$  ب د ب فالزاوية  $\angle$  ب د س تعدل  $\angle$  ب س د (ق ه ك ا)  
وقد تبرهن انها اكبر من  $\angle$  ب س د

ثم اذا وقع راس احد المثلثين مثل د داخل الاخر  $\angle$  ب س ب. فاخرج  $\angle$  س الى  
واخرج ا د الى ق فبا ان  $\angle$  س ا د متساويان فالزاويتان  $\angle$  س د ق و  $\angle$  س د س  
على الجانب الاخر من القاعدة  $\angle$  س د ه متساويتان (ق ه ك ا) والزاوية  $\angle$  س د س  
انما هي اكبر من الزاوية  $\angle$  ب س د فالزاوية  $\angle$  ق د س ايضا اكبر من  $\angle$  ب س د وبالاخرى  
 $\angle$  ب د س اكبر من  $\angle$  ب س د واذا كان  $\angle$  ب د س متساويين فالزاوية  $\angle$  ب د س  
تعدل الزاوية  $\angle$  ب س د (ق ه ك ا)



وقد تبرهن ان  $\angle$  ب د س اكبر من  
 $\angle$  ب س د وذلك محال. وهكذا اذا  
وقع راس احد المثلثين بجانب الاخر  
فلا يمكن ان يكون على قاعدة واحدة

وعلى جانب واحد منها مثلثان الضلعان منها المنتهيان الى طرف واحد من القاعدة  
متساويان والمنتهيان الى طرفها الاخر متساويان ايضا

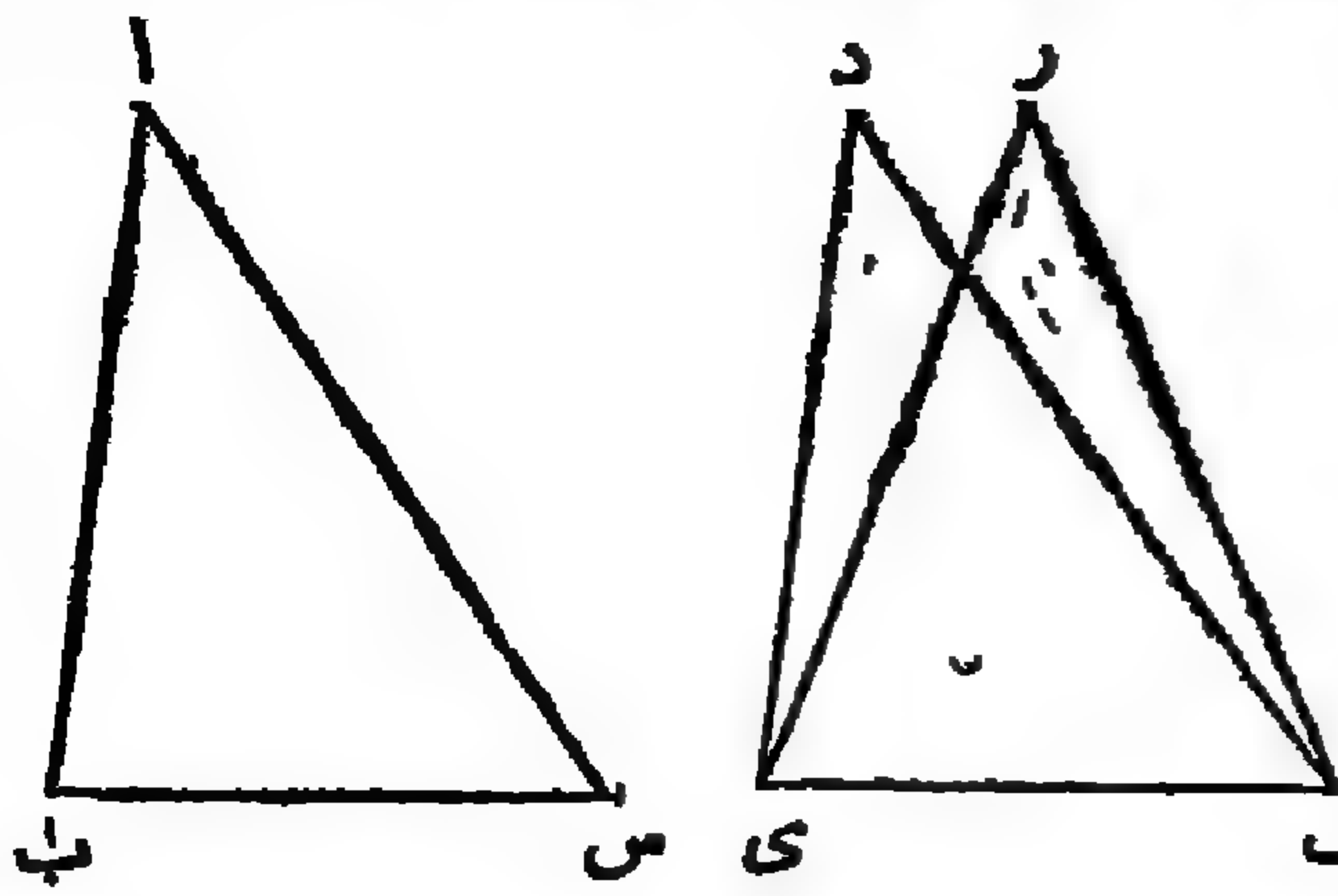
### القضية الثامنة. ن

اذا عدل ضلعاً مثلثٍ ضلعي مثلثٍ آخر وكانت القاعدتان متساويتين  
ايضاً فالزاوية الحادثة بين ضلعي الواحد تعدل الحادثة بين ضلعي  
الآخر

ليكن  $\angle$  ا ب س د ي ف مثلثين والضلعان  $\angle$  ا ب س يعدلان  $\angle$  د ي د ف كل  
واحد يعدل نظيره. والقاعدة  $\angle$  ب س تعدل القاعدة  $\angle$  ي د ف فالزاوية  $\angle$  ب ا س تعدل  
الزاوية  $\angle$  ي د ف

لانه اذا وضع المثلث  $\angle$  ا ب س على المثلث  $\angle$  د ي ف حتى تقع النقطة  $\angle$  ب على النقطة  $\angle$  ي  
والخط  $\angle$  ب س على الخط  $\angle$  ي د فالنقطة  $\angle$  س تقع على النقطة  $\angle$  ف لان الخط  $\angle$  ب س يعدل



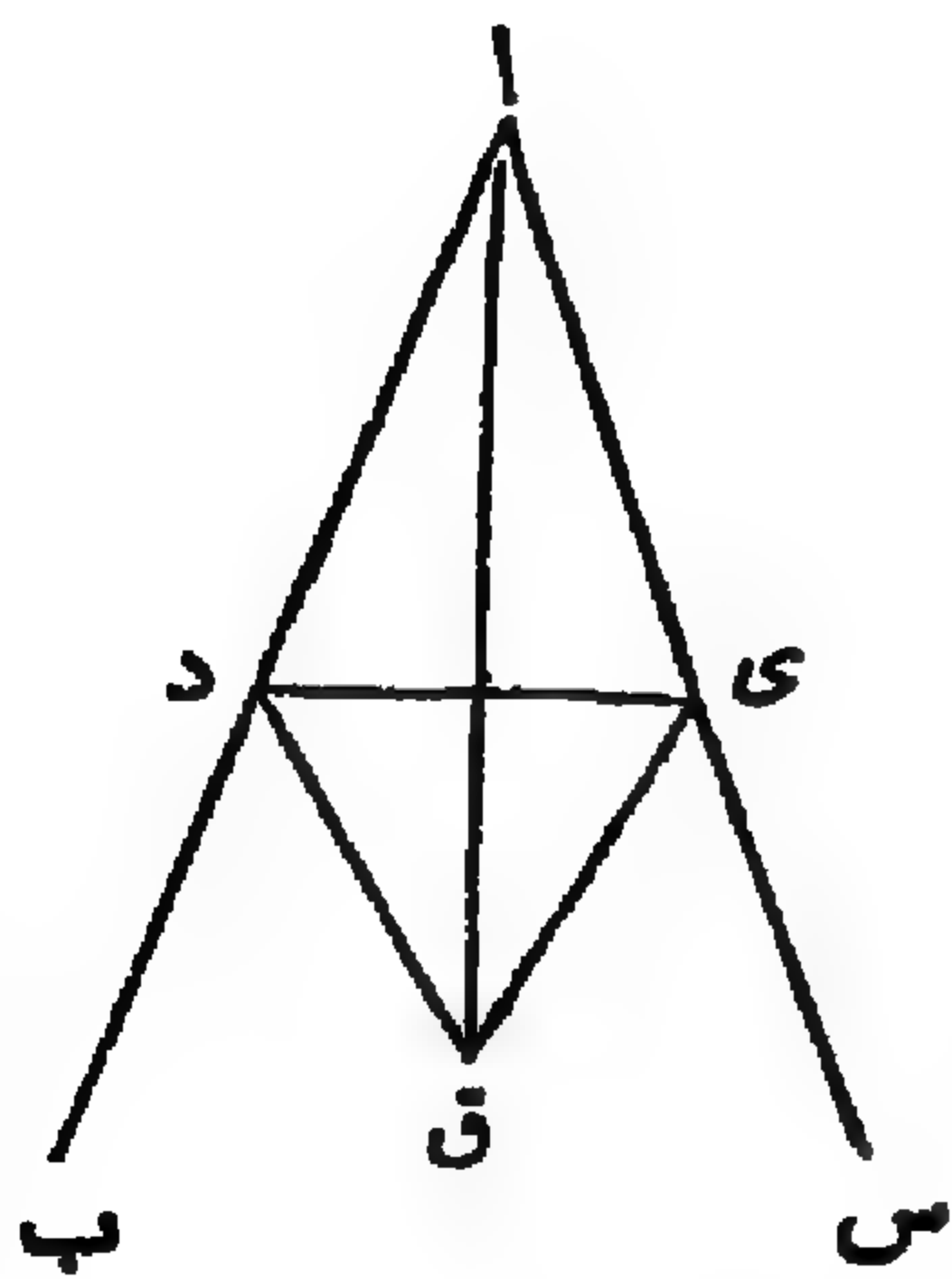


ي ف واذا ذاك فالخط ب ا  
يقع على الخط ي د والخط  
ا س يقع على د ف ولا  
فلنفرض وقوعها على ر  
ر ف فعند ذلك يكون  
على قاعدة واحدة وعلى ف

جانب واحد منها مثلثان الضلعان منها المنتهيان في طرف واحد من القاعدة  
متساويان والمنتهيان في طرفها الاخر متساويان ايضا وذلك لا يمكن (ق ٧ ك ١)  
فاذا طبق ب س على ي ف فالخطان ب ا س يطبقان على د ف والزاوية  
ب ا س تطبق على الزاوية ي د ف وتعد لها (اولية ٨) وذلك ما كان علينا ان نبرهنه

### النضية التاسعة. مع

علينا ان نصف زاوية بسيطة مستقيمة مفروضة اي ان تقسمها الى  
قسمين متساويين



ليكن ب ا س الزاوية المفروضة ان ننصفها  
عبر آية نقطة شئت في الخط ا ب كالنقطة د  
ومن ا س اطول خطين اقطع جزءا ا س حتى  
يعدل ا د اقصرها (ق ٢ ك ١) ا رسم الخط د ي  
وان عليه مثلثا متساوي الاضلاع د ق س  
(ق ١ ك ١) وارسم الخط ا ق فهو ينصف الزاوية  
ب ا س

لان الخط ا د يعدل الخط ا ي والخط ا ق

مشترك بين المثلثين د ا ق ي ا ق فالضلعان د ا ق يعدلان الضلعين ي ا ق  
كل واحد يعدل نظيره. والقاعدة د ق تعدل القاعدة ق ي فالزاوية د ا ق تعدل  
الزاوية ي ا ق (ق ٨ ك ١) فقد تصفت الزاوية ب ا س بالخط ا ق المستقيم وذلك  
ما كان علينا ان نعلمه



تعلية. على هذه الكيفية تنصف كلا النصفين ذاق ي ا ق وعلى هذا المسق  
تقسم زاوية مفروضة الى اربعة او ثمانية اجزاء او الى ستة عشر جزءاً متساوية وهم جزءاً

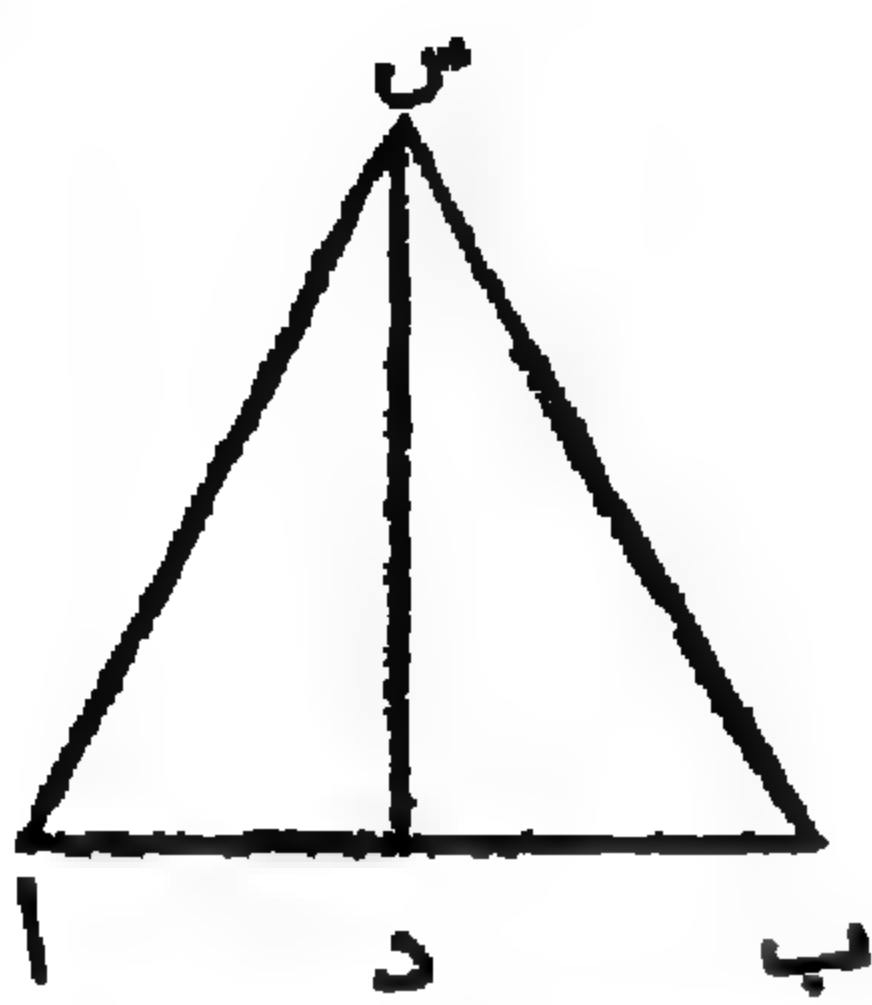
### القضية العاشرة. ع

علينا ان ننصف خطاً مستقيماً محدوداً مفروضاً اي ان نقسمه الى قسمين

متساويين

ليكن ا ب الخط المستقيم المفروض علينا ان

ننصفه



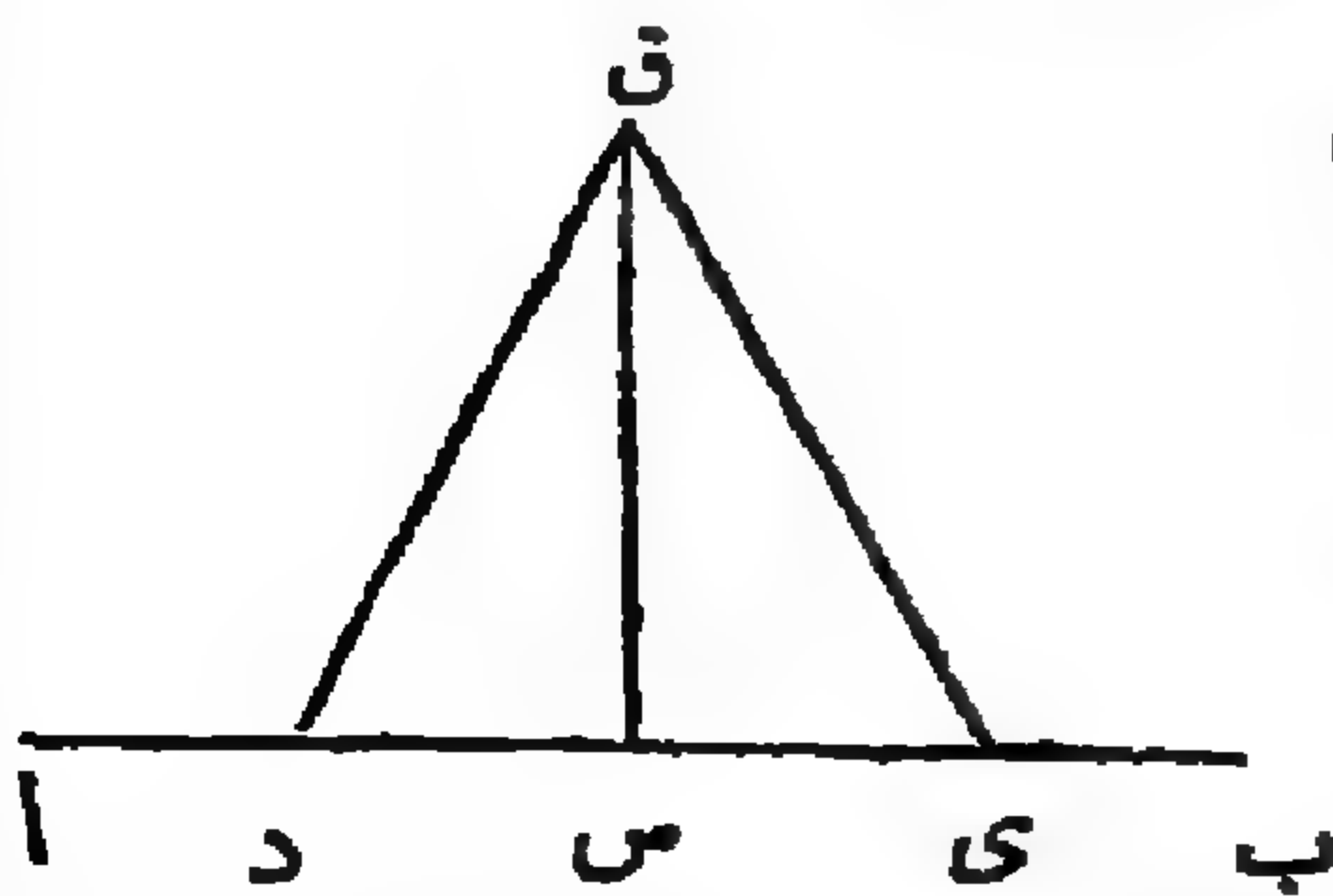
ارسم على الخط ا ب مثلثاً متساوي الاضلاع ا س ب  
(ق ١ ك ١) وننصف الزاوية ا س ب بالخط المستقيم س د  
(ق ٢ ك ١) فالخط ا ب قد انصف في النقطة د

فلأن الخط ا س يعدل س ب والخط س د مشترك بين المثلثين ا س د  
ب س د فالضلعان ا س س د يعدلان الضلعين ب س س د والزاوية ا س د  
تعدل الزاوية ب س د فلذلك القاعدة ا د تعدل القاعدة ب د (ق ٤ ك ١) فقد  
انصف الخط ا ب في النقطة د وذلك ما كان علينا ان نعمله

### القضية الحادية عشرة. ع

علينا ان نرسم من نقطة مفروضة في خط مستقيم محدود مفروض خطاً

مستقيماً يحدّث مع الاول زاويتين قائمتين



ليكن ا ب الخط المستقيم المفروض ومن  
النقطة المفروضة فيه. فعلينا ان نرسم من  
النقطة س خطاً مستقيماً يحدّث مع ا ب  
قائمتين

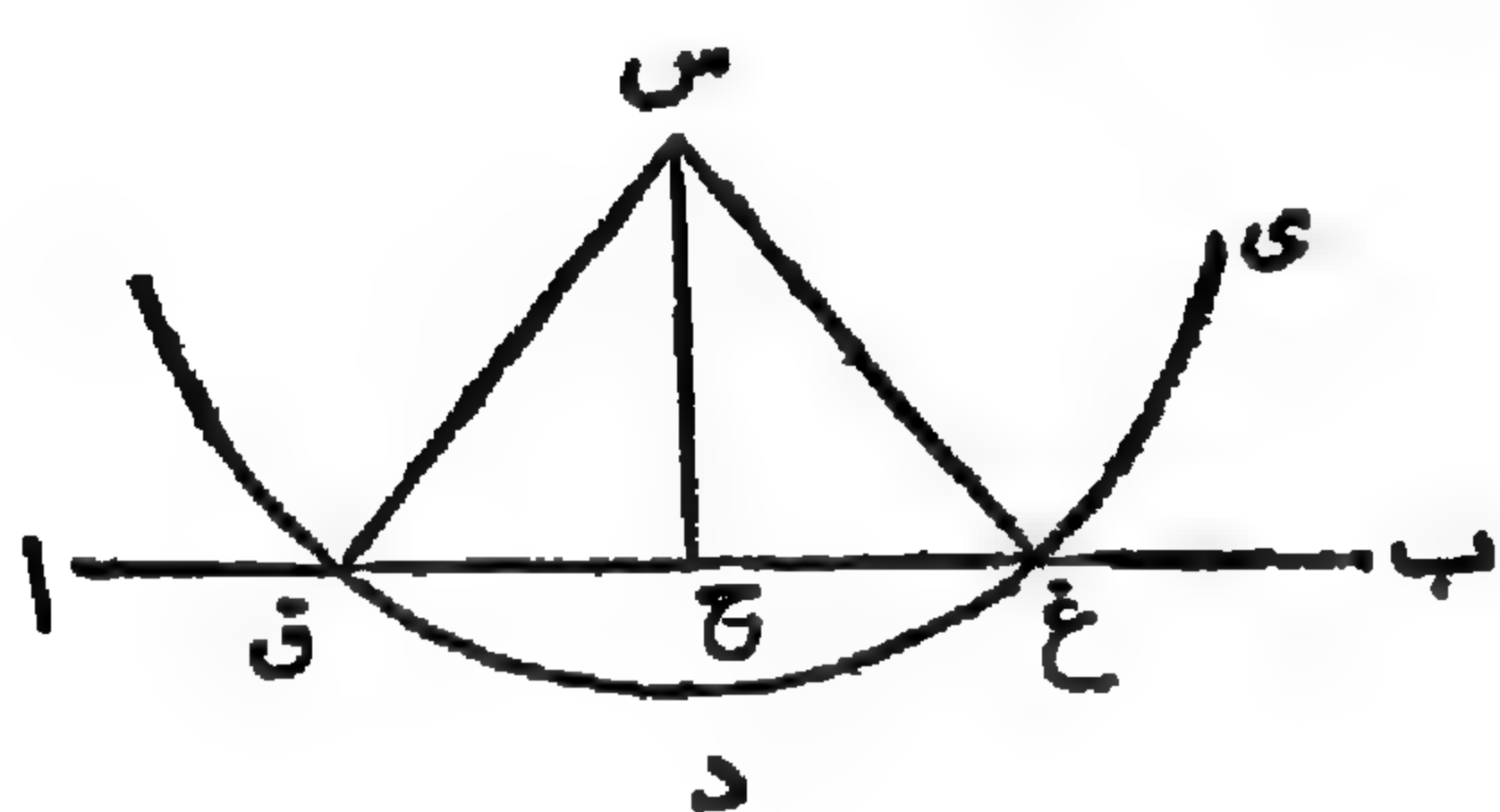
عين ا ب نقطة شئت في ا س كالنقطة د مثلاً ومن س ب اقطع جزءاً س ي حتى  
يعدل س د (ق ٢ ك ١) وعلى د ي ابن مثلثاً متساوي الاضلاع (ق ١ ك ١) د ق ي



ثم ارسم الخط ق س فهو يحدّث مع ا ب قائمتين  
فلأن د س يعدل ي س والخط ق س هو مشترك بين المثلثين د س ق  
ي س ق فالضلعان د س س ق يعدلان الضلعين ي س س ق كل واحد يعدل  
نظيره. والقاعدة د ق تعدل القاعدة ي ق فالزاوية د س ق تعدل الزاوية ي س ق  
(ق ٨ ك ١) وهما متواليتان. وإذا قام خط مستقيم على آخر مستقيم وجعل الزاويتين  
المتواليتين متساويتين فكل واحدة منهما قائمة (حد ٧) فكل واحدة من د س ق  
ي س ق هي قائمة. فقد رُسم من النقطة المفروضة س خط ق س وهو يحدّث مع ا ب  
قائمتين وذلك ما كان علينا ان نعلمه

### القضية الثانية عشرة: مع

علينا ان نرسم خطاً عمودياً على خط مستقيم مفروض غير محدود  
وذلك من نقطة مفروضة خارج ذلك الخط



ليكن ا ب خطاً مستقيماً  
يمكن اخراجه الى جهتيه الى غير  
نهاية. وليكن س نقطة خارجة  
فعلينا ان نرسم من س خطاً  
عمودياً على ا ب

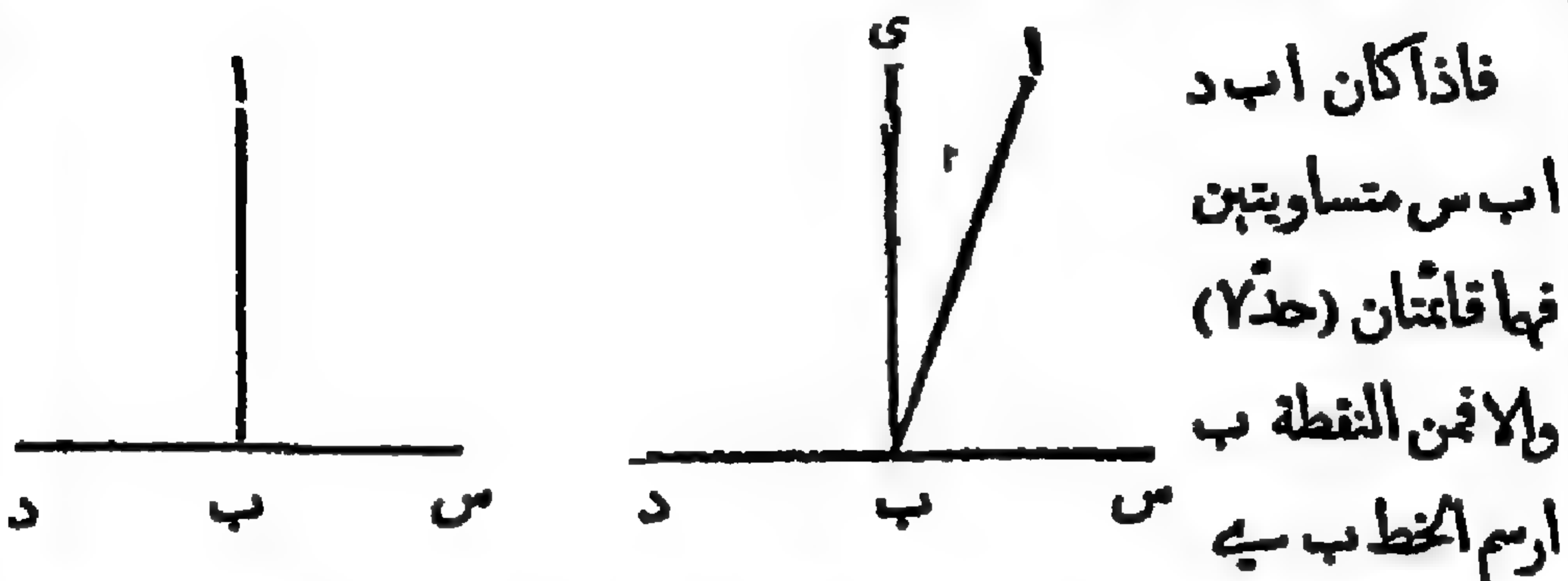
عين اية نقطة شئت على الجانب الاخر من ا ب مثل د ثم اجعل س مركزاً  
وس د بعداً وارسم الدائرة ي غ ق (ثلاثة المكات) التي تقطع ا ب في النقطتين غ  
وق. نصف ق غ في ح (ق ١٠ ك ١) ثم ارسم س ح فهو عمودي على ا ب. ارسم  
س ق س غ ولان ق ح يعدل ح غ والخط س ح مشترك بين المثلثين ق ح س  
غ ح س فالضلعان ق ح س يعدلان الضلعين غ ح س كل واحد يعدل  
نظيره. والقاعدة س ق تعدل القاعدة س غ (حد ١) فالزاوية ق ح س تعدل  
الزاوية غ ح س (ق ٨ ك ١) وهما متواليتان. فالخط س ح عمودي على ا ب (حد ٧)  
وقد رُسم من النقطة المفروضة س وذلك ما كان علينا ان نعلمه



القضية الثالثة عشرة . ن

الزاويتان الحادثتان من وقوع خط مستقيم على آخر مستقيم على جانب واحد منه هما قائمتان او تعدلان قائمتين

ليقع الخط المستقيم ا ب على الخط المستقيم د س حتى يحدث الزاويتان ا ب د ا ب س فهما قائمتان او تعدلان قائمتين



فاذا كان ا ب د  
ا ب س متساويتين  
فهما قائمتان (حد ٢)  
ولا فمن النقطة ب  
ارسم الخط ب ي

عمودياً على د س (ق ١ ا ك) فالزاويتان ي ب د ي ب س قائمتان والزاوية  
س ب ي تعدل س ب ا مع ا ب ي اصف الى كل واحدة منها الزاوية ي ب د  
فالزاويتان س ب ي ي ب د تعدلان الثلاث زوايا س ب ا ا ب ي ي ب د  
(اولية ٢) والزاوية د ب ا تعدل د ب ي مع ي ب ا اصف الى كل واحدة منها ا ب س  
فالزاويتان د ب ا ا ب س تعدلان الثلاث د ب ي ي ب ا ا ب س وقد تبهرن  
ان د ب ي س ب ي تعدل هذه الثلاث زوايا ايضاً. والاشياء المساوية لشيء واحد  
هي متساوية بعضها البعض (اولية ١) اي الزاويتان س ب ي د ب ي تعدلان  
الزاويتين د ب ا ا ب س ولكن س ب ي ي ب د هما قائمتان فالزاويتان د ب ا  
ا ب س تعدلان قائمتين

فرع: مجتمع جميع الزوايا الحادثة على جانب واحد من د س يعدل قائمتين لانه  
يعدل مجتمع المتوالتين د ب ا ا ب س

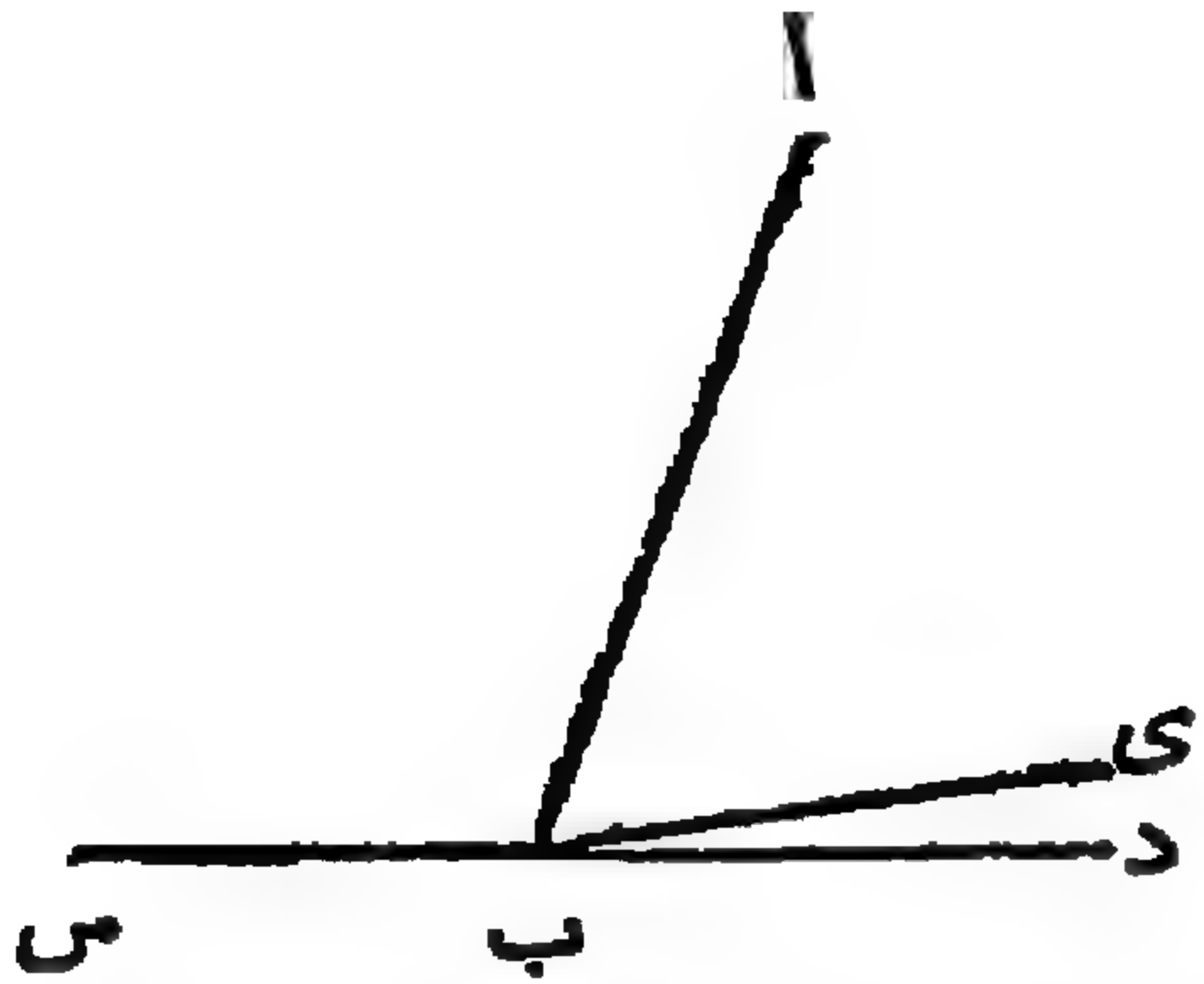
القضية الرابعة عشرة . ن

اذا وقع خطان مستقيمان على نقطة واحدة من خط آخر مستقيم عن



جانبه واحدا زاويتين متواليتين تعدلان قائمتين فالخطان على استقامة واحدة كأنها خط واحد

ليقع خطان س ب ب د على النقطة ب من الخط ا ب من جانبه وليحدثا زاويتين متواليتين تعدلان قائمتين ا ب س ا ب د فالخطان س ب ب د على استقامة واحدة كأنها خط واحد

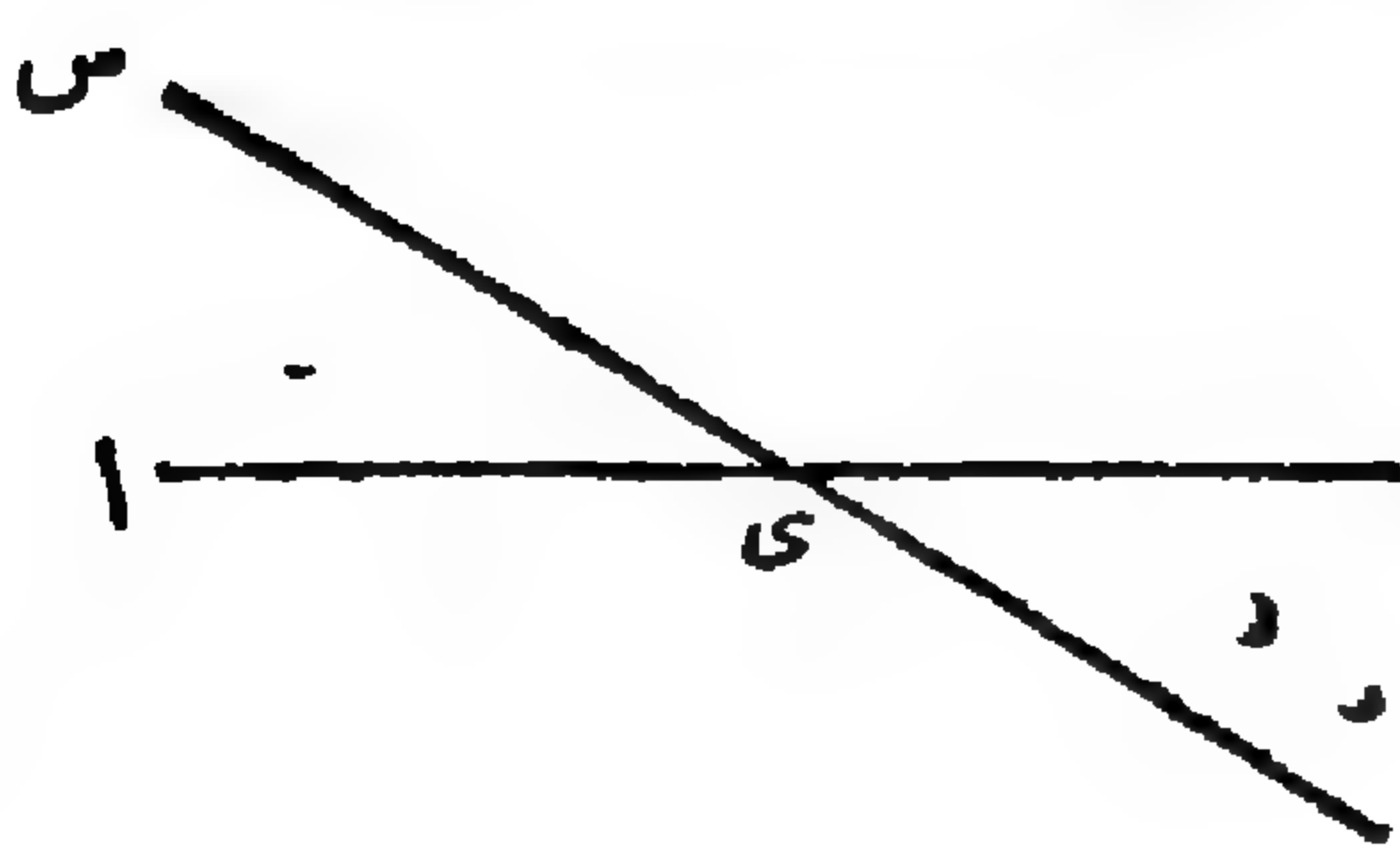


والأفارسم ب ي حتى يكون س ب ب ي على استقامة واحدة فالخط المستقيم ا ب الواقع على خط آخر مستقيم س ي على جانب واحد منه يحدث زاويتين ا ب س ا ب ي تعدلان قائمتين (ق ١٢ ك ١)

ولكن قد فرض ان ا ب س ا ب د تعدلان قائمتين فالزاويتان ا ب س ا ب ي تعدلان ا ب س ا ب د اطرح الزاوية المشتركة ا ب س فالباقية ا ب ي تعدل الباقية ا ب د (اولية ٣) اي الجزء يعدل الكل وذاك محال فلا يمكن ان يكون س ب ب ي على استقامة واحدة. وهكذا في كل خط غير ب د فالخطان س ب ب د المحدثان مع ا ب زاويتين تعدلان قائمتين هما على استقامة واحدة وذلك ما كان علينا ان نبرهنه

### القضية الخامسة عشرة ن

اذا تقاطع خطان مستقيمان فالزوايا المتقابلة متساوية



ليكن ا ب خطا مستقيما وليقطعه خط آخر س د في النقطة ي فالزاوية س ي ا تعدل ب ي د والزاوية س ي ب تعدل ا ي د

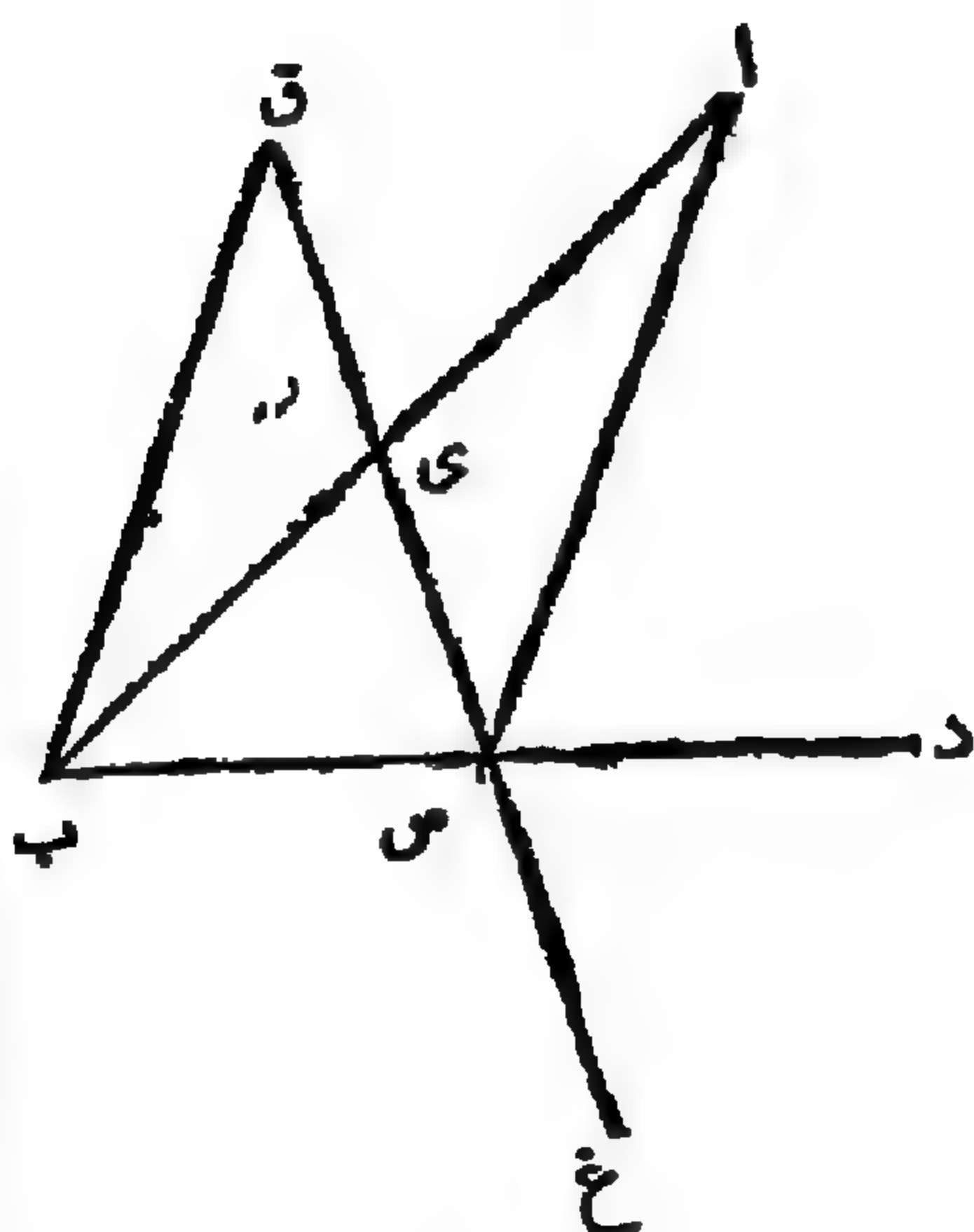
لان الزاويتين س ي ا ا ي د

المحادثتين من وقوع ا ي على س د تعدلان قائمتين (ق ١٢ ك ١) و ا ي د د ي ب المحادثتان من وقوع د ي على ا ب ايضا تعدلان قائمتين (ق ١٢ ك ١) فالزاويتان

س ي ا اى د تعدلان اى د دى ب اطرح المشتركة اى د فالباقي س ي ا تعدل  
 الباقي دى ب (اولية ٢) وهكذا ايضا يبرهن ان س ي ب تعدل اى د  
 فرع اول. يتضح من هذه القضية ان مجتمع جميع الزوايا الحادة من تقاطع  
 خطين مستقيمين يعدل اربع زوايا قائمة  
 فرع ثان. مجتمع الزوايا الحادة من تقاطع خطوط مستقيمة في نقطة واحدة يعدل  
 اربع زوايا قائمة

### القضية السادسة عشرة ٠

اذا اخرج ضلع من مثلث فالزاوية الخارجة الحادة من ذلك هي اكبر  
 من احدى الداخلتين المتقابلتين



ليكن ق ب س مثلثا ويخرج الضلع  
 ب س الى د فالزاوية الخارجة ق س د هي  
 اكبر من احدى الداخلتين المتقابلتين  
 س ب ق ب ق س  
 نصف ق س في ي (ق ١٠ ك ١)  
 ارسم ب ي واخرجه الى ا واجعل ي ا  
 حتى يعدل ب ي (ق ٢ ك ١) ارسم ا س  
 واخرج ق س الى غ

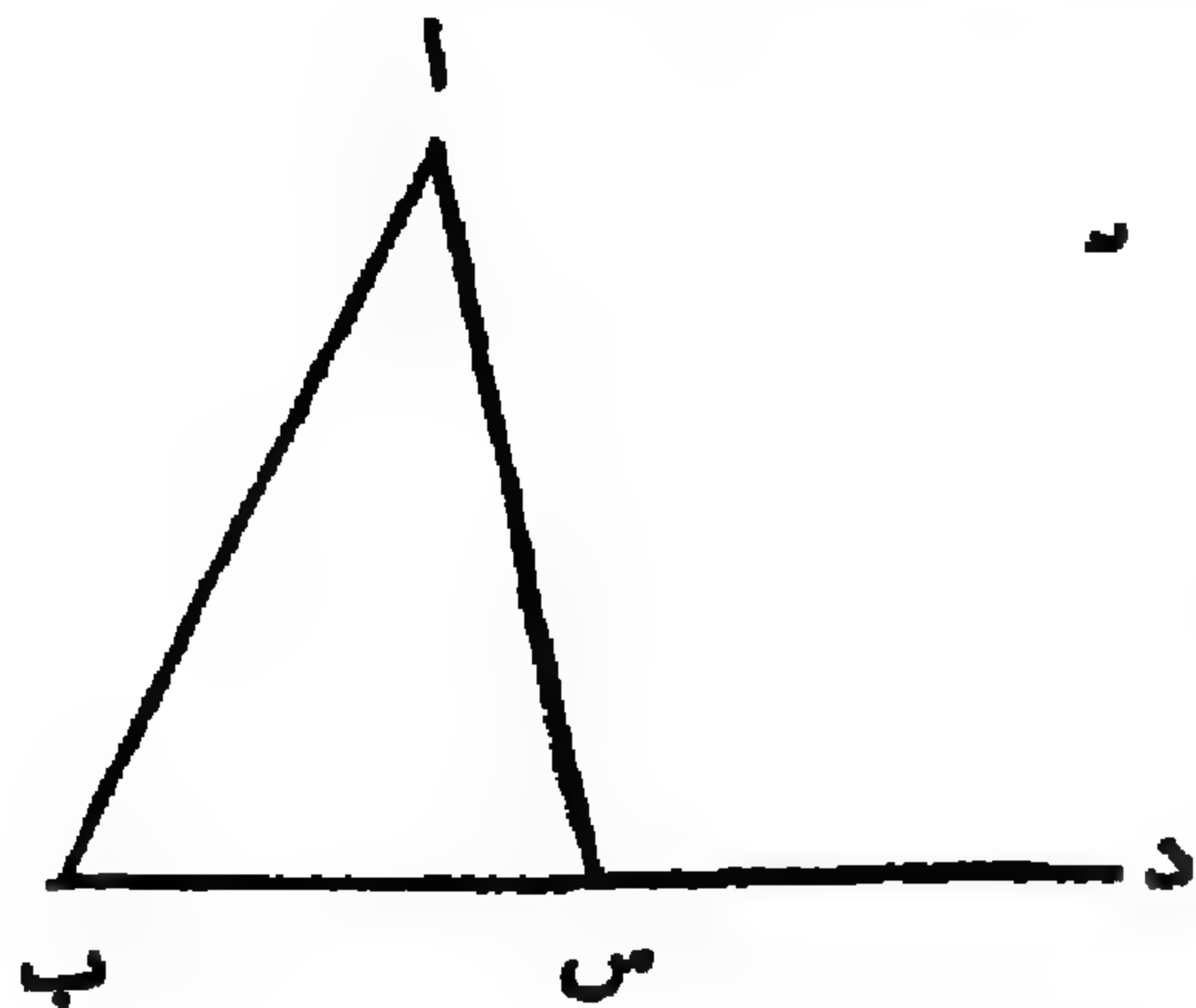
فالآن ق ي يعدل ي س وب ي يعدل ي ا فالخطان ق ي ي ب يعدلان  
 اى ي س كل واحد يعدل نظيرة. والزاوية ق ي ب تعدل اى س (ق ١٥ ك ١)  
 فالقاعدة ق ب تعدل القاعدة ا س (ق ٤ ك ١) والمثلث ق ي ب يعدل المثلث  
 اى س ونقية الزوايا من الواحد تعدل بقية الزوايا من الاخر. يعني التي تقابلها  
 الاضلاع المتساوية فالزاوية ب ق ي تعدل الزاوية ي س ا والزاوية ي س د او  
 ق س د هي اكبر من ي س ا فهي ايضا اكبر من ب ق ي او ب ق س وعلى هذا  
 النسق اذا نصف ب س يبرهن ان الزاوية ب س غ او ق س د (ق ١٥ ك ١)  
 هي اكبر من ق ب س



### القضية السابعة عشرة. ن

زاويتان من مثلث هما معاً اصغر من قائمتين

ليكن  $AB$  س مثلثاً فزاويتان منه  
معاً اصغر من قائمتين

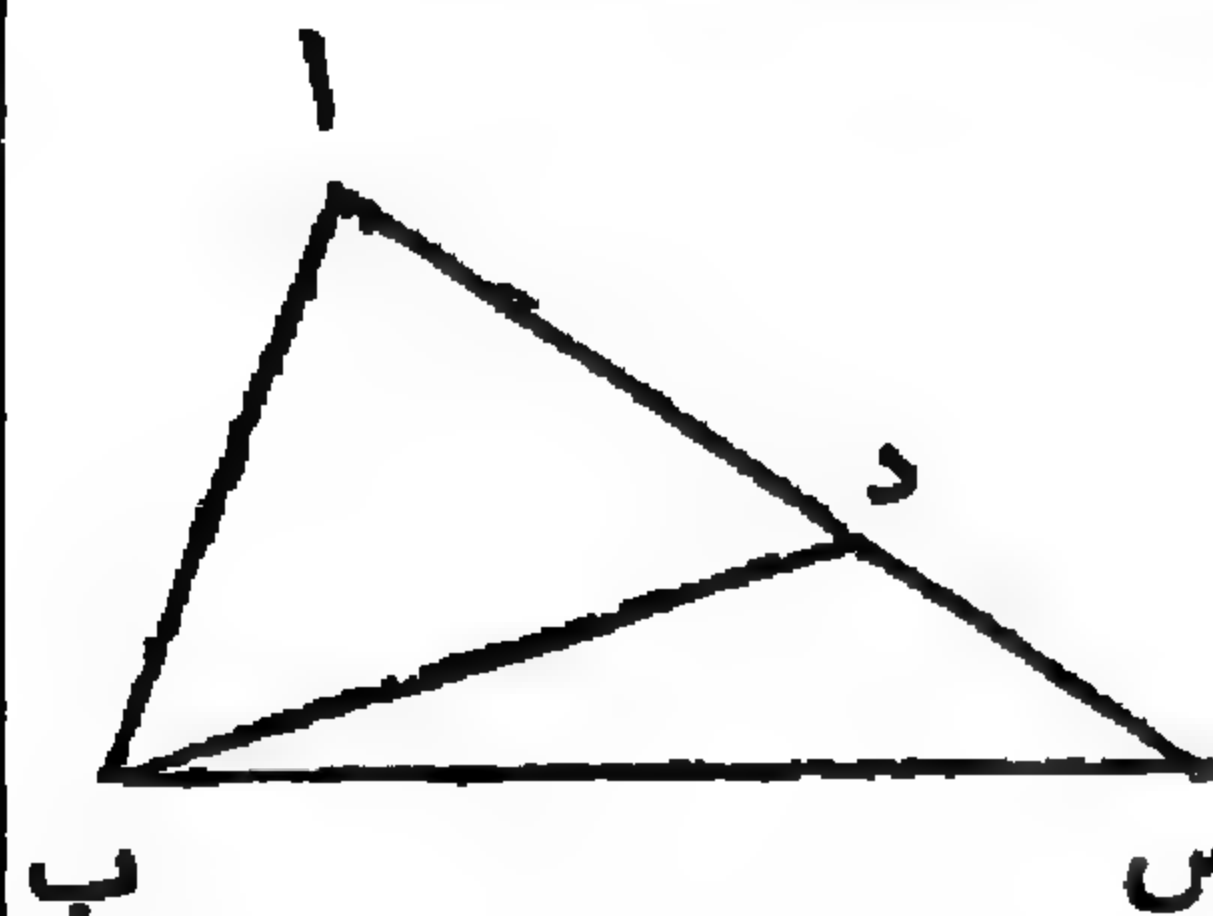


اخرج  $B$  س الى  $D$  فالزاوية  
الخارجية  $ASD$  هي اكبر من الداخلة  
 $AB$  س (ق ١٦ ك ١) اصف الى كل  
واحدة منها  $AS$  ب فالزاويتان  $ASD$

$ASB$  معاً اكبر من  $AB$  س  $AS$  ب معاً ولكن  $ASD$   $AS$  ب معاً تعدلان  
قائمتين (ق ١٢ ك ١) واذا ذاك فالزاويتان  $AB$  س  $AS$  ب معاً اصغر من قائمتين.  
وعلى هذا الاسلوب يبرهن ان  $AS$  ب معاً و  $AB$  س معاً اصغر  
من قائمتين

### القضية الثامنة عشرة. ن

الضلع الاطول من كل مثلث تقابله الزاوية الكبرى

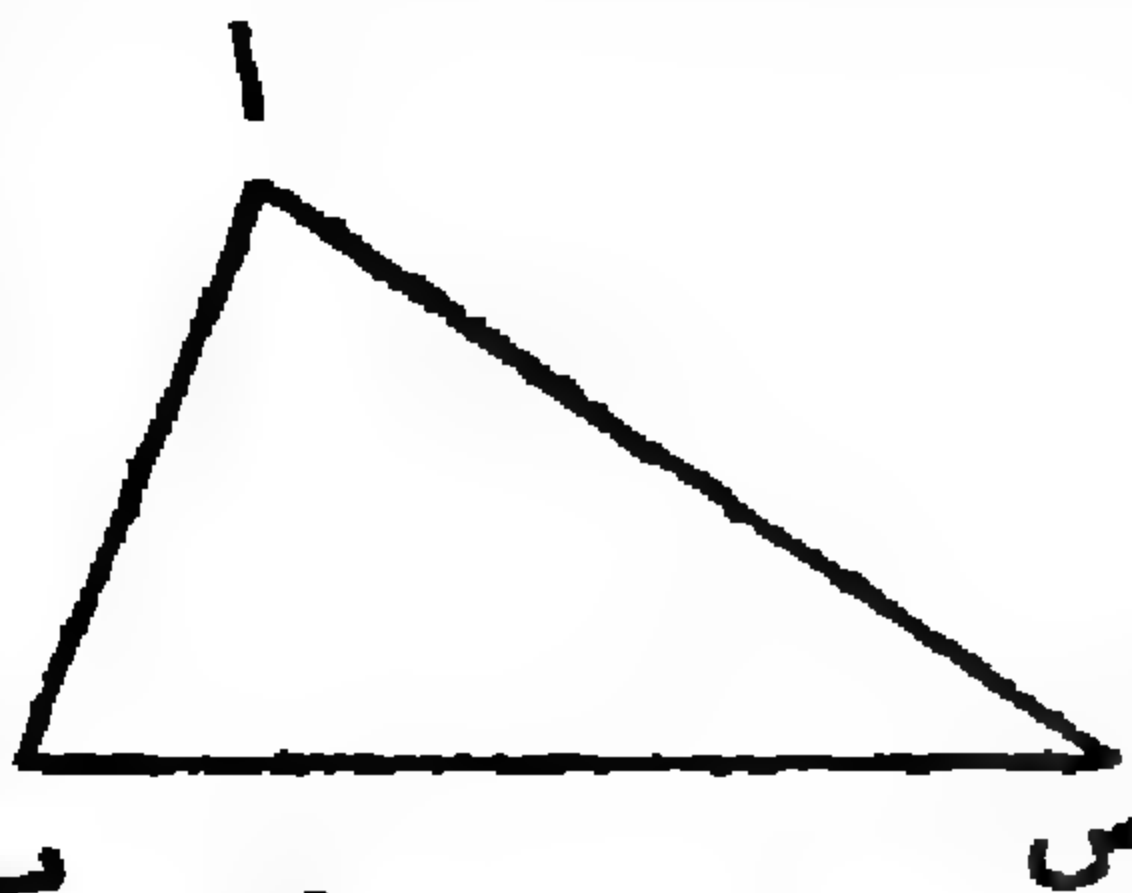


ليكن  $AB$  س مثلثاً وليكن الضلع  $AS$  اطول  
من الضلع  $AB$  فتكون الزاوية  $AB$  س اكبر  
من الزاوية  $B$  س  $A$

من  $AS$  اقطع  $AD$  حتى يعدل  $AB$  (ق ١٢ ك ١) وارسم  $B$  د ففي المثلث  $ABD$  س الزاوية الخارجة  $ADB$  هي اكبر من الداخلة  
 $ASB$  ولكن  $ADB$  تعدل  $AB$  د (ق ٥ ك ١) فالزاوية  $AB$  د ايضاً اكبر من  
 $ASB$  وبالاخرى  $AB$  س اكبر من  $AS$  ب اي  $AS$  ب

### القضية التاسعة عشرة. ن

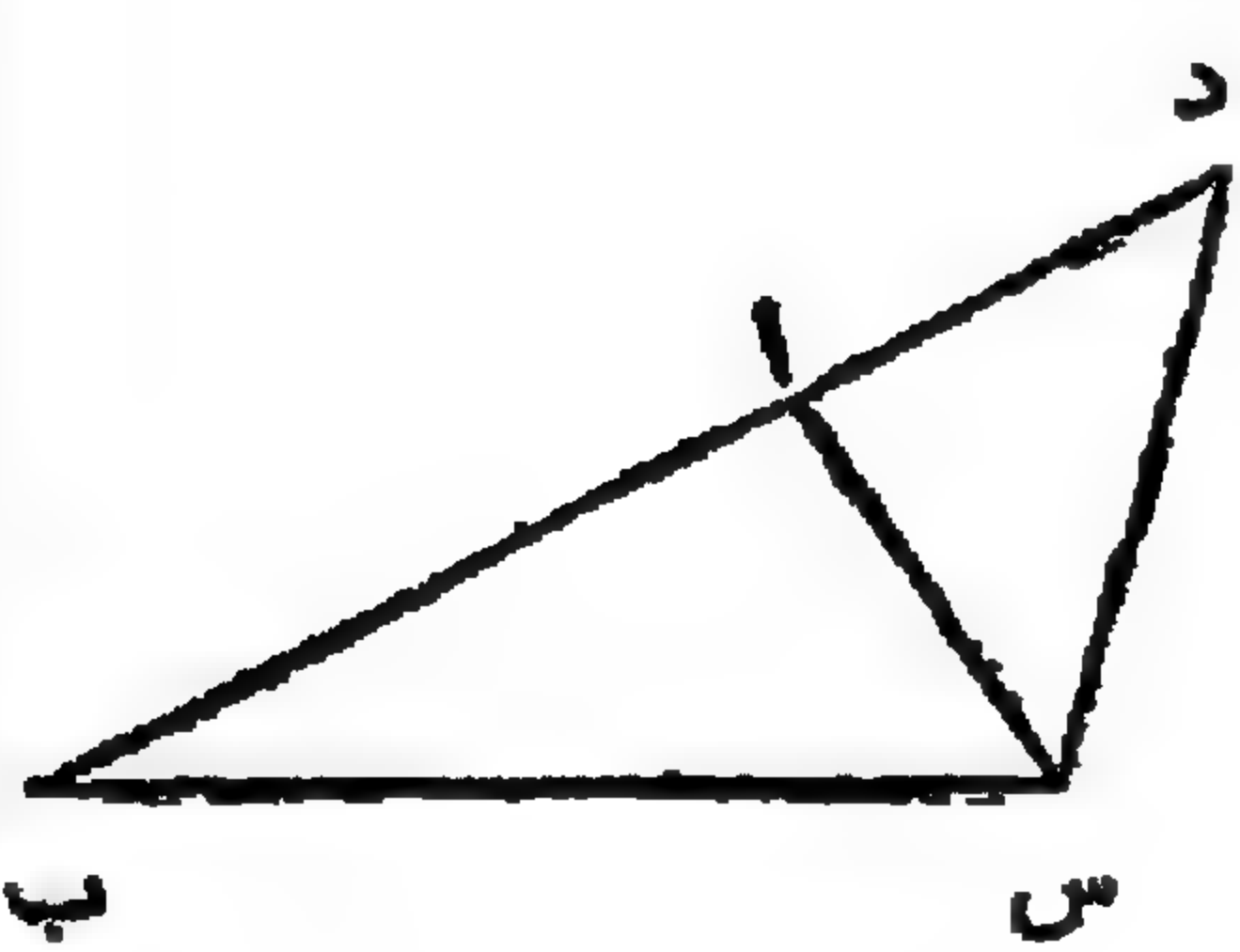
الزاوية الكبرى من كل مثلث يقابلها الضلع الاطول



ليكن  $ا ب س$  مثلثا وليكن الزاوية  $ا ب س$   
أكبر من  $ا س ب$  فيكون الضلع  $ا س$  أطول من  
 $ا ب$  وإلا فالضلع  $ا س$  يعدل  $ا ب$  أو هو أقصر  
منه ولا يمكن أن يعدل  $ا ب$  لأنه عند ذلك  
كانت الزاويتان  $ا س ب$   $ا ب س$  متساويتين (ق ٥ ك ١) وقد فرض أن  $ا ب س$  أكبر  
من  $ا س ب$  ولو كانت أقصر لكانت  $ا ب س$  أصغر من  $ا س ب$  (ق ١٨ ك ١)  
فبالضرورة يكون  $ا س$  أطول من  $ا ب$

### القضية العشرون

ضلعان من مثلث هما معاً أطول من ضلعه الثالث



ليكن  $ا ب س$  مثلثا فضلعان منه معاً  
أطول من ضلعه الثالث أي الضلعان  
 $ب ا$   $ا س$  معاً أطول من  $ب س$  و  $ا ب$   
 $ب س$  معاً أطول من  $ا س$  و  $ب س$   $ا س$   
معاً أطول من  $ا ب$

أخرج  $ب ا$  إلى  $د$  واجعل  $ا د$  يعدل  $ا س$  (ق ٢ ك ١) وارسم  $د س$  فبما  
أن  $ا د$  يعدل  $ا س$  فالزاوية  $ا د س$  تعدل  $ا س د$  (ق ٥ ك ١) و  $ب س د$  هي  
أكبر من  $ا س د$  فهي أيضاً أكبر من  $ا د س$  فيكون الضلع  $ب د$  أطول من  $ب س$   
(ق ١٩ ك ١) ولكن  $ب د$  يعدل  $ب ا$  مع  $ا س$  فالضلعان  $ب ا$   $ا س$  معاً هما أطول  
من  $ب س$  وهكذا في كل ضلعين من المثلث

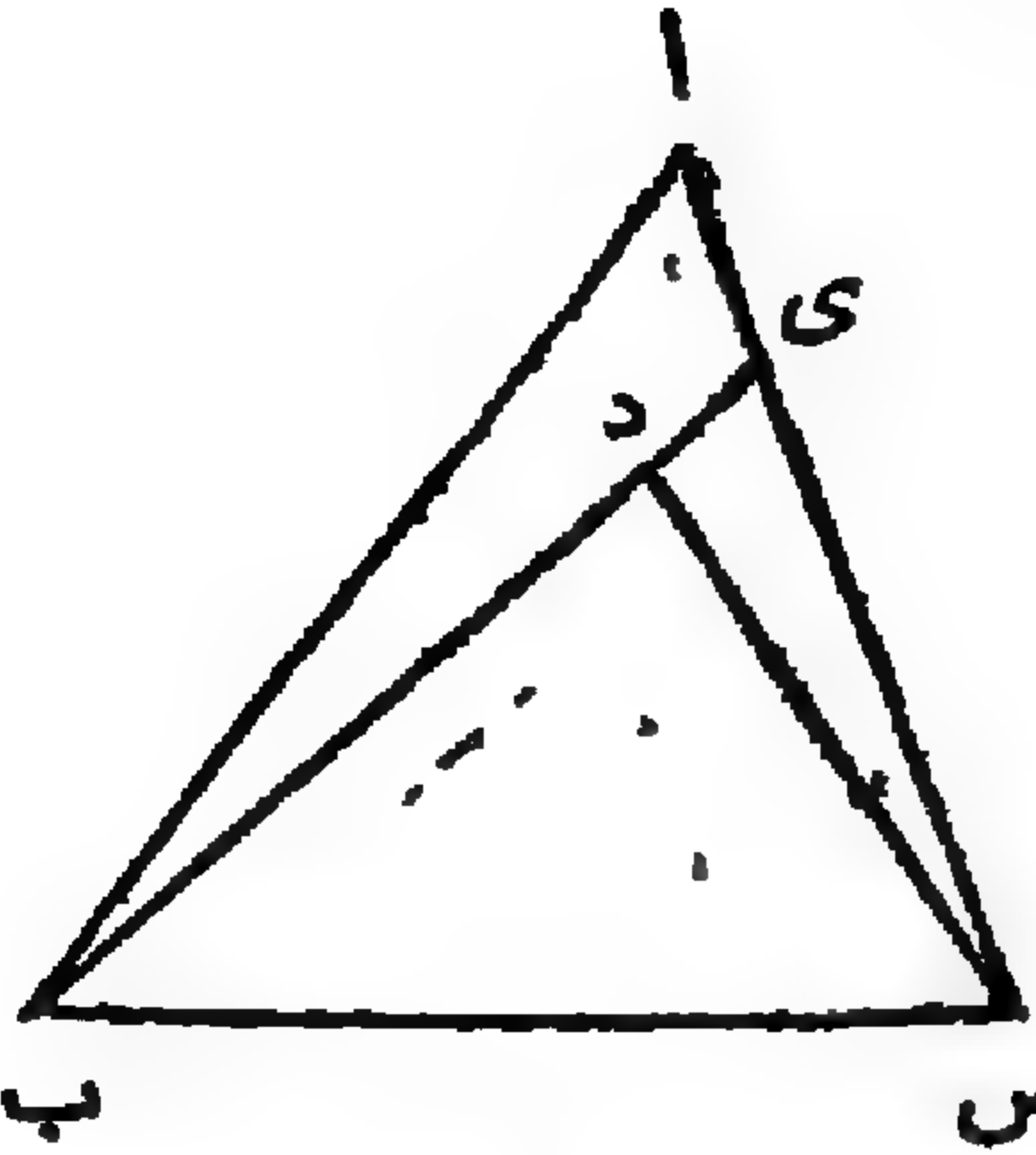
تعليقة. يبرهن ذلك بدون إخراج ضلع من المثلث لأن  $ب س$  هو البعد  
الأقرب بين النقطة  $ب$  والنقطة  $س$  فيكون  $ب س$  أقصر من  $ب ا$   $ا س$  أي  $ب ا$   
 $ا س$  معاً أطول من  $ب س$

### القضية الحادية والعشرون

إذا رسم من طرفي ضلع مثلث خطان مستقيمان إلى نقطة داخل المثلث



فهما أقصر من ضلعي المثلث الآخرين ولكن يحيطان بزاوية أكبر من التي بين الآخرين

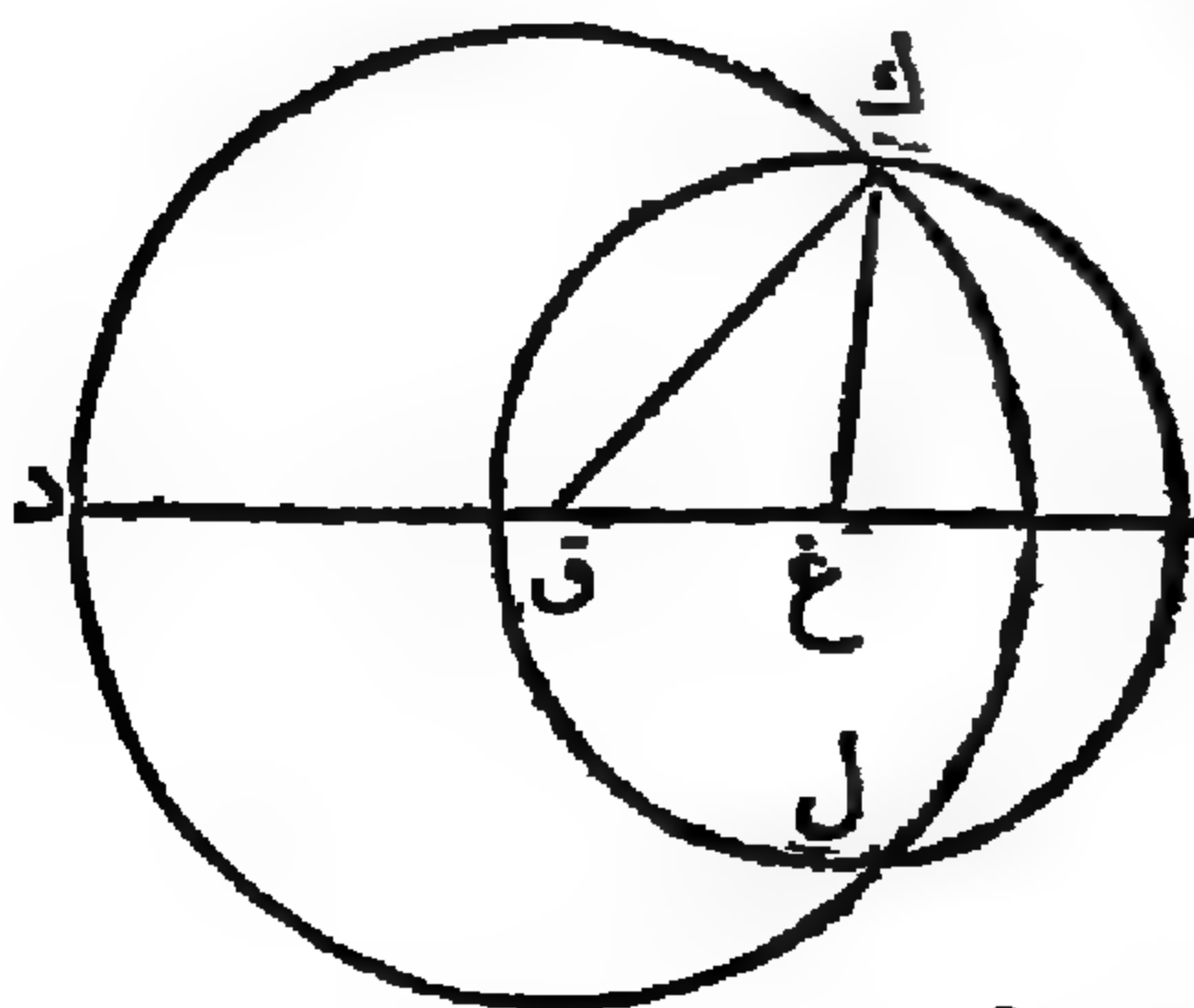


ليكن ا ب س مثلثا، وليرسم من طرفي ب س خطان الى النقطة د داخل المثلث مثل ب د س د فهما أقصر من ب ا ا س ولكن الزاوية ب د س هي أكبر من ب ا س. اخرج ب د الى ي. فالضلعان ب ا ي معاً من المثلث ب ا ي هما أطول من ب ي (ق ٢٠ ك ١) اصف

لها ي س فالضلعان ب ا س أطول من ب ي ي س وفي المثلث س ي د الضلعان س ي ي د هما معاً أطول من س د. اصف لها د ب فالضلعان س ي ي ب معاً أطول من س د د ب. وقد تبهرن ان ب ا س هما معاً أطول من ب ي ي س فبالاخرى ب ا س أطول من ب د د س ثم الزاوية الخارجة ب د س من المثلث س د ي هي أكبر من الداخلة س ي د (ق ١٦ ك ١) ولذا هذا السبب س ي د هي أكبر من ي ا ب او س ا ب وقد تبهرن ان س د ب هي أكبر من س ي ب فبالاخرى هي أكبر من س ا ب

### القضية الثانية والعشرون ع

علينا ان نرسم مثلثاً اضلاعه تعدل ثلاثة خطوط مستقيمة مفروضة وكل اثنين منها معاً أطول من الثالث



ليكن ا و ب وس الخطوط المستقيمة المفروضة كل اثنين منها معاً أطول من الثالث. فعلينا ان نرسم مثلثاً اضلاعه تعدل هذه الخطوط الثلاثة

خذ خطاً مستقيماً ينتهي في نقطة د وغير محدود من جهة ب واقطع منه د ق حتى يعدل ا (ق ٢٠ ك ١) وق غ حتى

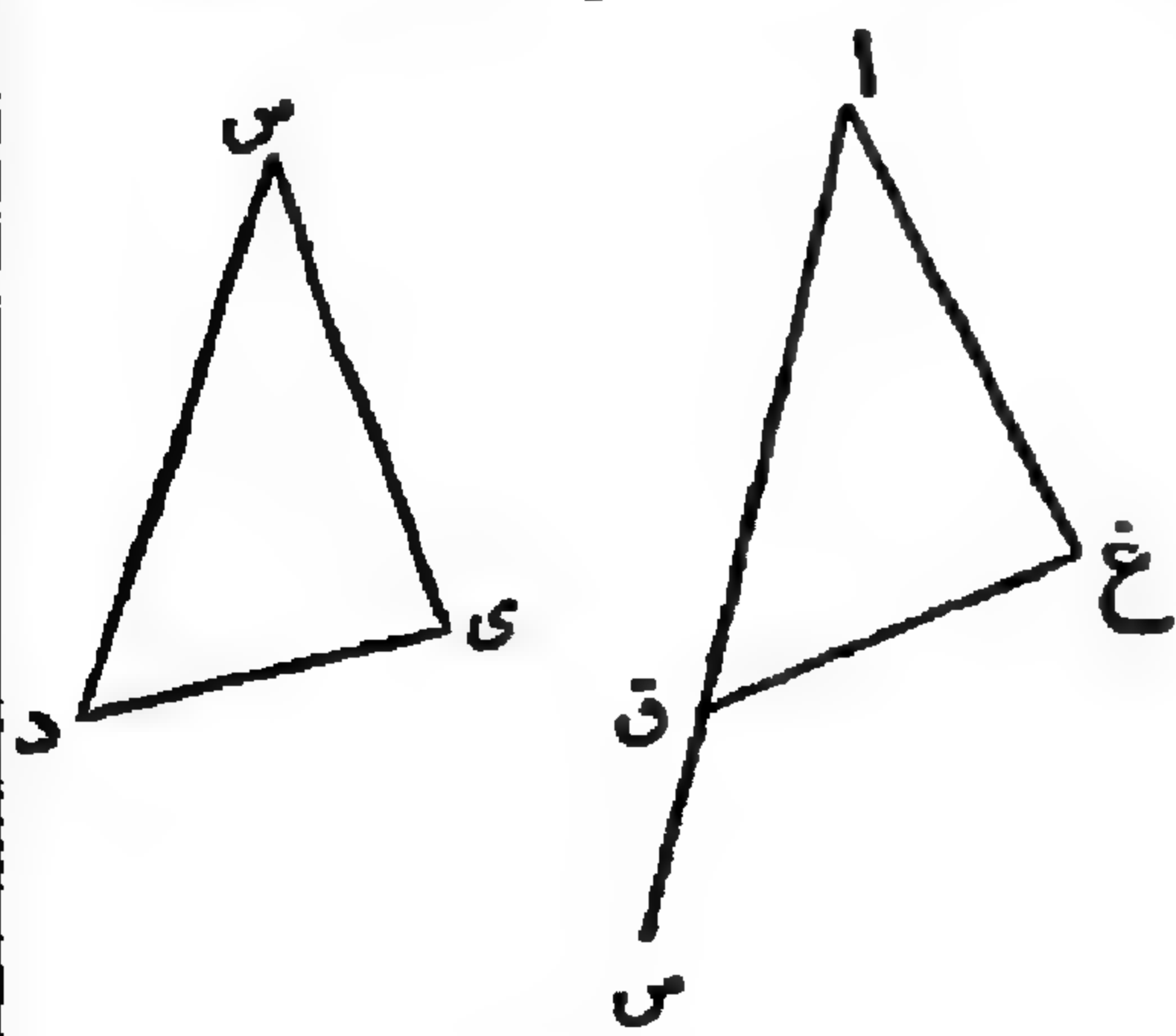
ا  
ب  
س

يعدل ب و غ ح حتى يعدل س ثم اجعل ق مركزاً وق د بعداً (ثلاثة الممكنات)  
وارسم دائرة د كل واجعل غ مركزاً و غ ح بعداً وارسم دائرة ك ح ل (ثلاثة الممكنات)  
ومن ك اي نقطة تقاطع الدائرتين ارسم ك ق ك غ فالمثلث ق ك غ هو المطلوب  
واضلاعه تعدل الخطوط الثلاثة المفروضة ا و ب و س. فقد جعلنا ق غ حتى يعدل  
ب ومن حيث ان النقطة ق هي مركز الدائرة د كل فالخط ق ك يعدل ق د  
(حدا ١١) ولكن ق د يعدل ا فالخط ق ك يعدل ا ايضاً. ومن حيث ان النقطة  
غ هي مركز الدائرة ك ح ل فالخط غ ح يعدل غ ك (حدا ١١) ولكن غ ح يعدل  
س ولذلك غ ك يعدل س ايضاً فقد رُسم مثلث اضلاعه تعدل ثلاثة خطوط  
مستقيمة مفروضة

تعليقة. لو كان احد الاضلاع اطول من مجتمع الآخرين لما تقاطعت الدائرتان  
والقضية صحيحة كل ما كان مجتمع ضلعين اطول من الثالث

### القضية الثالثة والعشرون ع

علينا ان نرسم من نقطة مفروضة في خط مستقيم مفروض زاوية  
مستقيمة بسيطة حتى تعدل زاوية اخرى مستقيمة بسيطة مفروضة



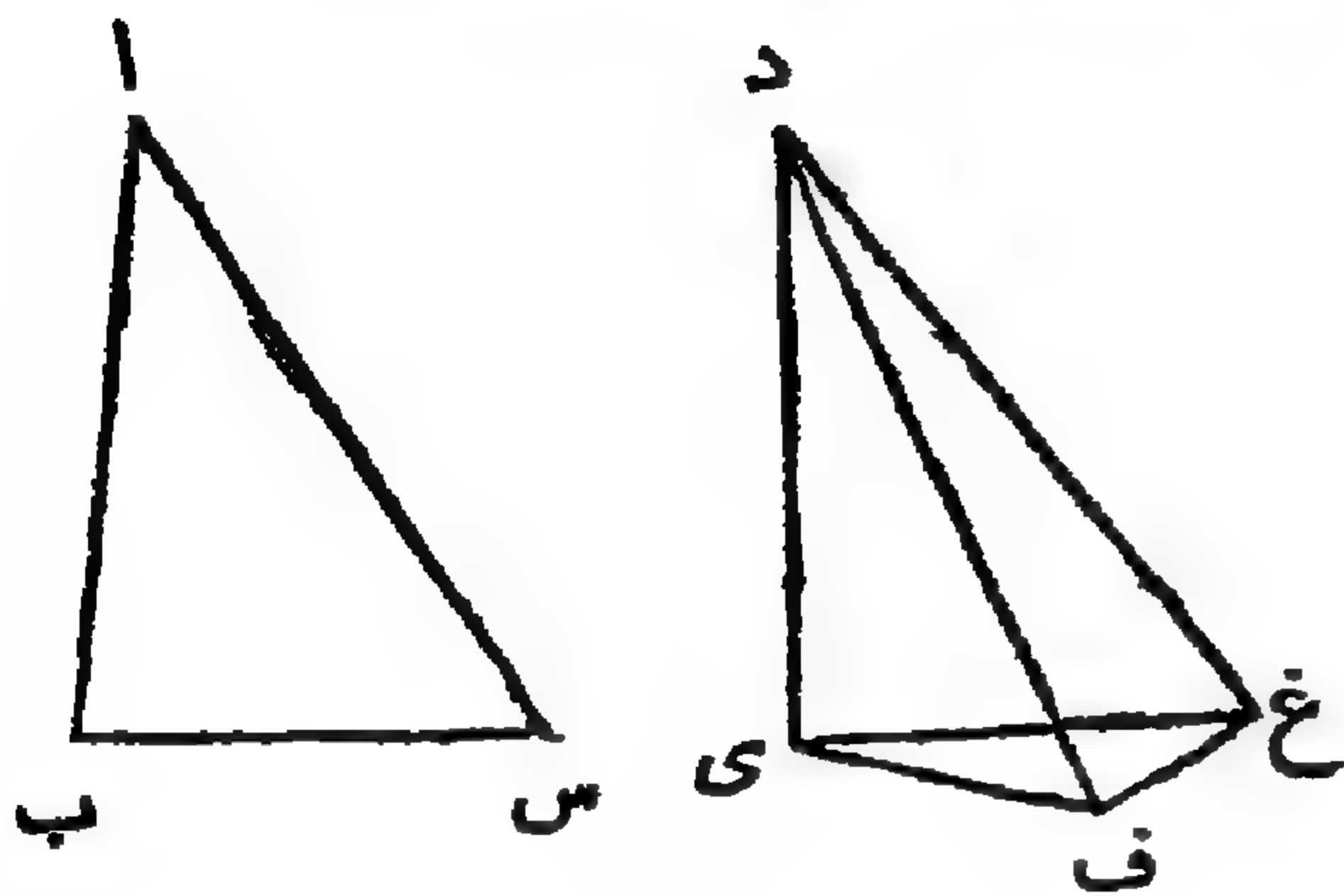
ليكن ا س الخط المستقيم  
المفروض والنقطة المفروضة منه  
ود س ي الزاوية البسيطة المفروضة  
فعلينا ان نرسم من النقطة ا زاوية  
بسيطة تعدل د س ي. في س د  
عين اية نقطة شئت مثل د. كذلك  
عين ي في س ي. ارسم د ي وارسم

المثلث ا ق غ حتى يعدل المثلث س د ي (ق ٢٢ ك ١) اي الضلع ا ق يعدل  
س د والضلع ا غ يعدل س ي والضلع ق غ يعدل د ي فبما ان الضلعين ق ا  
ا غ يعدلان د س س ي والقاعدة ق غ تعدل القاعدة د ي فالزاوية ق ا غ تعدل  
الزاوية د س ي (ق ٨ ك ١) وقد رُسمت من النقطة ا في الخط المفروض ا س



### القضية الرابعة والعشرون

في مثلثين اذا عدل ضلعان من الواحد ضلعين من الآخر وكانت الزاوية المحاذية بين ضلعي الاول اكبر من المحاذية بين ضلعي الآخر فلهذا الزاوية الكبرى له ايضا القاعدة الطولى



ليكن ا ب س دى ف  
مثلثين ولنفرض ان الضلع  
ا ب يعدل دى والضلع ا س  
يعدل د ف ولكن الزاوية  
ب ا س اكبر من دى د ف  
فتكون القاعدة ب س اطول  
من القاعدة دى ف

ليكن د ف اطول من دى ومن النقطة د ارسم الزاوية دى د غ حتى تعدل  
ب ا س (ق ٢٢ ك ١) واجعل د غ حتى يعدل ا س او د ف ارسم دى د غ  
فمن حيث ان ا ب يعدل دى و ا س يعدل د غ والزاوية ب ا س تعدل  
دى د غ فالقاعدة ب س تعدل القاعدة دى د غ (ق ٤ ك ١) ومن حيث ان د ف يعدل  
د غ فالزاوية د ف د غ تعدل د غ ف (ق ٥ ك ١) ولكن الزاوية د غ ف هي اكبر من  
دى د غ فتكون د ف غ ايضا اكبر من دى د غ ف فكم بالاحرى تكون دى د غ اكبر  
من دى د غ وفي المثلث دى د غ ف ف من حيث ان الزاوية دى د غ هي اكبر من دى د غ  
ف فيكون الضلع دى د غ اطول من دى د غ (ق ١٩ ك ١) ولكن دى د غ يعدل ب س  
فالقاعدة ب س اطول من القاعدة دى ف

### القضية الخامسة والعشرون

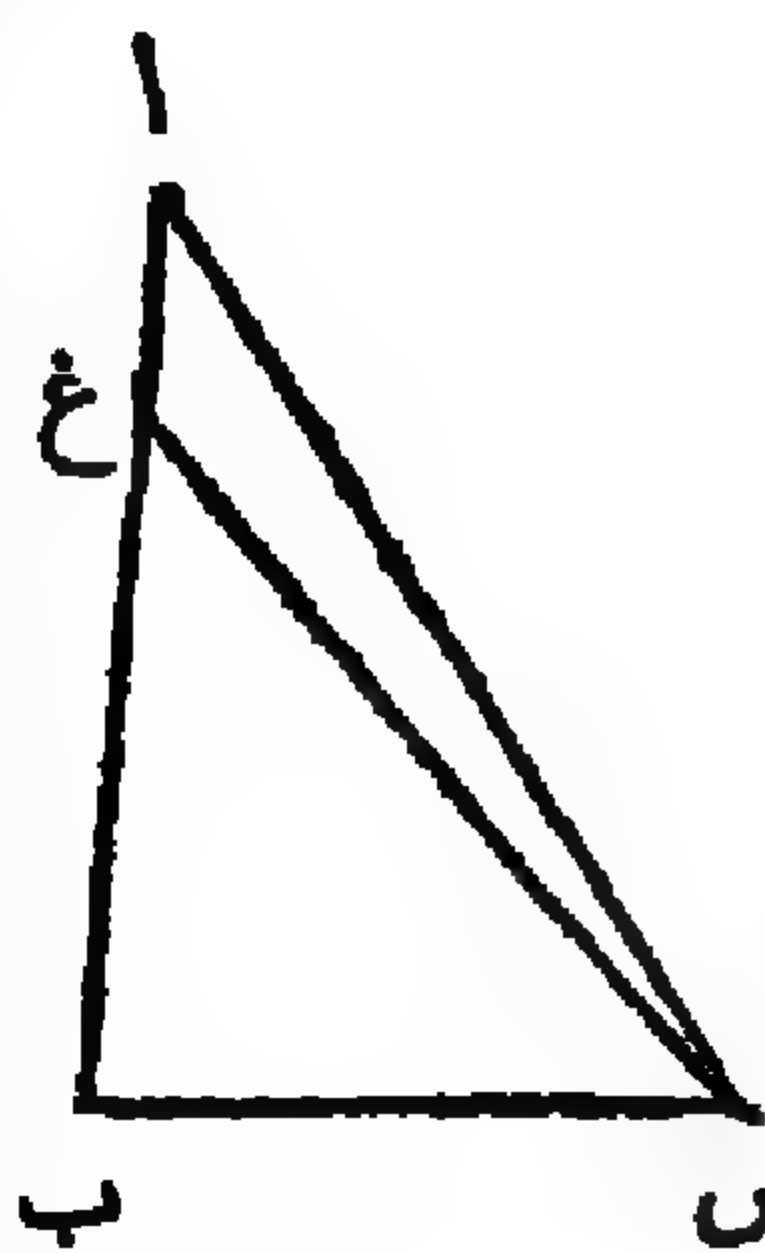
اذا عدل ضلعاً مثلث ضلعي مثلث آخر ولكن كانت قاعدة احدها  
اطول من قاعدة الآخر فالزاوية الكبرى هي لذي القاعدة الطولى



ليكن ا ب س د ي ف مثلثين  
ولنفرض ان ضلعين من الواحد ا ب  
ا س عدلا ضلعين من الاخر د ي  
د ف ولكن القاعدة ب س اطول من  
القاعدة ي ف فتكون الزاوية ب ا س  
اكبر من الزاوية ي د ف والا فاما ان  
تعدها او تكون اصغر منها فالزاوية ب ا س لا تعدل ي د ف لانه عند ذلك كانت  
القاعدة ب س تعدل القاعدة ي ف (ق ٤ ك ١) وقد فرض ب س الاكبر ولا يمكن  
ان تكون اصغر منها لانه عند ذلك كانت القاعدة ب س اصغر من ي ف (ق ٤ ك ٢)  
ك ١) وقد فرض ب س اكبر وقد تبرهن انها لا تعدها فبالضرورة تكون الزاوية  
ب ا س اكبر من الزاوية ي د ف

### القضية السادسة والعشرون

اذا عدلت زاويتان من مثلث زاويتين من مثلث آخر اي كل واحدة  
عدلت نظيرها. وضلع من الواحد عدل ضلعا من الاخر ان كانا  
المتواليين للزوايا المتساوية او المتقابلين لها فالضلعان الاخران من  
الواحد يعدلان الاخرين من الآخر والزاوية الثالثة من الواحد تعدل  
الثالثة من الآخر



ليكن ا ب س د ي ف مثلثين  
والزاوية ا ب س فلتعدل د ي ف  
والزاوية ب س ا فلتعدل ي ف د  
والضلع ب س فليعدل ي ف وهما  
المتواليان للزوايا المتساوية  
فالضلعان الاخران من الواحد ف  
ا ب ا س يعدلان الاخرين من الاخر د ي ف والزاوية الثالثة من الواحد



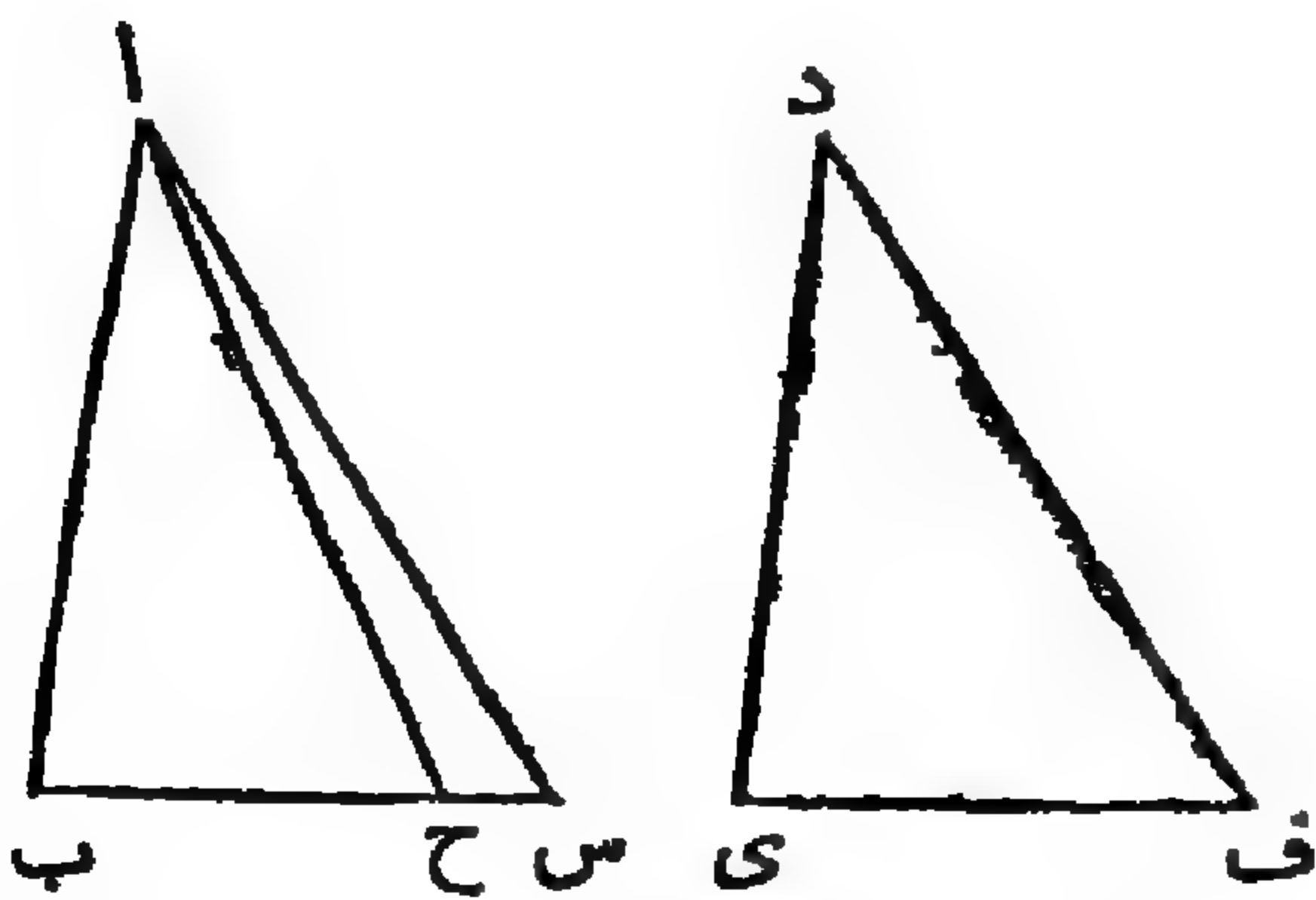
ب ا س تعدل الثالثة من الاخرى د ف

وان لم يكن ا ب و دى متساويين فبالضرورة يكون احدهما اطول من الاخر  
فلنفرض ا ب الاطول ولنصل منه ب غ حتى يعدل دى (ق ٢ ك ١) ولنرسم غ س  
فمن حيث ان غ ب يعدل دى وب س يعدل دى ف فالضلعان غ ب ب س  
يعدلان الضلعين دى دى ف كل واحد يعدل نظيره والزاوية غ ب س تعدل  
دي ف فالقاعدة غ س تعدل القاعدة د ف (ق ٤ ك ١) والمثلث غ ب س يعدل  
المثلث دى ف وبقيت الزوايا من الواحد تعدل بقية الزوايا من الاخر كل واحدة  
تعدل نظيرها اي التي تقابلها الاضلاع المتساوية. فالزاوية غ س ب تعدل دى  
وقد فرض ان دى ف تعدل ا س ب فالزاوية غ س ب ايضا تعدل ا س ب اي  
الاصغر يعدل الاكبر وذاك محال فلا يمكن ان يكون ا ب و دى غير متساويين  
اي هما متساويان وب س يعدل دى ف فالضلعان ا ب ب س يعدلان الضلعين  
دى دى ف والزاوية ا ب س تعدل دى ف فالقاعدة ا س تعدل القاعدة د ف  
(ق ٤ ك ١) والزاوية ب ا س تعدل الزاوية دى ف

ثم لنفرض مساواة الضلعين اللذين يقابلان الزوايا المتساوية في كلا المثلثين  
يعني ان ا ب يعدل دى ف على هذا المفروض ايضا لنا مساواة بقية الاضلاع يعني  
ا س يعدل دى ف وب س يعدل دى ف والزاوية الثالثة من الواحد ب ا س

تعدل الثالثة من الاخرى د ف

فان لم يكن ب س وي ف  
متساويين فليكن ب س اطولها.  
افصل منه ب ح حتى يعدل دى  
ف (ق ٢ ك ١) وارسم ا ح فمن  
حيث ان ب ح يعدل دى ف وا  
ب يعدل دى ف فالضلعان ا ب

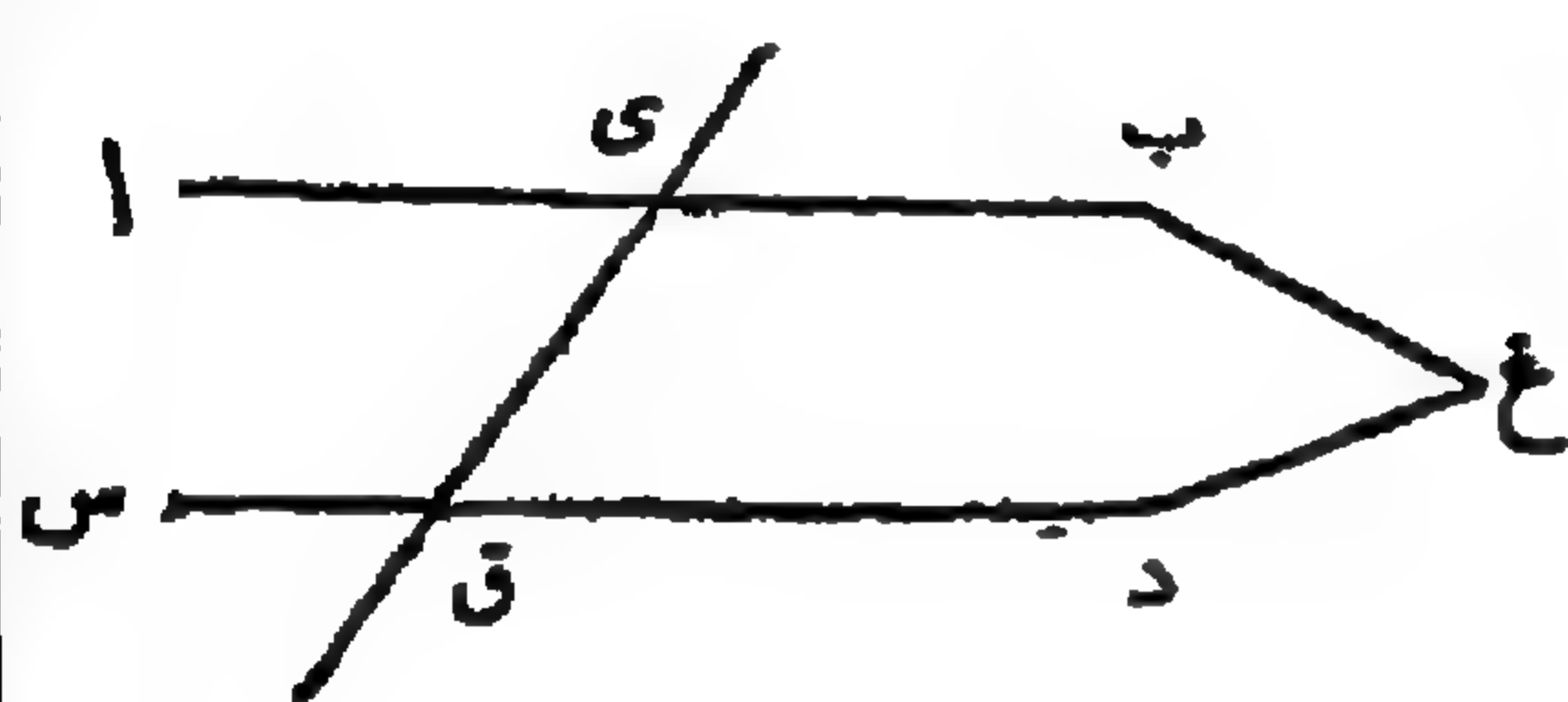


ب ح يعدلان الضلعين دى دى ف والزاوية ا ب ح تعدل دى ف فالقاعدة ا ح  
تعدل القاعدة د ف (ق ٤ ك ١) والمثلث ا ب ح يعدل المثلث دى ف وبقيت  
الزوايا ايضا متساوية اي التي تقابلها الاضلاع المتساوية فالزاوية ب ح ا تعدل  
دى ف ولكن دى ف د تعدل ب س ا فالزاوية ب س ا تعدل ب ح ا اي الزاوية

المحارجة اح ب تعدل الداخلة المتقابلة اس ب وذلك لا يمكن (ق ١٦ ك ١) فلا  
يمكن ان يكون ب س وى ف غير متساويين اى هما متساويان و اب يعدل دى  
فالضلعان اب ب س يعدلان دى وى ف والزوايا اب س تعدل دى ف  
فالقاعدة اش تعدل القاعدة د ف والزوايا الثالثة ب اس تعدل الثالثة دى د ف

### القضية السابعة والعشرون

اذا وقع خطٌ مستقيم على خطين آخرين مستقيمين وجعل الزاويتين  
المتبادلتين متساويتين فالخطان متوازيان



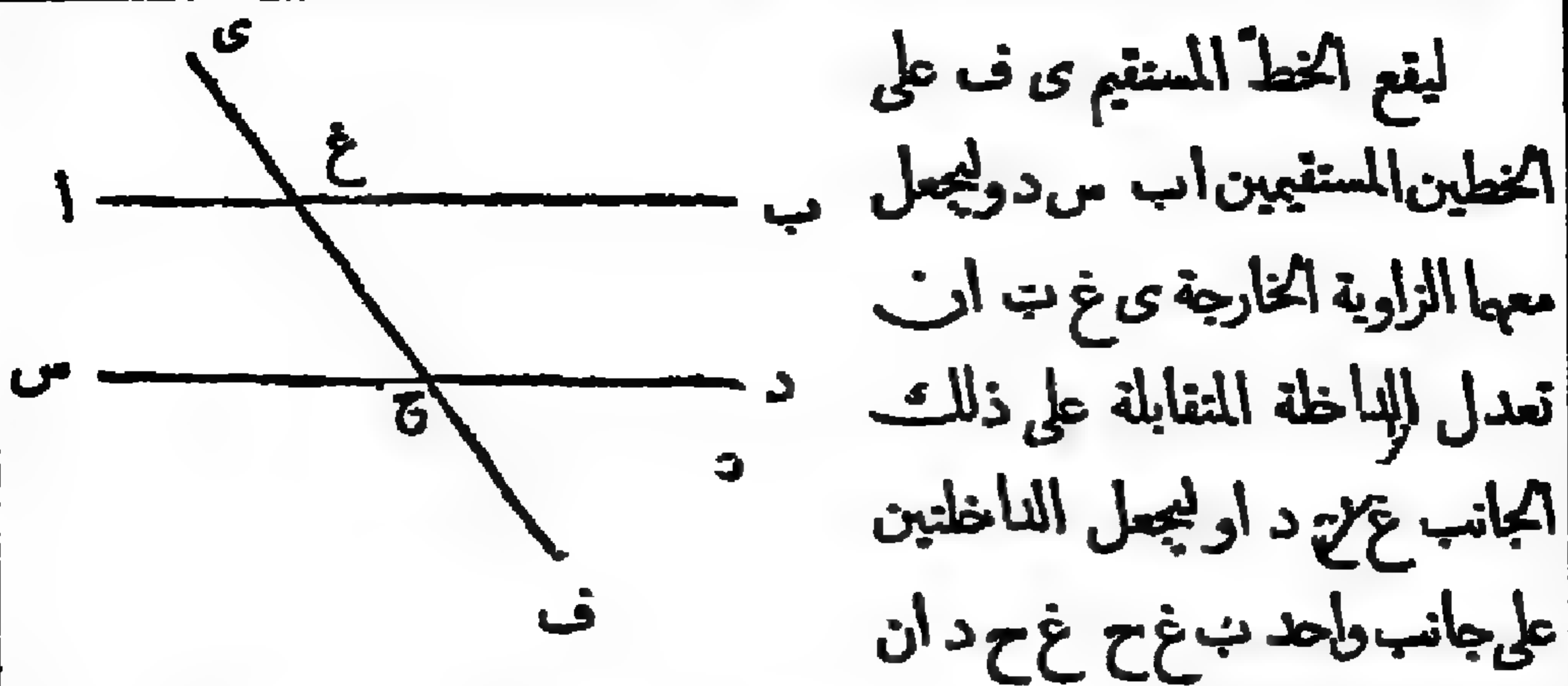
ليقع الخط المستقيم وى ق على  
الخطين المستقيمين اب س د  
وليجعل معها الزاويتين المتبادلتين  
اى ق وى ق د متساويتين فالخطان  
اب س د متوازيان

ولا فيلتقيان اذا اخرجنا. فلنفرض النقطتهما في النقطة غ فيكون غ وى ق مثلثا  
وزاوية المحارجة اى ق تكون اكبر من الداخلة المتقابلة وى ق غ (ق ١٦ ك ١) وقد  
فرض مساوئها فلا تكون احدهما اكبر من الاخرى فلا يلتقي اب و س د اذا اخرجنا  
الى جهة ب ود وهكذا يبرهن انهما لا يلتقيان اذا اخرجنا الى جهة ا وس فهما اذا  
متوازيان (حد ٢٠)

### القضية الثامنة والعشرون

اذا وقع خطٌ مستقيم على خطين مستقيمين واحداث زاوية خارجة  
تعدل الداخلة المتقابلة على جانب واحد منه او داخليتين على جانب  
واحد منه تعدلان معا قائمتين فالخطان متوازيان

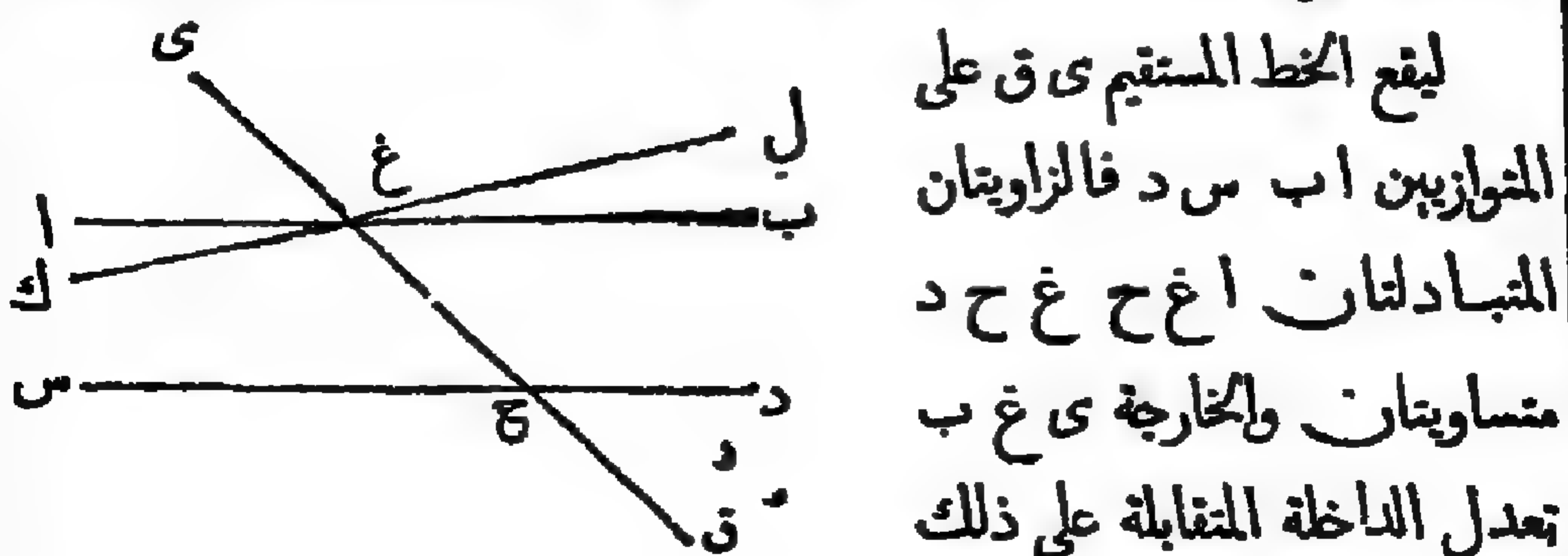




تعدلا قائمتين فالخطان اب س د متوازيان. فمن حيث ان ي غ ب تعدل غ ح د  
وتعدل ايضا غ ح (ق ١٥ ك ١) فالزاوية ا غ ح تعدل غ ح د وهما متبادلتان  
ولذلك (ق ٢٧ ك ١) اب يوازي س د وايضا من حيث ان ب غ ح غ ح د تعدلان  
قائمتين حسب المفروض واغ ح ب غ ح تعدلان قائمتين (ق ١٢ ك ١) فالزاويتان  
ب غ ح ا غ ح تعدلان ب غ ح غ ح د ا طرح المشتركة ب غ ح فالباقية ا غ ح  
تعدل الباقية غ ح د وهما متبادلتان. ولذلك اب وس د متوازيان  
فرغ. اذا ان كان خطان مستقيمان عموديين على خط مستقيم ثالث فهما متوازيان

### القضية التاسعة والعشرون

اذا وقع خط مستقيم على خطين مستقيمين متوازيين فالزاويتان  
المتبادلتان الحادثتان متساويتان والزاوية الخارجة تعدل الداخلة  
المتقابلة على جانب واحد والداخلتان على جانب واحد تعدلان قائمتين



الجانب غ ح د والداخلتان على جانب واحد ب غ ح غ ح د تعدلان قائمتين  
فان لم تكن ا غ ح غ ح د متساويتين فليرم الخط ك غ حتى ان ك غ ح تعدل  
غ ح د واخرج ك غ الى ل فالخط ك ل يوازي س د (ق ٢٧ ك ١) و اب ايضا

يوازي س د فقد رُسم خطان مستقيمان مارَّان بنقطة واحدة غ يوازيان س د من غير ان بتطابقا وذلك محال (اولية ١١) فلا تكون الزاويتان ا غ ح غ ح د غير متساويتين اي هما متساويتان. والزاوية ي غ ب تعدل ا غ ح (ق ١٥ ك ١) ولذلك ي غ ب ايضا تعدل غ ح د (اولية اولي) اضف اليها ب غ ح فالزاويتان ي غ ب ب غ ح تعدلان ب غ ح غ ح د ولكن ي غ ب ب غ ح تعدلان قائمتين (ق ١٢ ك ١) ولذلك ب غ ح غ ح د تعدلان قائمتين ايضا

فرع اول. اذا جعل الخطان كل س د مع ي ق الزاويتين ك غ ح غ ح س معا اصغر من قائمتين فالخطان ك غ س ح يلتقيان على ذلك الجانب من ي ق الذي فيه كانت الزاويتان اصغر من قائمتين

والا فها متوازيان. او يلتقيان على الجانب الاخر من الخط ي ق ولكنها غير متوازيين. والا لكانت ك غ ح غ ح س معا تعدلان قائمتين ولا يلتقيان على الجانب الاخر من الخط ي ق والا لكانت ل غ ح غ ح د زاويتين من زوايا مثلث واصغر من قائمتين وذلك لا يمكن لان الاربع زوايا ك غ ح ح غ ل س ح غ غ ح د تعدل اربع زوايا قائمة (ق ١٢ ك ١) واثنان منها اي ك غ ح غ ح س هما بالمفروض اصغر من قائمتين فبالضرورة الاخران ل غ ح غ ح د اكبر من قائمتين فمن حيث ان كل س د غير متوازيين ولا يلتقيان من جهة ل ود فبالضرورة يلتقيان اذا اخرجنا الى جهة ك و س

فرع ثان. اذا كان ب غ ح قائمة تكون غ ح د ايضا قائمة فالخط العمودي على احد خطين متوازيين هو عمودي على الاخر ايضا

فرع ثالث. من حيث ان ا غ ي = ب غ ح ود ح ق = س ح غ تكون الاربع الزوايا الحادة ا غ ي ب غ ح س ح غ د ح ق متساوية. وهكذا الاربع الزوايا المنفرجة ي غ ب ا غ ح غ ح د س ح ق هي ايضا متساوية. واذا اضيفت احدى الحادّات الى احدى المنفرجات فالمجموع يعدل قائمتين

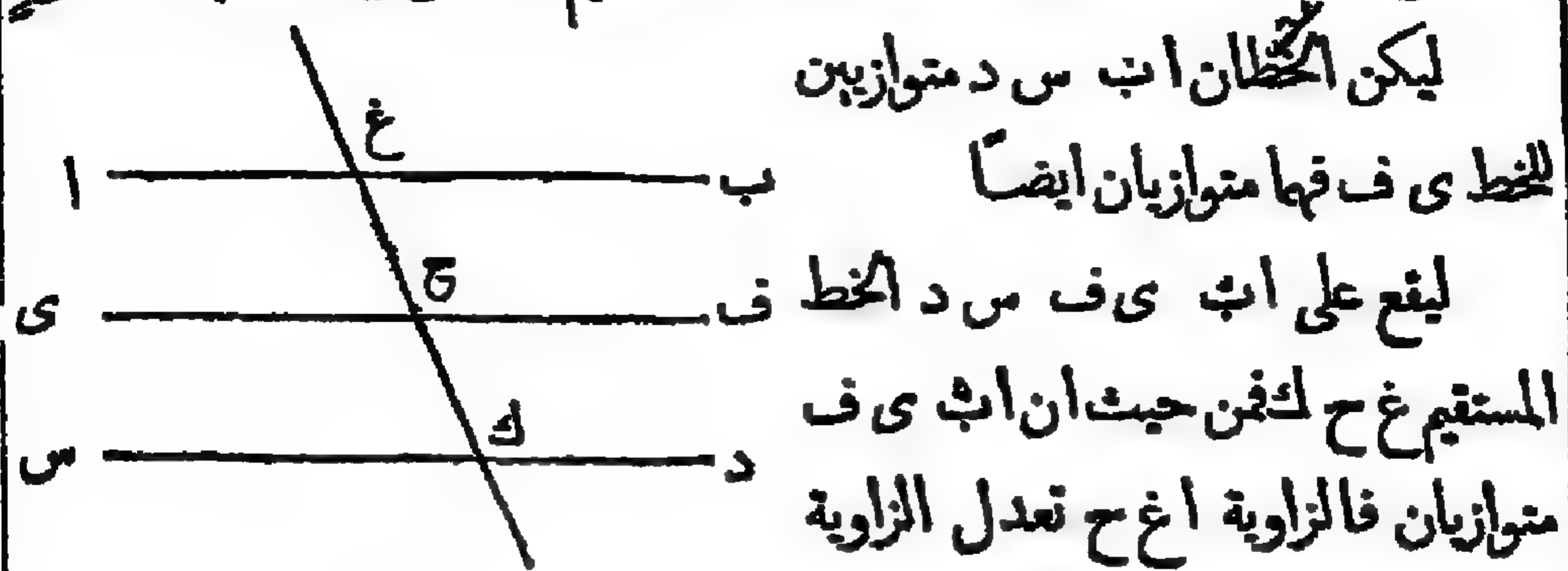
تعليقة. الزوايا المذكورة لها اسماء مختلفة باعتبار نسبة بعضها الى بعض فالزاويتان ب غ ح غ ح د هما الداخلتان على جانب واحد وكذلك ا غ ح غ ح س. والزاويتان ا غ ح غ ح د هما الداخلتان المتبادلتان او المتبادلتان فقط. وكذلك ب غ ح غ ح س. والزاويتان ي غ ب غ ح د هما الخارجة والداخلية وكذلك ي غ ا غ ح س



والزاويتان ي غ ب س ح ق هما الخارجتان المتبادلتان وكذلك ا غ ي د ح ق

### القضية الثلثون

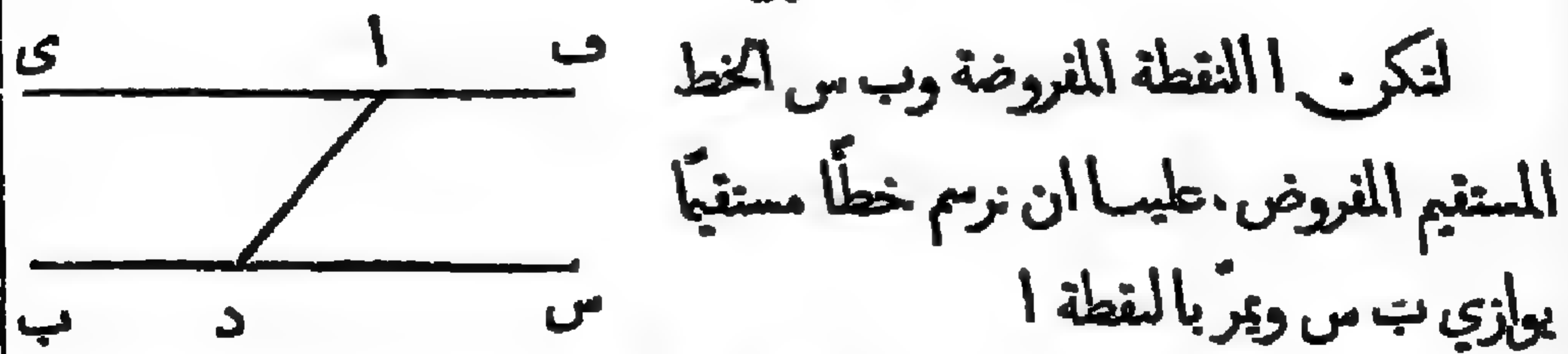
الخطوط المستقيمة المتوازية لخط واحد مستقيم هي متوازية بعضها لبعض



غ ح ف (ق ٢٩ ك ١) ومن حيث ان ي ف س د متوازيان فالزاوية غ ح ف  
تعدل غ ح د (ق ٢٩ ك ١) وقد تبرهن ان ا غ ح تعدل غ ح ف فلذلك ا غ ح  
تعدل غ ح د ايضاً وهما متبادلتان فالخط ا ب يوازي الخط س د (ق ٢٧ ك ١)

### القضية الحادية والثلاثون

علينا ان نرسم خطاً مستقيماً يمر في نقطة مفروضة ويوازي خطاً مستقيماً  
مفروضاً

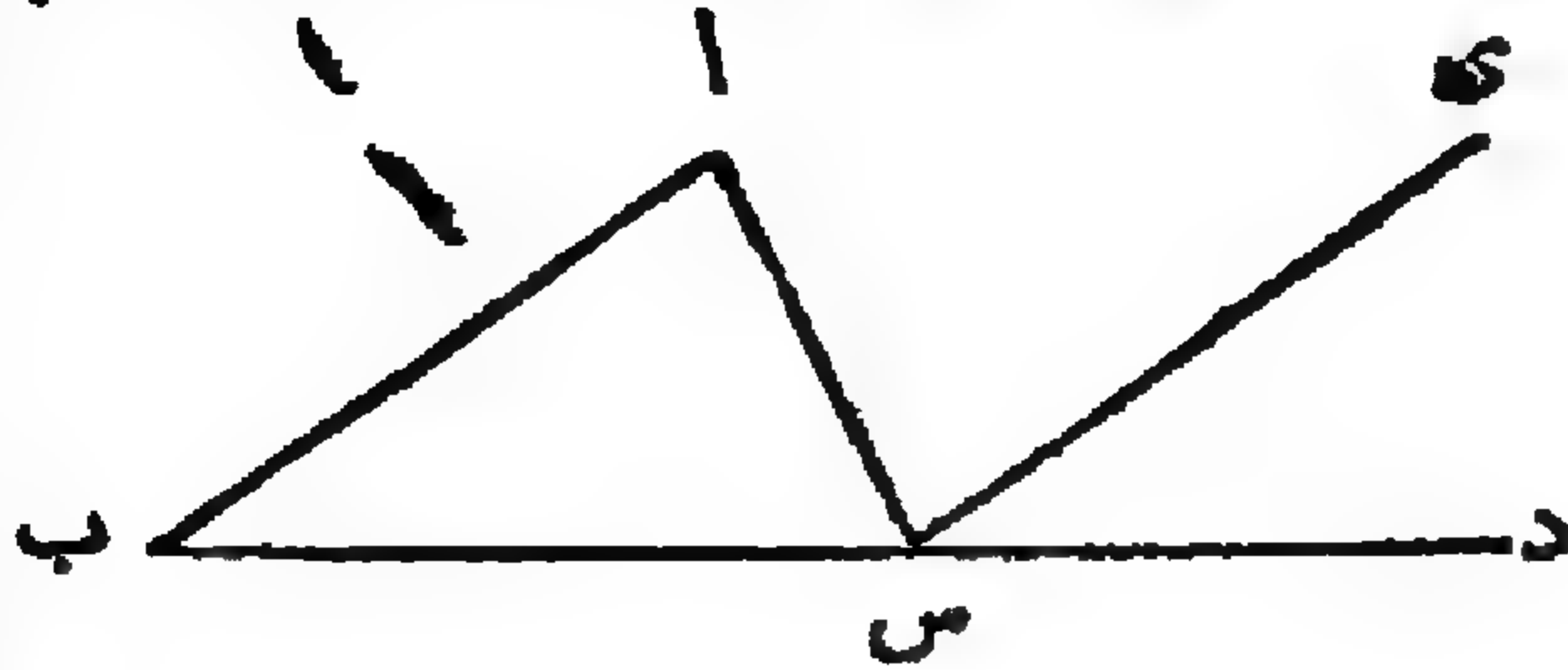


عين ا بة نقطة شئت في ب س كالنقطة د مثلاً، ارسم ا د وفي النقطة ا من الخط  
ا د ارسم الزاوية د ا ي واجعلها ان تعدل الزاوية ا د س (ق ٢٢ ك ١) واخرج  
ي الى ف

فمن حيث ان الخط المستقيم ا د يلاقي الخطين المستقيمين ي ف ب س ويجعل  
معها الزاويتين المتبادلتين ي ا د س متساويتين فالخط ي ف يوازي ب س  
(ق ٢٧ ك ١) وقد رسم حتى يمر في النقطة ا المفروضة

### القضية الثانية والثلاثون

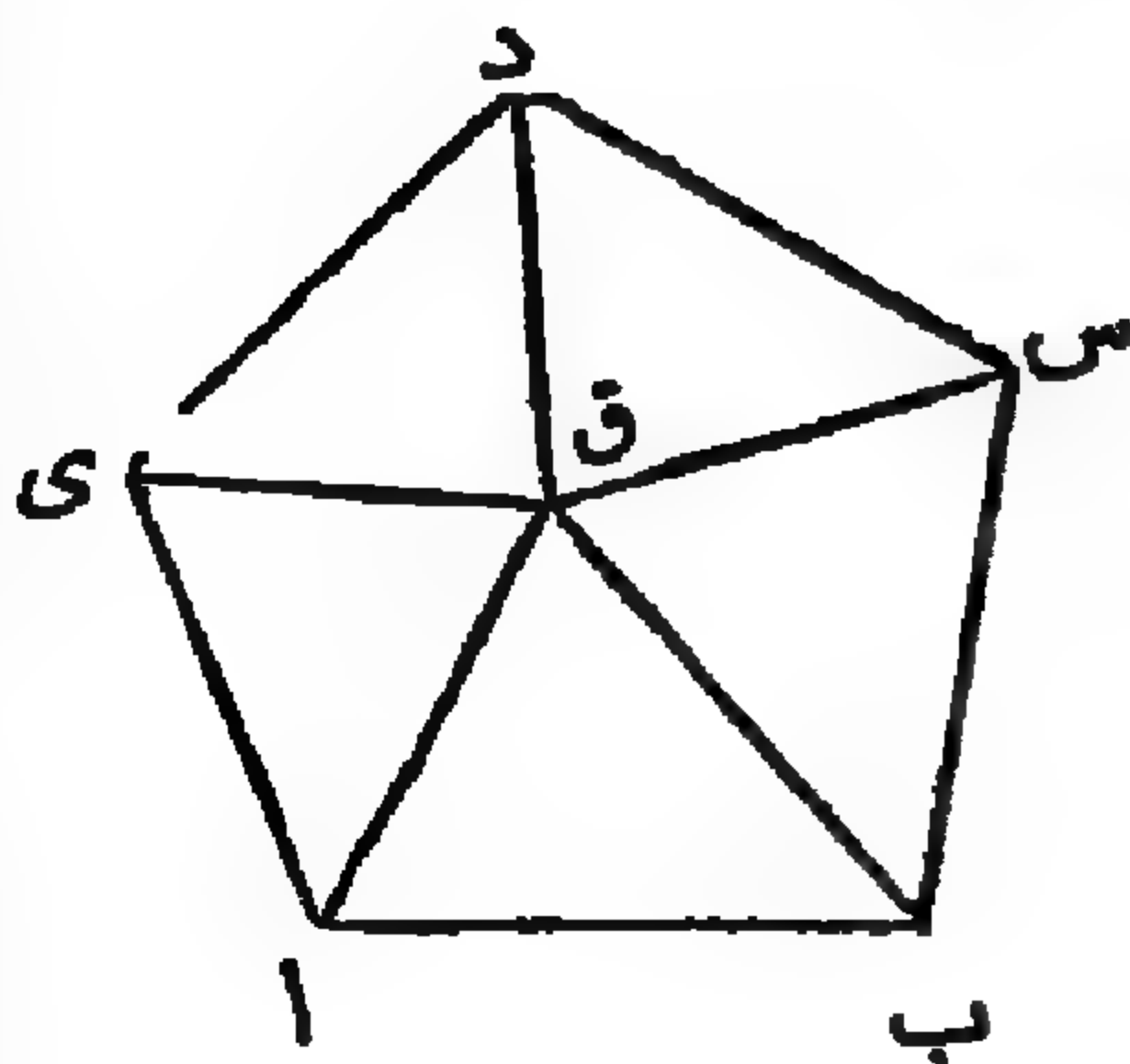
إذا أخرج ضلع من اضلاع مثلث فالزاوية الخارجة تعدل الداخليتين المتقابلتين. والزوايا الثلاث الداخلة من كل مثلث تعدل قائمتين.



ليكن ا ب س مثلثا  
ويخرج منه الضلع ب س الى د  
فالزاوية الخارجة اس د تعدل  
الداخليتين المتقابلتين س ا ب

ا ب س والزوايا الثلاث الداخلة ا ب س ب س ا س ا ب معاً تعدل قائمتين من النقطة س ارسم الخط المستقيم س ي حتى يوازي ا ب (ق ٢١ ك ١) فمن حيث ان الخط ا س يلاقي الخطين المتوازيين ا ب س ي فالزاويتان المتبادلتان ا س ي ب ا س متساويتان (ق ٢٠ ك ١) ومن حيث ان ب د يلاقي المتوازيين ا ب س س ي فالزاوية الخارجة س د تعدل الداخلة المتقابلة ا ب س وقد تبهرن ان ا س ي تعدل ب ا س فكل الخارجة اس د تعدل الداخليتين المتقابلتين ب ا س ا ب س. اضع الى هذه الزوايا الزاوية ا س ب فالزاويتان ا س د ا س ب تعدلان الثلاث زوايا ا ب س ب ا س ا س ب ولكن ا س د ا س ب معاً تعدلان قائمتين (ق ١٣ ك ١) فالزوايا الثلاث ا ب س ب ا س ا س ب ايضاً تعدل قائمتين

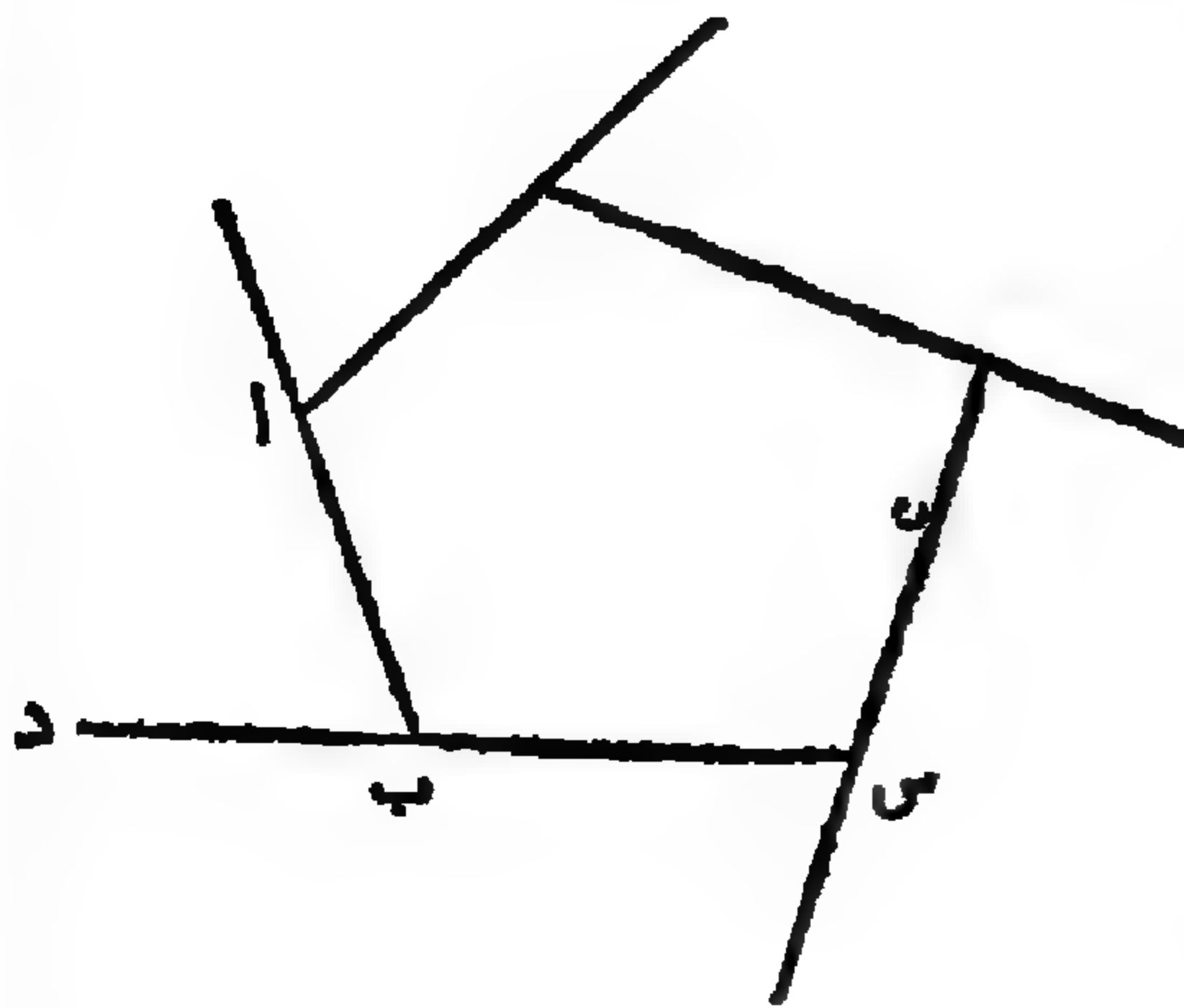
فرع اول. جميع الزوايا الداخلة في كل شكل ذي اضلاع مستقيمة تعدل من الزوايا القائمة ما يماثل مضاعف عدد اضلاع الشكل الا اربع زوايا قائمة



لان كل شكل ذي اضلاع مستقيمة مثل ا ب س د ي ينقسم الى مثلثات تماثل عدد اضلاعه برسم خط مستقيم من كل زاوية الى نقطة داخلة مثل ق فحسب هذه القضية زوايا كل مثلث تعدل قائمتين فجميع زوايا جميع المثلثات يعدل قائمتين في عدد اضلاع الشكل ولكن الزوايا عدد

ق تعدل اربع زوايا قائمة (ق ١٥ ك ١ فرع ٢) فزوايا الشكل تعدل قائمتين في عدد





اضلاع الشكل الأربعة زوايا قائمة  
فرع ثانٍ. مجموع الزوايا  
الخارجية من كل شكل ذي  
اضلاع مستقيمة يعدل اربع  
زوايا قائمة لان كل زاوية  
داخلة ا ب س مع الخارجة  
المتوالية ا ب د تعدل قائمتين  
(ق ١٢ ك ١) فجميع الداخلة

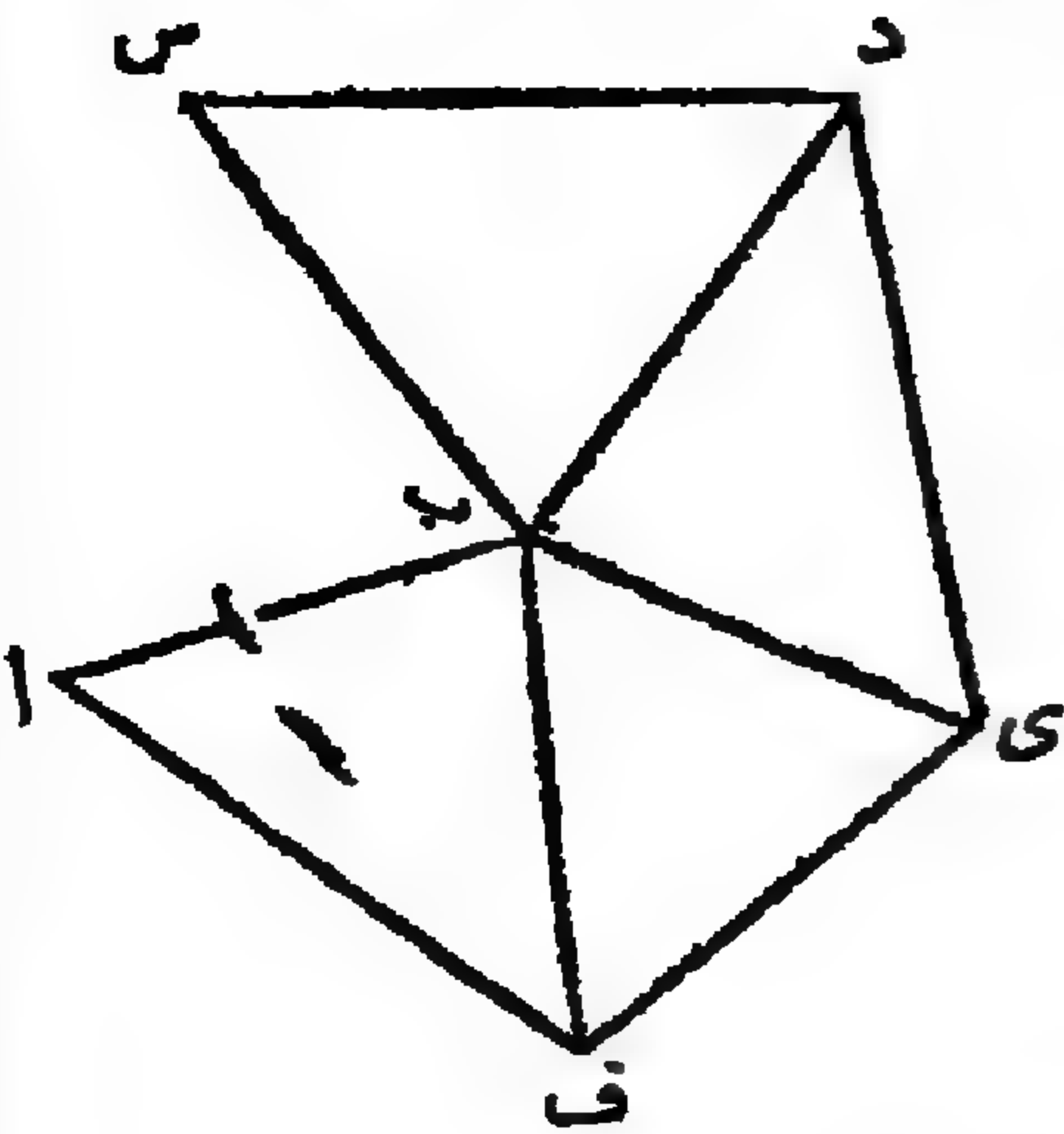
مع جميع الخارجة تعدل قائمتين في عدد اضلاع الشكل والداخلة تعدل قائمتين في  
عدد اضلاع الشكل الأربعة قائمات حسب الفرع الاول فالخارجة تعدل اربع قائمات  
فرع ثالث. اذا فرضت زاويتان من زوايا مثلث او مجموعهما فتستعمل الثالثة  
بطرح المجموع من قائمتين

فرع رابع. اذا عدلت زاويتان من مثلث زاويتين من مثلث آخر فالثالثة من  
الواحد تعدل الثالثة من الاخر والمثلثان متساويا الزوايا

فرع خامس. لا يكون في مثلث اكثر من زاوية واحدة قائمة. لانه لو كانت له  
قائمتان لكانت الثالثة لاشيء. وبالاخرى لا يكون لمثلث اكثر من زاوية واحدة منفرجة  
فرع سادس. في كل مثلث قائم الزاوية مجموع الحادتين يعدل قائمة  
فرع سابع. من حيث ان كل مثلث متساوي الاضلاع هو متساوي الزوايا ايضا  
(فرع ق ٥ ك ١) فكل زاوية من زواياه تعدل ثلث قائمتين او ثلثي قائمة

فرع ثامن. مجموع زوايا ذي اربعة اضلاع يعدل قائمتين في ٤ - ٢ اي اربع  
قائمات فاذا كانت زواياه متساوية تكون كل واحدة قائمة وذلك يؤيد الحد الخامس  
والعشرين والسادس والعشرين

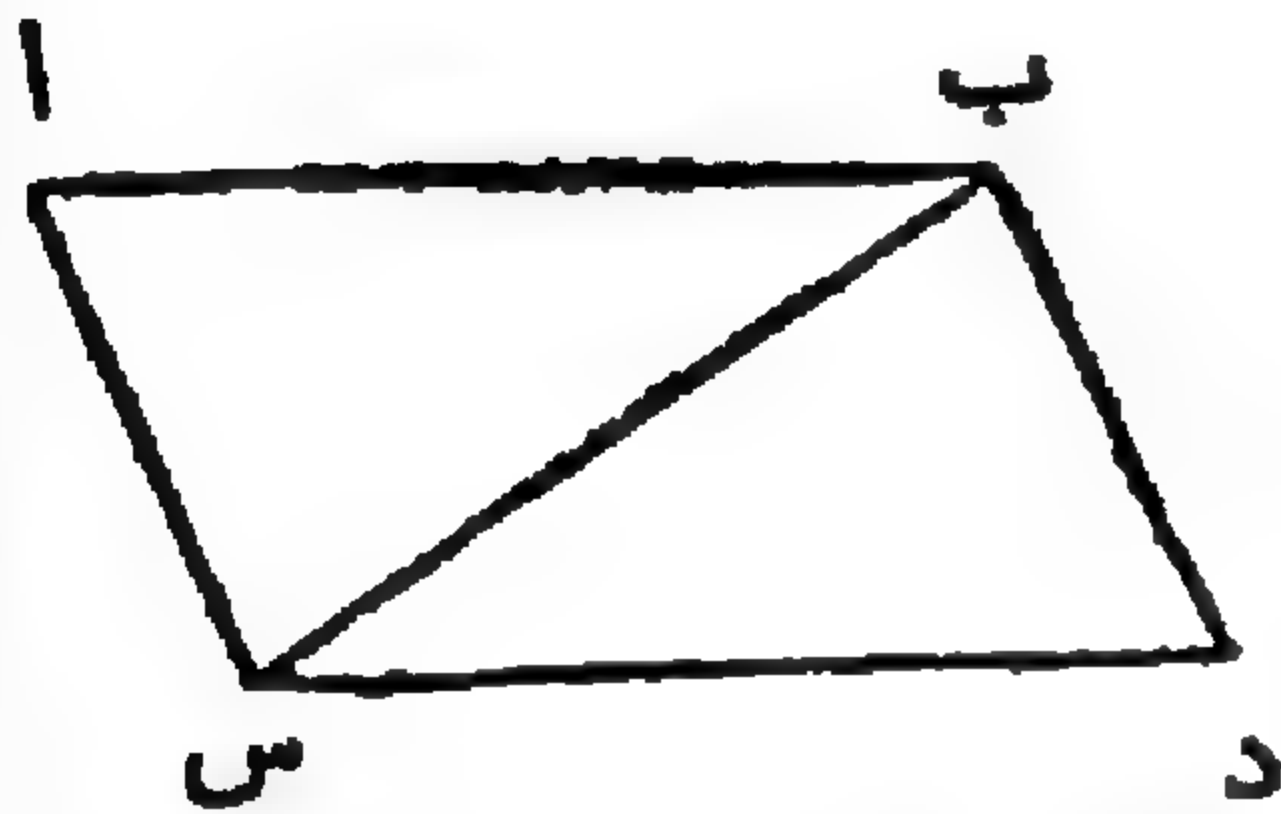
فرع تاسع. مجموع زوايا ذي خمسة اضلاع يعدل قائمتين في ٥ - ٢ اي ست  
قائمات فاذا كانت زواياه متساوية تكون كل واحدة خمس ست قائمات اي ٥ قائمة  
فرع عاشر. مجموع زوايا ذي ستة اضلاع يعدل ٢ × (٦ - ٢) اي ثمان قائمات  
فاذا كانت زواياه متساوية تكون كل واحدة سدس ثمان قائمات اي ٤ قائمة



تعليقة. متى استعمل الفرع الاول في اشكال كثيرة الاضلاع لها زوايا متناخلة مثل ا ب س فيجب ان تحسب كل متناخلة اكبر من قائمتين واذا رسم ب د ب ي ب ف ينقسم الشكل الى اربع مثلثات لها ثنائي قائمات اي قائمتان في عدد الاضلاع الا اثنين

### القضية الثالثة والثلاثون

الخطان المستقيمان الموصولان بين اطراف خطين مستقيمين متوازيين متساويين هما متوازيان ومتساويان



ليكن ا ب س د خطين مستقيمين متساويين متوازيين وليوصل بين اطرافها بالخطين المستقيمين ا س ب د فهذان الخطان ايضا متوازيان ومتساويان

ارسم ب س فمن حيث ان ب س يلاقي الخطين المتوازيين ا ب س د فالزاويتان المتبادلتان ا ب س ب س د هما متساويتان (ق ٢٩ ك ١) ومن حيث ان ا ب س د يعدل س د والخط ب س مشترك بين المثلثين ا ب س ب س د فالضلعان ا ب ب س يعدلان الضلعين ب س س د والزاوية ا ب س تعدل ب س د فالقاعدة ا س تعدل القاعدة ب د (ق ٤ ك ١) وبقيت الزوايا من الواحد تعدل بقيت الزوايا من الاخر اي ا س ب تعدل س ب د. ومن حيث ان الخط ب س يلاقي الخطين ا س ب د ويجعل الزاويتين المتبادلتين ا س ب ب س د متساويتين فالخطان ا س ب د متوازيان (ق ٢٧ ك ١) وقد تبرهن انها متساويان فرع اول. في كل شكل ذي اربعة اضلاع اذا كان ضلعان متقابلان متوازيين ومتساويين يكون الضلعان الاخران كذلك ويكون الشكل ذا اضلاع متوازية فرع ثان. كل ذي اربعة اضلاع ضلعاه المتقابلان متساويان هو ذو اضلاع متوازية

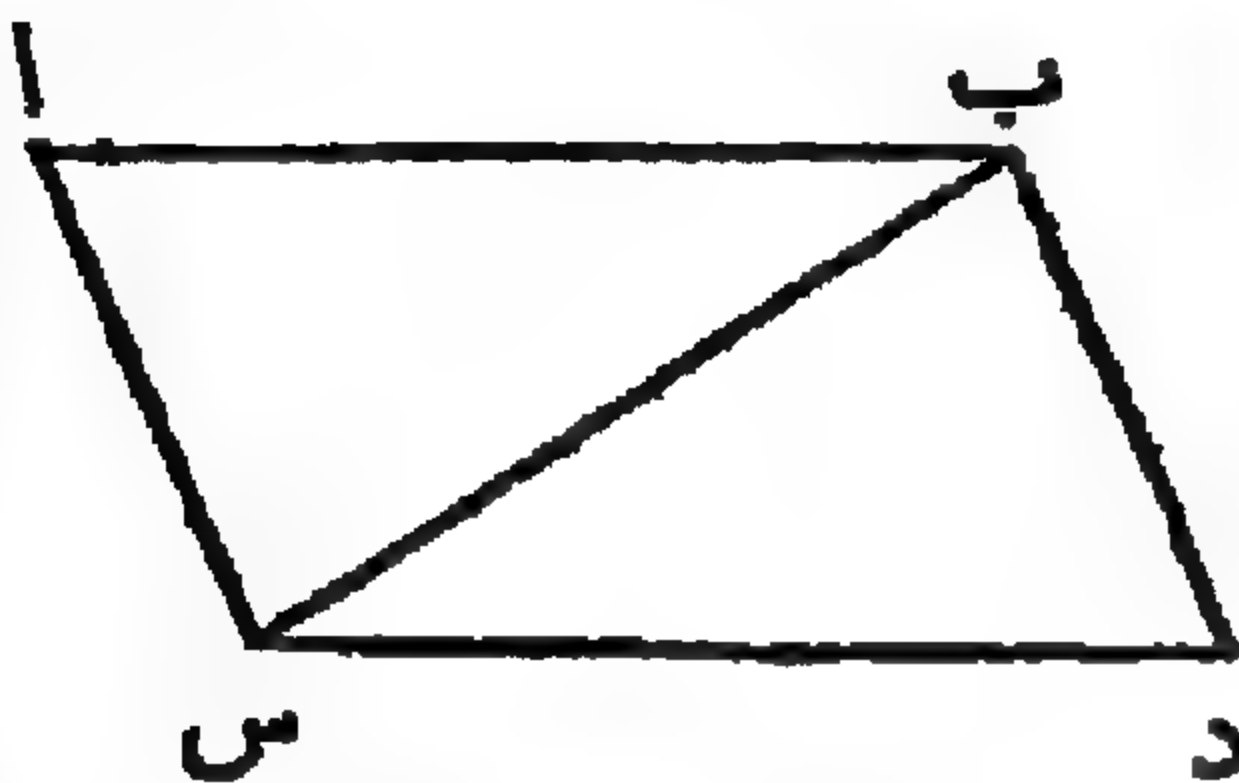


فرع ثالث. في كل ذي اربعة اضلاع اذا كانت الزوايا المتقابلة متساوية تكون  
الاضلاع المتقابلة متساوية ومتوازية

### القضية الرابعة والثلاثون

في شكل ذي اضلاع متوازية الاضلاع المتقابلة والزوايا المتقابلة هي  
متساوية. والقطر ينصفه اي يقسمه الى جزئين متساويين

ليكن ا ب د س متوازي الاضلاع وب س قطره فالاضلاع المتقابلة والزوايا  
المتقابلة متساوية والقطر ب س ينصفه



فمن حيث ان الخط ب س يلاقي  
الخطين المتوازيين ا ب س د فالزاويتان  
المبادلتان ا ب س ب س د متساويتان

(ق ٢٩ ك ١) وايضاً لان ب س يلاقي المتوازيين ا س ب د فالمبادلتان ا س ب  
س ب د متساويتان (ق ٢٩ ك ١) ففي المثلثين ا ب س ب س د زاويتان من الواحد  
تعدلان زاويتين من الاخر والضلع ب س مشترك بين المثلثين فالضلعان الاخران  
من الواحد يعدلان الضلعين الاخرين من الآخر والزاوية الثالثة من الواحد تعدل  
الثالثة من الاخر (ق ٢٦ ك ١) اي ا ب يعدل س د و ا س يعدل ب د والزاوية  
ب ا س تعدل س د ب ولان الزاوية ا ب س تعدل ب س د و ا س ب تعدل  
س ب د فكل الزاوية ا ب د تعدل كل الزاوية ا س د وقد تبهرن ان ب ا س  
تعدل ب د س فالزوايا المتقابلة والاضلاع المتقابلة من ذي اضلاع متوازية هي  
متساوية وايضاً القطر ينصفه فلان ا ب يعدل س د وب س مشترك بين المثلثين  
والزاوية ا ب س تعدل ب س د فالمثلثان متساويان (ق ٤ ك ١) وقد انتصف  
الشكل بالقطر

فرع اول. خطان متوازيان بين خطين متوازيين متساويان

فرع ثان. خطان متوازيان هما على بعد واحد بعضهما من بعض ابداً

فرع ثالث. مجتمع زاويتين متواليتين من ذي اضلاع متوازية يعدل قائمتين

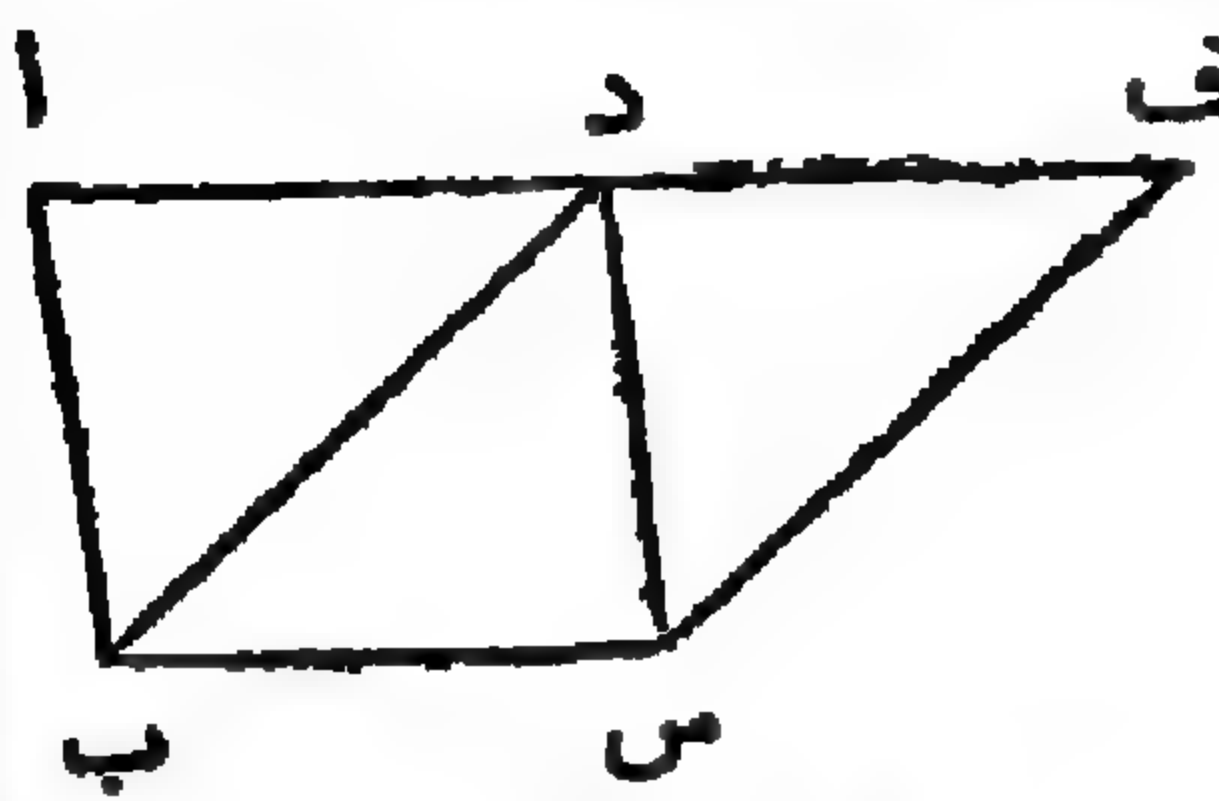
القضية الخامسة والثلاثون

اشكال ذات اضلاع متوازية على قاعدة واحدة وبين خطين متوازيين

هي متساوية

انظر الشكل الثاني والثالث

ليكن ا ب س د وى ب س ف شكليين متوازيي الاضلاع على قاعدة واحدة



ب س وبين خطين متوازيين ا ف ب س

فالشكل ا ب س د يعدل الشكل

ى ب س ف. اذا انتهى الضلعان ا د د ف

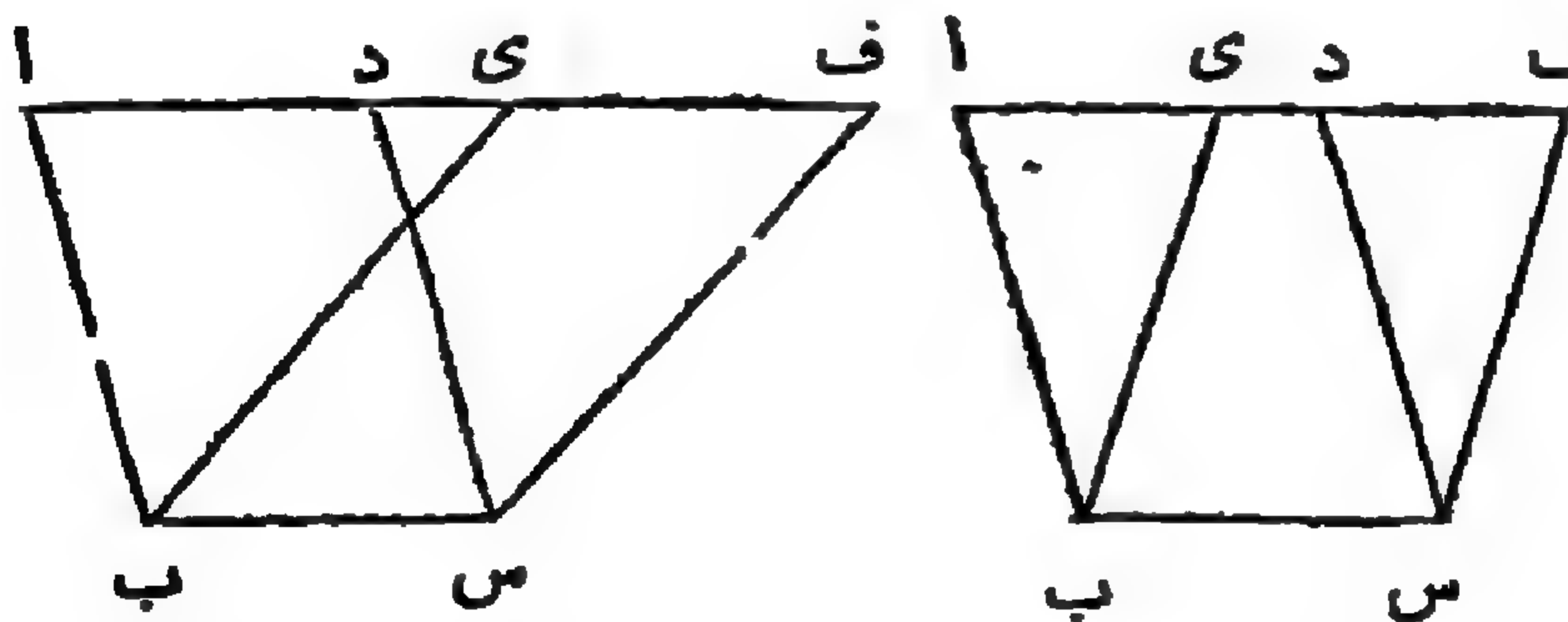
من الشكليين ا ب س د د ب س ف

المتقابلان للقاعدة ب س في نقطة واحدة د فالامرو واضح ان كل واحد من الشكليين

انما هو مضاعف المثلث ب د س (ق ٢٤ ك ١) واذا ذاك فهما متساويان ولن لم يتبق

في نقطة واحدة الضلعان ا د ي ف من الشكليين ا ب س د ي ب س ف المتقابلان

للقاعدة ب س



فم من

حيث ان

ا ب س د

متوازيي

الاضلاع

فالضلع ا د يعدل ب س (ق ٢٤ ك ١) ولهذا السبب ايضا ي ف يعدل ب س

ولذلك ا د يعدل ي ف (اولية اولي) ودى مشترك فالكل او البقية اى يعدل

الكل او البقية د ف (اولية ثانية وثالثة) و ا ب يعدل د س فالضلعان ي ا ا ب

يعدلان الضلعين ف د د س كل واحد يعدل نظيرة والزوايا الخارجة ف د س

تعدل الداخلة المتقابلة ي ا ب (ق ٢٤ ك ١) فالقاعدة ي ب تعدل القاعدة ف س

والمثلث ي ا ب يعدل المثلث ف د س (ق ٤ ك ١) اطرح المثلث ف د س من

الشكل ا ب س ف واطرح منه ايضا ي ا ب فتكون البقايا متساوية (اولية ٣) اى

الشكل ا ب س د يعدل الشكل ي ب س ف

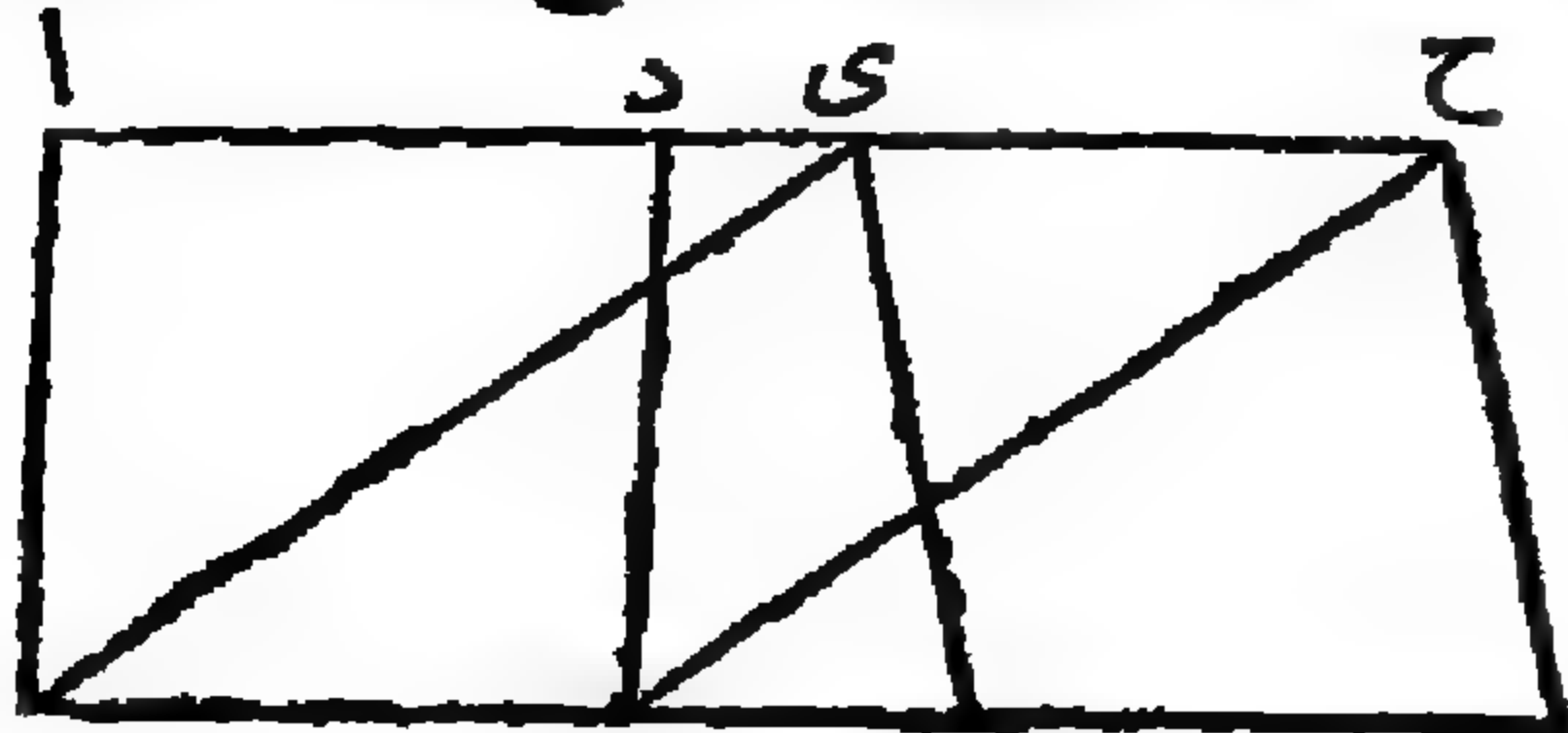


### القضية السادسة والثلاثون

اشكال ذات اضلاع متوازية على قواعد متساوية وبين خطين

متوازيين هي متساوية

ليكن  $ا ب س د$  و  $ي ف غ ح$  شكلين متوازيين الاضلاع على قاعدتين



متساويتين  $ب س$  و  $ف غ$  وبين

خطين متوازيين  $ا ح$  و  $ب غ$  فهما

متساويان

ارسم  $ب ي$  و  $س ح$  فمن

حيث ان  $ب س$  يعدل  $ف غ$  و  $ف غ$  يعدل  $ي ح$  (ق ٢٤ ك ١) فلذلك  $ي ح$

يعدل  $ب س$  ايضا وهما متوازيان وقد اوصل بينهما الى جهة واحدة بالخطين  $ب ي$

$س ح$  والخطوط الموصلة بين خطين متوازيين متساويين الى جهة واحدة هي متوازية

ومتساوية (ق ٢٢ ك ١) فالخطان  $ب ي$  و  $س ح$  متساويان متوازيان والشكل

$ي ب س ح$  متوازي الاضلاع وهو يعدل الشكل  $ا ب س د$  (ق ٢٥ ك ١) لانها

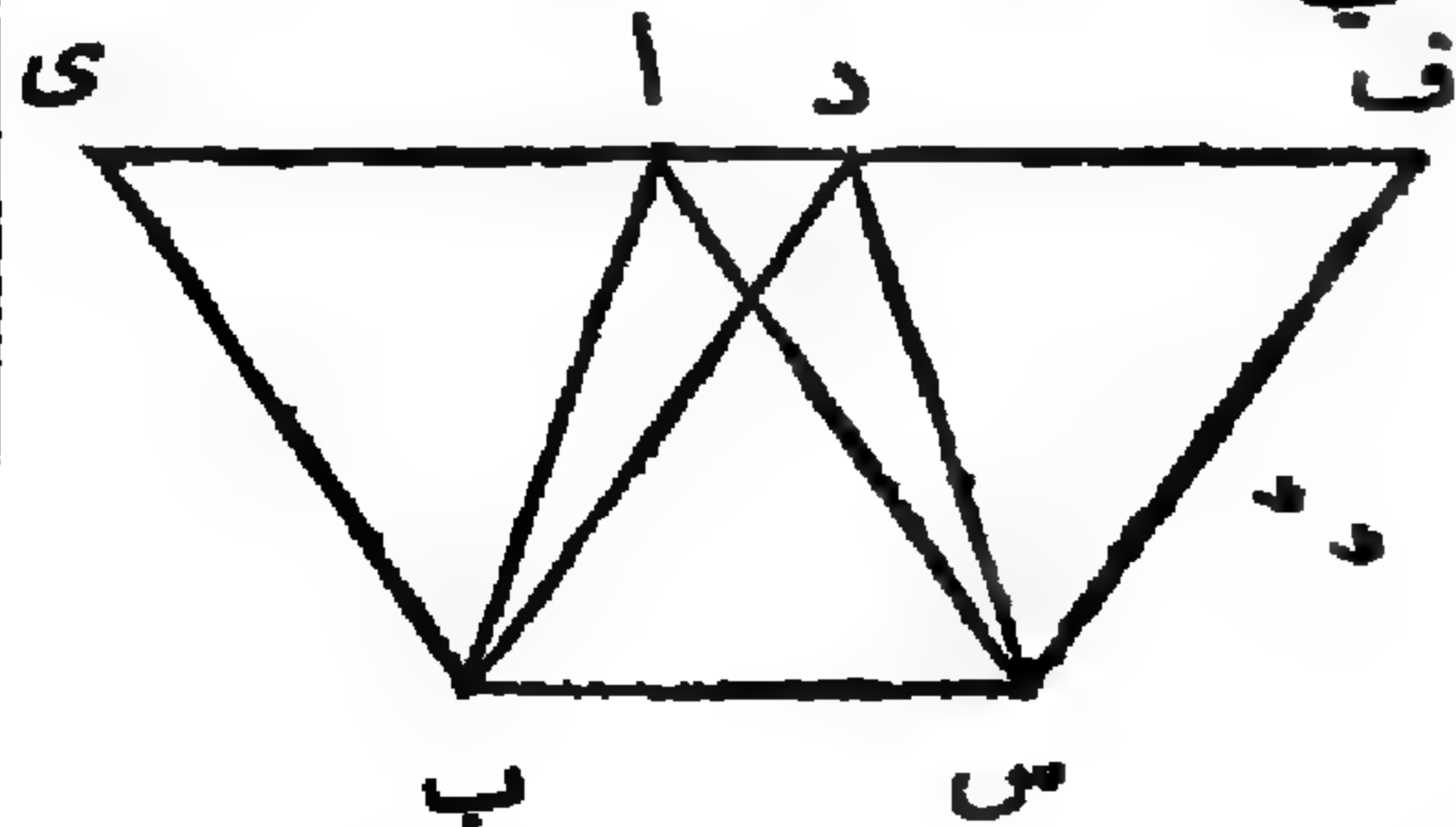
على قاعدة واحدة  $ب س$  وبين خطين متوازيين  $ب س$  و  $ا ح$  ولهذا السبب ايضا

الشكل  $ي ف غ ح$  يعدل  $ب س ح$  فالشكلان  $ا ب س د$  و  $ي ف غ ح$  متساويان

### القضية السابعة والثلاثون

مثلثات على قاعدة واحدة وبين خطين متوازيين هي متساوية

ليكن  $ا ب س د$  و  $ب س$  مثلثين على قاعدة واحدة  $ب س$  وبين خطين



متوازيين  $ا د$  و  $ب س$  فهما متساويان

اخرج  $ا د$  الى المجهتين الى  $ف$

وي ومن  $ب$  ارسم  $ب ي$  حتى يوازي

$ا س$  (ق ٢١ ك ١) ومن  $س$  ارسم  $س ف$

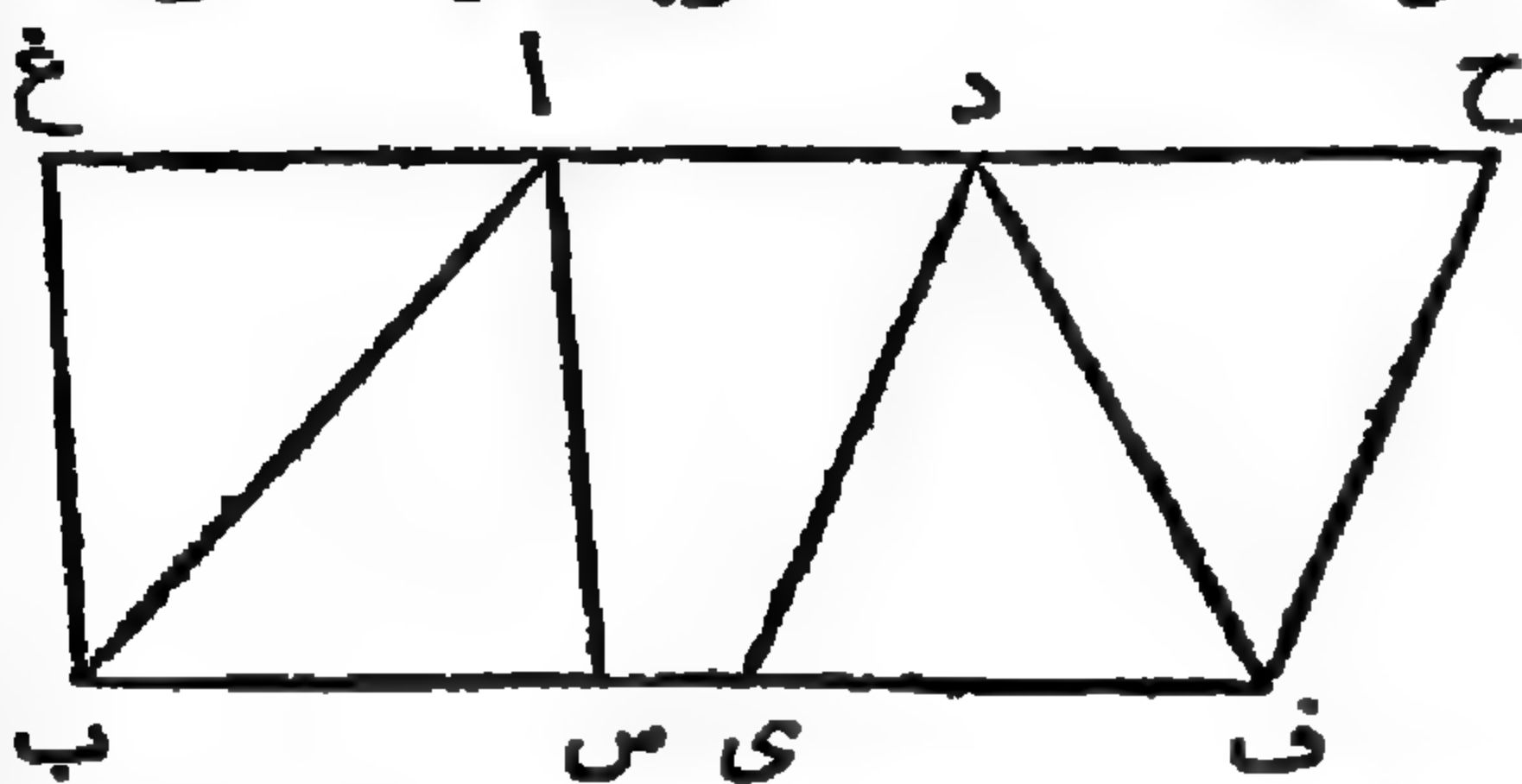
حتى يوازي  $ب د$  فكل واحد من الشكلين  $ا ي ب س$  و  $د ب س ف$  متوازي

الاضلاع وهما متساويان (ق ٢٥ ك ١) لانها على قاعدة واحدة  $ب س$  وبين خطين

متوازيين ي ف وب س والمثلث ا ب س هو نصف الشكل ا ي ب س لان  
القطر ا ب ينصفه (ق ٢٤ ك ١) والمثلث د ب س هو نصف الشكل د ب س ف  
لان القطر د س ينصفه وانصاف اشياء متساوية هي متساوية بعضها لبعض (اولية ٧)  
فالمثلث ا ب س يعدل المثلث د ب س

### القضية الثامنة والثلاثون

مثلثات على قواعد متساوية وبين خطين متساويين هي متساوية



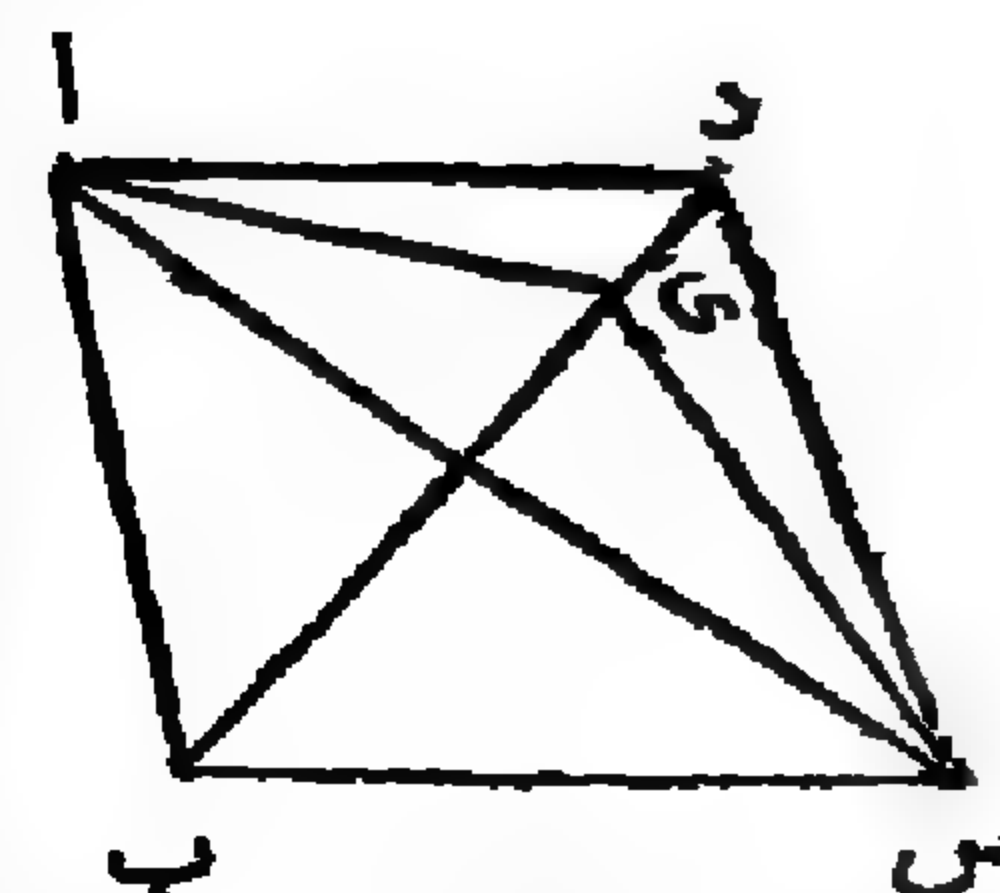
ليكن ا ب س ود ي ف مثلثين  
على قاعدتين متساويتين ب س  
ي ف وبين خطين متوازيين ا د  
وب ف فهما متساويان

اخرج ا د الى الجهتين الى ح و غ ولرسم ب غ حتى يوازي ا س (ق ٢١ ك ١)  
ومن ف ارسم ف ح حتى يوازي د ي فكل واحد من الشكلين ا غ ب س  
د ي ف ح متوازي الاضلاع وهما متساويان (ق ٢٦ ك ١) لانها على قاعدتين  
متساويتين ب س ي ف وبين خطين متوازيين غ ح ب ف والمثلث ا ب س هو  
نصف الشكل ا غ ب س (ق ٢٤ ك ١) لان القطر ا ب ينصفه ود ي ف هو نصف  
الشكل د ي ف ح (ق ٢١ ك ١) لان القطر د ف ينصفه وانصاف اشياء متساوية هي  
متساوية (اولية ٧) فالمثلث ا ب س يعدل المثلث د ي ف

### القضية التاسعة والثلاثون

مثلثات متساوية على قاعدة واحدة وعلى جانب واحد منها هي بين

خطين متوازيين



ليكن ا ب س ود ب س مثلثين متساويين  
على قاعدة واحدة ب س وعلى جانب واحد منها  
فهما بين خطين متوازيين  
ارسم ا د فالخط ا د يوازي ب س والا ف

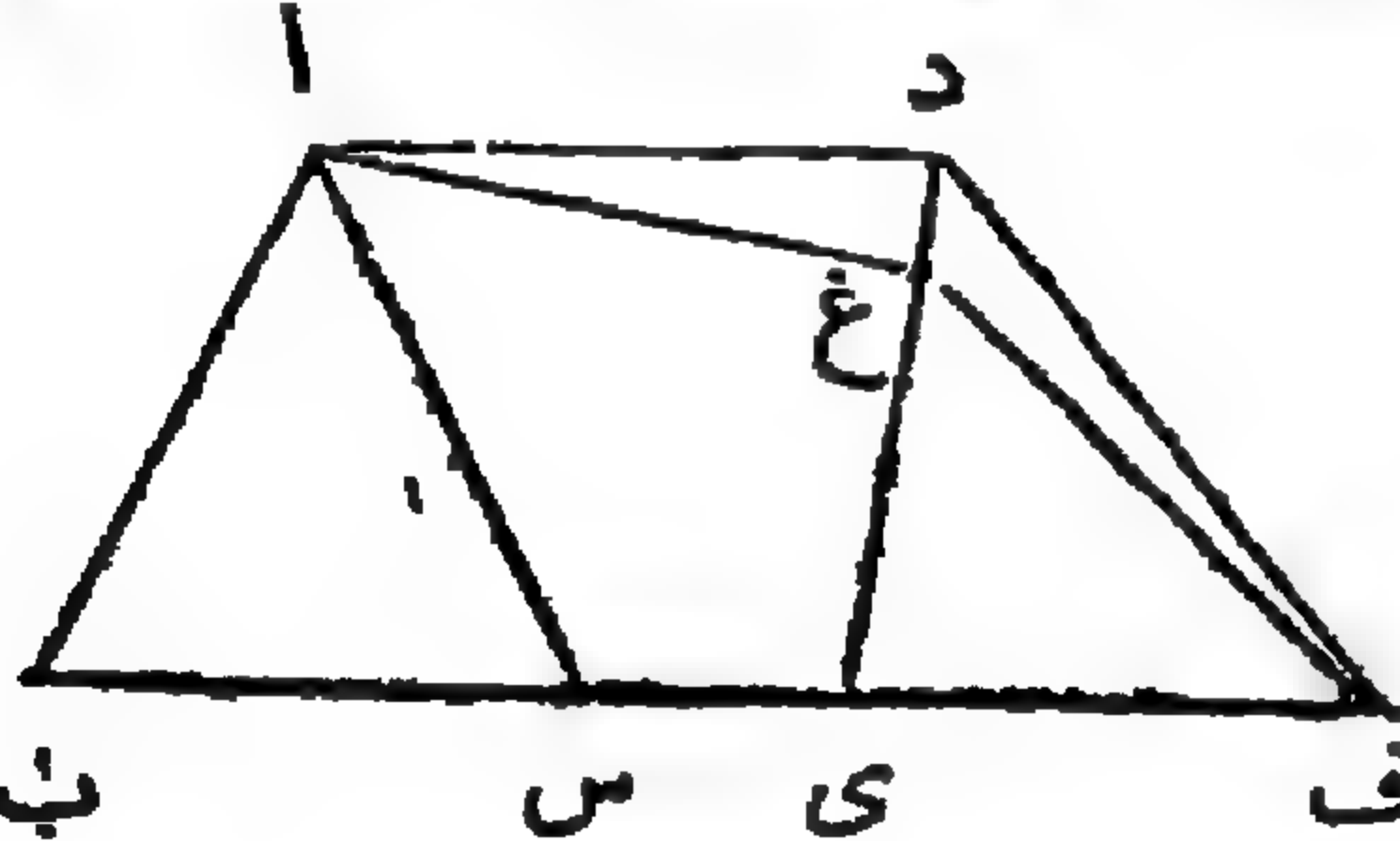


النقطة ا رسم اى حتى يوازي ب س (ق ٢١ ك ١) وارسم ى س فالمثلث ا ب س يعدل المثلث ى ب س (ق ٢٧ ك ١) لانها على قاعدة واحدة ب س وبين خطين متوازيين ب س اى والمثلث ا ب س يعدل د ب س فالمثلث ى ب س يعدل د ب س واي الاصغر يعدل الاكبر وذاك محال فلا يمكن ان يكون ب س واى متوازيين وهكذا يبرهن في كل خط الا الخط ا د فهو يوازي ب س

### القضية الاربعون

مثلثات متساوية على قواعد متساوية وعلى جانب واحد منها هي بين خطين متوازيين اذا كانت القواعد على استقامة واحدة

ليكن ا ب س دى ف مثلثين متساويين على قاعدتين متساويتين وعلى



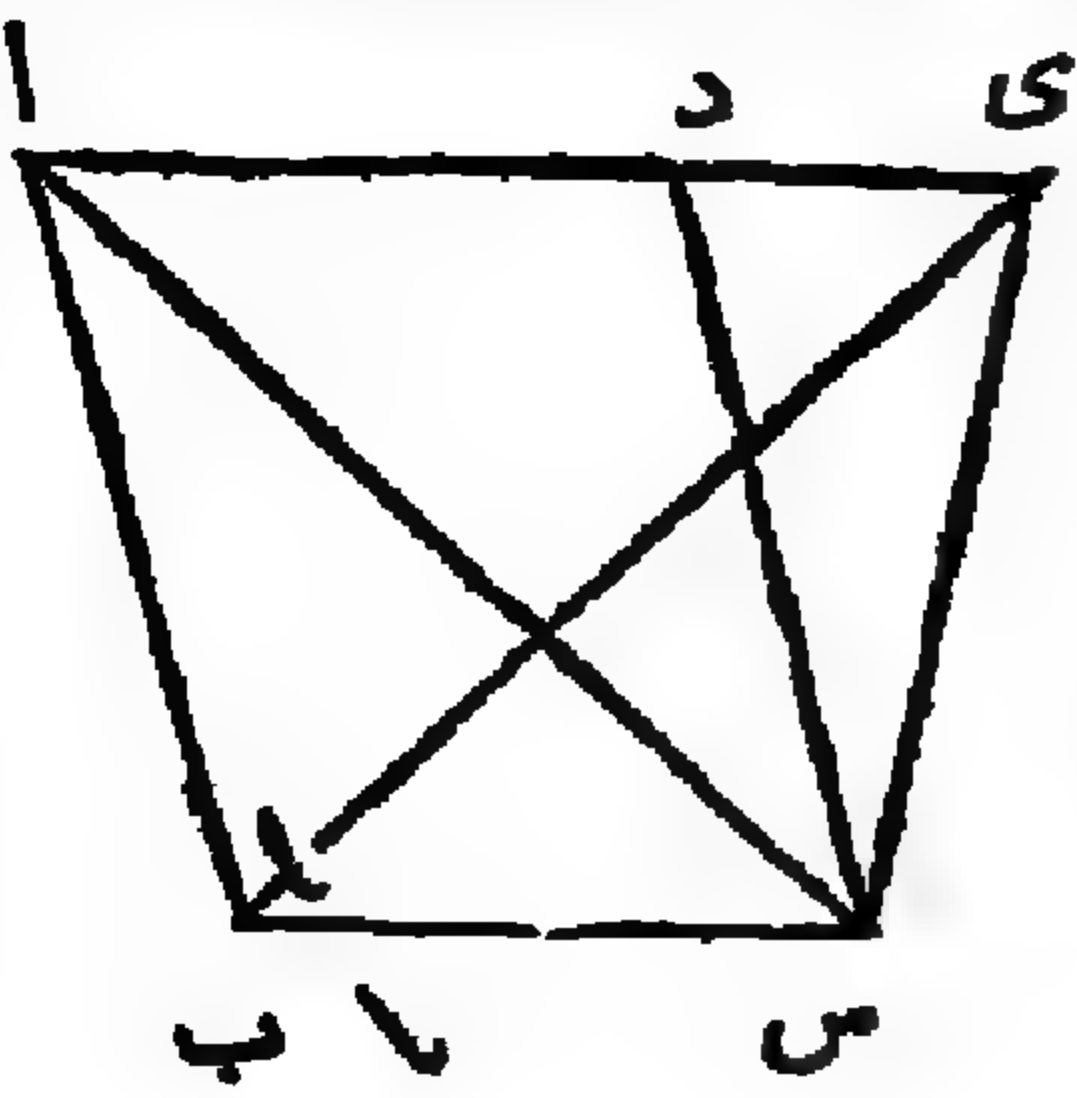
استقامة واحدة ب س ى ف وعلى جانب واحد منها فها بين خطين متوازيين

ارسم ا د فهو يوازي ب س والى ا رسم ا غ حتى يوازي ب س (ق ٢١ ك ١) وارسم غ ف فالمثلث ا ب س يعدل المثلث غ ى ف (ق ٢٨ ك ١) لانها على قاعدتين متساويتين ب س ى ف وبين خطين متوازيين ب س ا غ ولكن المثلث ا ب س يعدل المثلث دى ف فلذلك المثلث دى ف يعدل المثلث غ ى ف اي الاكبر يعدل الاصغر وذاك محال فالخط ا غ لا يوازي ب س وهكذا يبرهن في كل خط ما عدا ا د فهو يوازي ب س

### القضية الحادية والاربعون

اذا كان شكل ذو اضلاع متوازية ومثلث على قاعدة واحدة وبين خطين متوازيين فالشكل مضاعف المثلث

ليكن الشكل ذو الاضلاع المتوازية ا ب س د والمثلث ى ب س على قاعدة

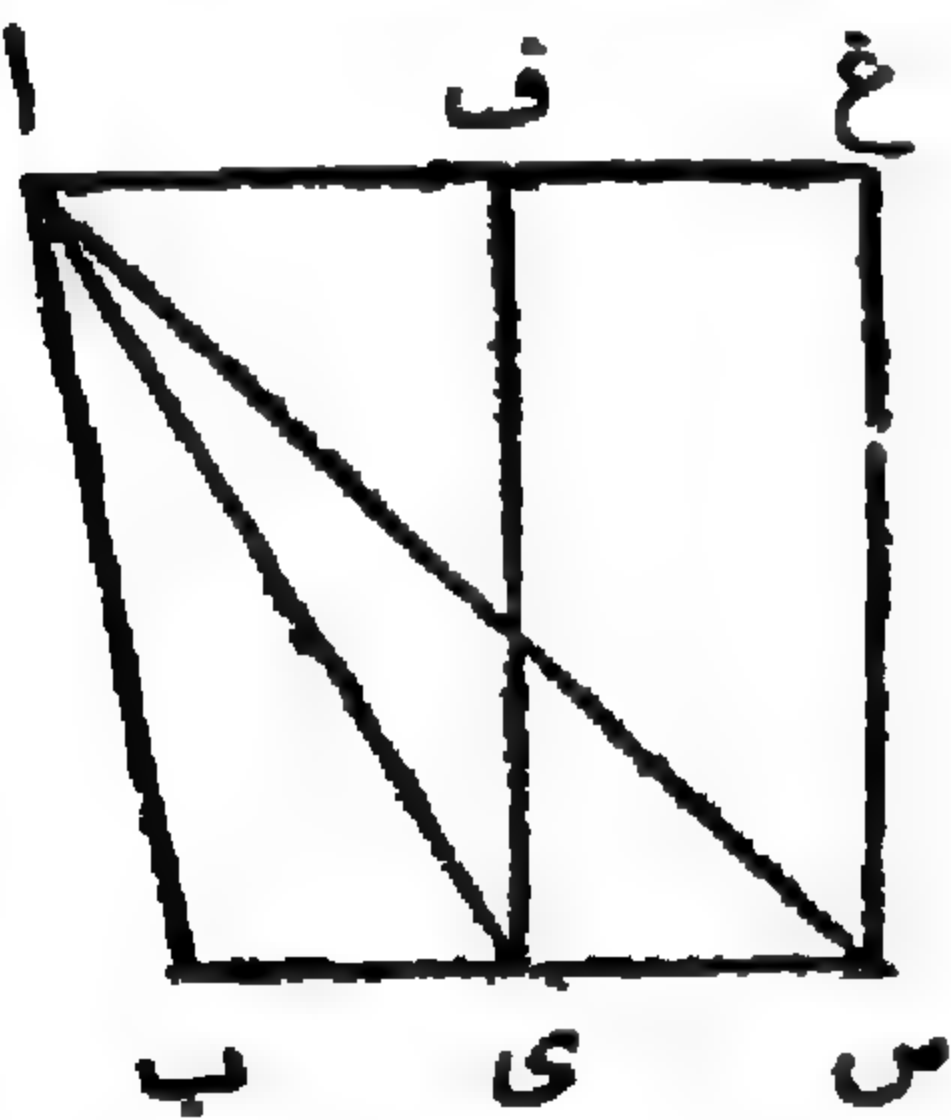


واحدة ب س وبين خطين متوازيين اى ب س  
فالشكل ا ب س د مضاعف المثلث ا ب س  
ارسم ا س فالمثلث ا ب س يعدل المثلث  
ا ب س (ق ٢٧ ك ١) لانها على قاعدة واحدة  
ب س وبين خطين متوازيين اى ب س ولكن  
الشكل ا ب س د هو مضاعف المثلث ا ب س (ق ٢٤ ك ١) لان القطر ا س  
ينصفه فالشكل ا ب س د هو مضاعف المثلث ا ب س ايضا

### القضية الثانية والاربعون ع

علينا ان نرسم شكلاً ذا اضلاع متوازية حتى يعدل مثلثاً مفروضاً  
وزاوية من زواياه تعدل زاوية مستقيمة بسيطة مفروضة

ليكن ا ب س المثلث المفروض ود الزاوية البسيطة المفروضة علينا ان نرسم



شكلاً ذا اضلاع متوازية حتى يعدل المثلث  
ا ب س وزاوية من زواياه تعدل  
نصف ب س في اى (ق ١٠ ك ١)  
ارسم اى ومن النقطة اى في الخط المستقيم  
اى س اجعل الزاوية س اى ف حتى تعدل

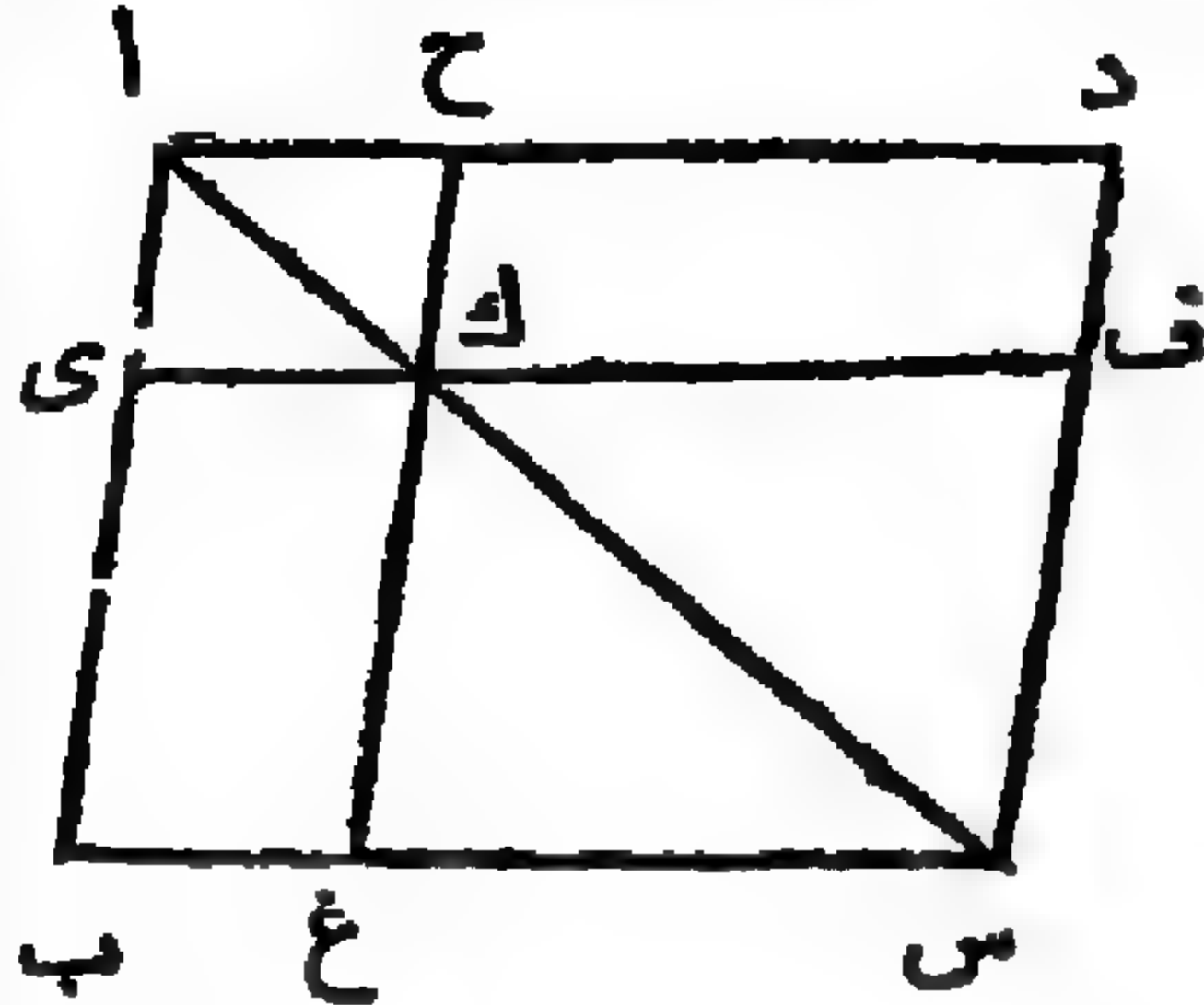
د (ق ٢٢ ك ١) ومن ا رسم ا غ حتى يوازي ب س (ق ٢١ ك ١) ومن س ارسم  
س غ حتى يوازي اى ف فالشكل س اى ف غ متوازي الاضلاع فمن حيث ان  
ب اى يعدل اى س فالمثلث ا ب اى يعدل المثلث اى س (ق ٢٨ ك ١) لانها  
على قاعدتين متساويتين ب اى اى س وبين خطين متوازيين ا غ ب س ولذلك  
المثلث ا ب س هو مضاعف المثلث اى س والشكل اى س غ ايضا مضاعف  
المثلث اى س (ق ٤١ ك ١) لانها على قاعدة واحدة وبين خطين متوازيين فالشكل  
اى س غ يعدل المثلث ا ب س وله الزاوية س اى ف التي تعدل الزاوية المفروضة د  
فرع. اذا كانت الزاوية د قائمة يكون الشكل اى س غ قائم الزوايا ويعدل  
المثلث ا ب س فبذات هذا العمل يصنع مثلث حتى يعدل شكلاً مفروضاً وزاوية قائمة



### القضية الثالثة والاربعون

الاجزاء المتمة لاشكال متوازية الاضلاع واقعة على جانبي قطر شكل متوازي الاضلاع هي متساوية

ليكن راب س د شكلاً متوازي الاضلاع واس قطرة وي ح وغ ف شكلي



متوازي الاضلاع على جانبي القطر اس وليكن

ب ك وك د الشكلي الاخرين المتين لكل

الشكل اب س د فالتم ب ك يعدل التم ك د

فمن حيث ان اب س د متوازي الاضلاع

واس قطرة فالتك اب س يعدل التك

ا د س (ق ٢٤ ك ١) ومن حيث ان اى ك ح متوازي الاضلاع فالتك اى ك

يعدل التك ا ح ك ولهذا السبب ايضاً التك ك غ س يعدل التك ك ف س

فالتك اى ك مع ك غ س يعدل التك ا ح ك مع ك ف س والكل اب س

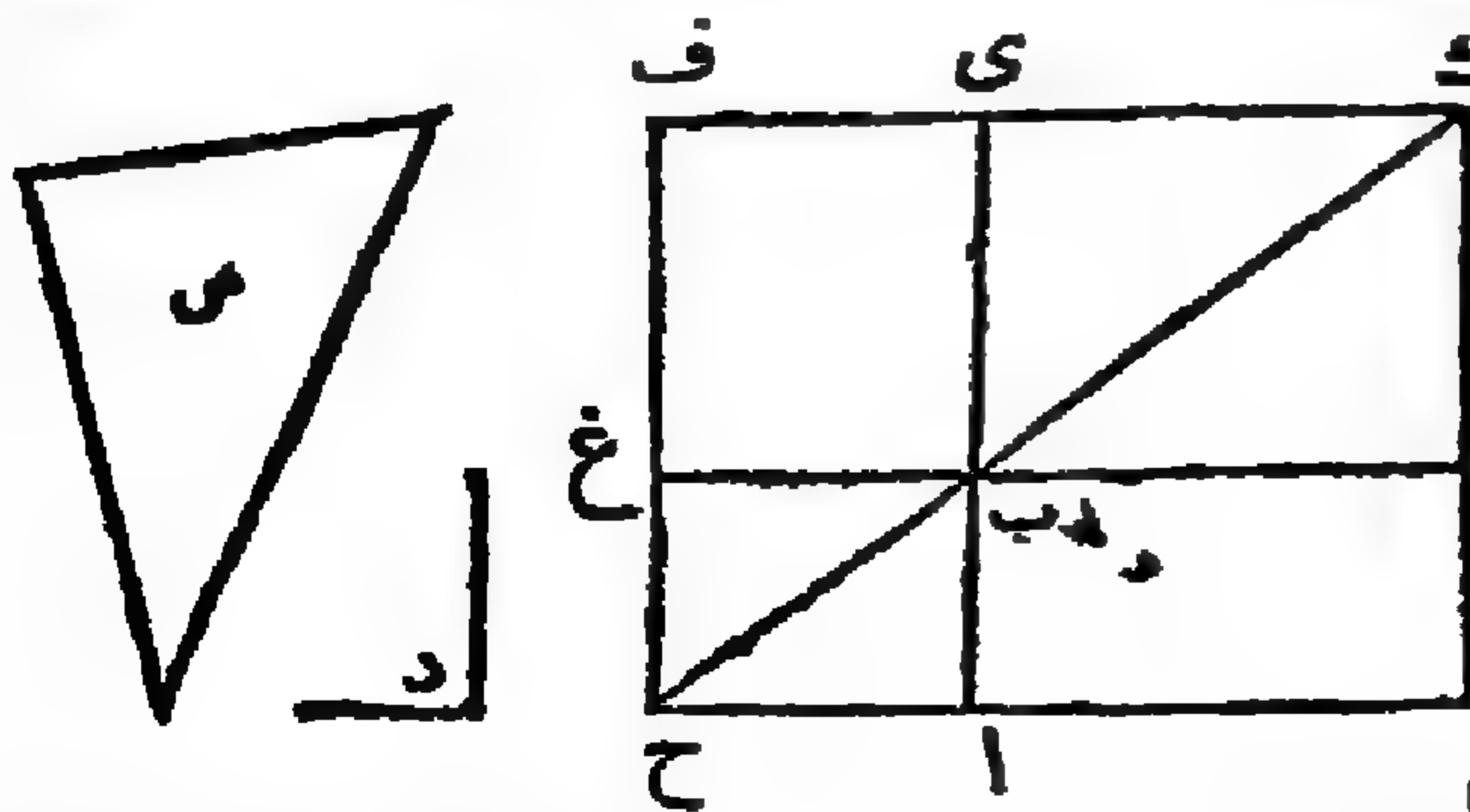
يعدل الكل ا د س فالبقية ب ك تعدل البقية ك د (اولية ٢)

### القضية الرابعة والاربعون

علينا ان نرسم على خط مستقيم مفروض شكلاً متوازي الاضلاع حتى

يعدل مثلثاً مفروضاً وزاوية من زواياه تعدل زاوية بسيطة مفروضة

ليكن اب الخط المستقيم المفروض وس التك المفروض ود الزاوية المفروضة.



علينا ان نرسم على الخط

اب شكلاً متوازي الاضلاع

حتى يعدل س وزاوية من

زواياه تعدل د

ارسم الشكل

المتوازي الاضلاع بى ف غ حتى يعدل التك س (ق ٤٢ ك ١) واجعل الزاوية

بى ب غ منه تعدل الزاوية د واجعل ضلع بى ب والخط اب على استقامة

واحدة واخرج ف غ الى ح ومن ا رسم ا ح حتى يوازي ب غ ا وى ف (ق ٢١ ك ١)  
 وارسم ح ب . فمن حيث ان الخط المستقيم ح ف يلاقي المتوازيين ح ا فى فالزاويتان  
 ا ح ف ح فى معا تعدلان قائمتين (ق ٢٩ ك ١) فالزاويتان ب ح ف ح فى  
 معا اقل من قائمتين ولا بد من التقاء ح ب و فى اذا اخرجنا (ق ٢٢ ك ١)  
 فرع ١) اخرجها حتى يلتقيا في ك ومن ك ارسم ك ل حتى يوازي ا و ف ح واخرج  
 ح الى ل واخرج غ ب الى م فالشكل ح ل ك ف متوازي الاضلاع وقطره ح ك  
 والشكلان ا غ ومى هما متوازي الاضلاع على جانبي القطر ح ك . ول ب وب ف  
 هما المثلثان فالتم ل ب يعدل المثلث ب ف (ق ٤٢ ك ١) ولكن ب ف يعدل المثلث  
 س فالشكل ل ب يعدل المثلث س ايضا والزاوية غ بى تعدل الزاوية ا ب م  
 (ق ١٥ ك ١) ولكن بى ب غ تعدل الزاوية د فالزاوية ا ب م تعدل دا ايضا فالشكل  
 ل ب قد رسم على الخط المفروض ا ب حتى يعدل المثلث المفروض س والزاوية  
 ا ب م منه تعدل الزاوية المفروضة د

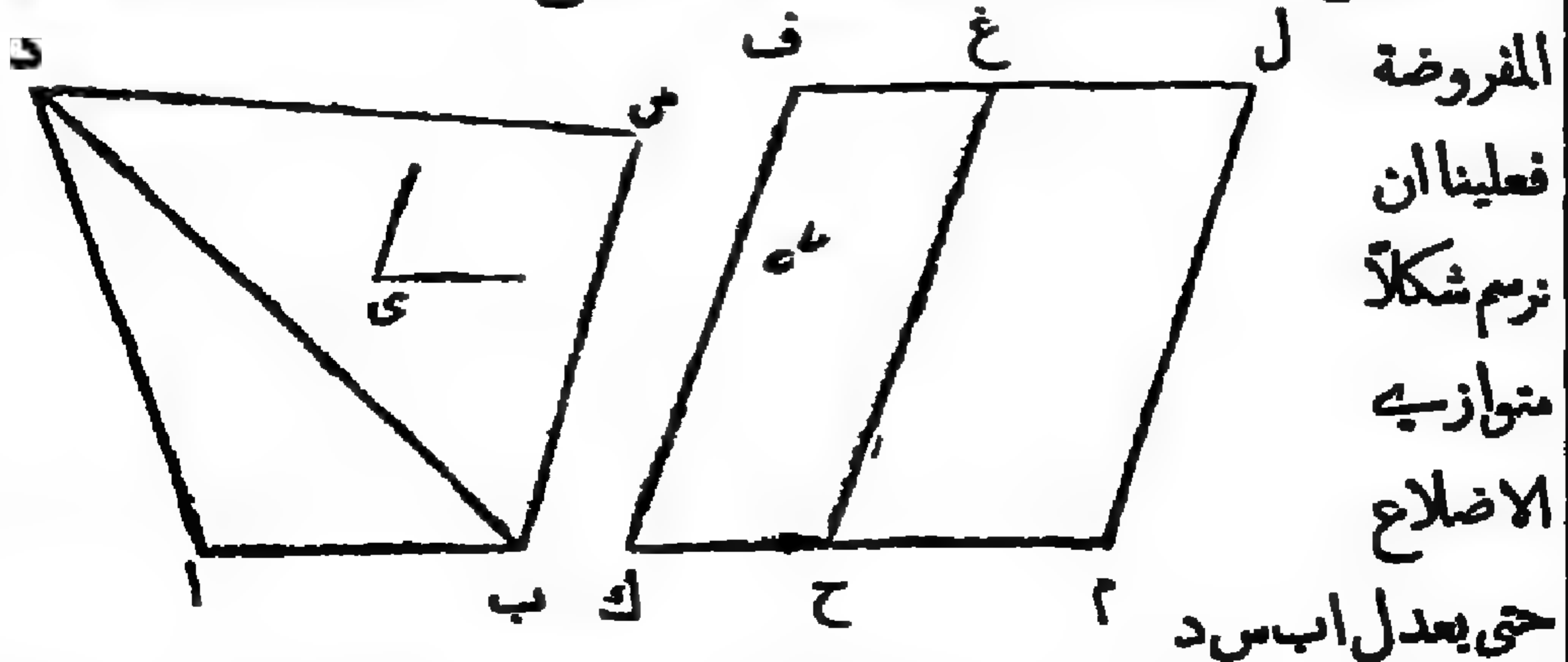
فرع ٢ . على هذا الاسلوب يتحول مثلث الى شكل ذي زوايا قائمة مفروض طول  
 ضلع من اضلاعه . لانه اذا كانت د قائمة و ا ب الضلع المفروض فالشكل ا ب م ل  
 يكون ذا زوايا قائمة ويعدل المثلث المفروض س

### القضية الخامسة والاربعون ع

علينا ان نرسم شكلاً متوازي الاضلاع حتى يعدل شكلاً مفروضاً ذا

اضلاع مستقيمة وزاوية من زواياه تعدل زاوية بسيطة مفروضة

ليكن ا ب س د الشكل المفروض ذا اضلاع مستقيمة وى الزاوية البسيطة





وزاوية من زواياه تعدل الزاوية ي

ارسم د ب ثم ارسم الشكل المتوازي الاضلاع ف ح (ق ٤٢ ك ١) حتى يعدل  
المثلث ا د ب واجعل الزاوية ح ك ف منه تعدل الزاوية ي وعلى الخط المستقيم  
غ ح ارسم الشكل المتوازي الاضلاع غ م (ق ٤٤ ك ١) واجعله يعدل المثلث  
د ب م والزاوية غ ح م تعدل الزاوية ي

فمن حيث ان الزاوية ي تعدل الزاويتين ف ك ح غ ح م فالزاوية ف ك ح  
تعدل غ ح م. اصف الى كل واحدة منها الزاوية غ ح ك فالزاويتان غ ح م غ ح ك  
تعدلان الزاويتين ف ك ح غ ح ك ولكن ف ك ح ك ح غ ح م معا تعدلان قائمتين  
(ق ٢٩ ك ١) فلذلك ك ح غ غ ح م تعدلان قائمتين فمن حيث ان الخط غ ح  
يجعل مع ك ح م الزاويتين المتوالتين تعدلان قائمتين فالخطان ك ح ح م  
هما على استقامة واحدة (ق ١٤ ك ١) ومن حيث ان الخط المستقيم غ ح يلاقي  
المتوازيين ك م ف غ فالزاويتان المتبادلتان م ح غ غ ح ف متساويتان (ق ٢٩  
ك ١) اصف الى كل واحدة منها الزاوية ح غ ل فالزاويتان م ح غ غ ح ل تعدلان  
الزاويتين ح غ ف ح غ ل ولكن م ح غ غ ح ل تعدلان قائمتين (ق ٢٩ ك ١)  
ولذلك ح غ ف ح غ ل تعدلان قائمتين. فالخطان ف غ غ ل هما على استقامة  
واحدة. ومن حيث ان ك ف يوازي ح غ و ح غ يوازي ل م فالخط ك ف يوازي  
الخط ل م (ق ٣٠ ك ١) والخط ك م يوازي ل ف فالشكل ك م ل ف متوازي  
الاضلاع. والمثلث ا ب د يعدل الشكل ح ف والمثلث د ب م يعدل الشكل  
غ م فالكل ا ب م د يعدل الكل ك ف ل م. فقد رُسم شكل متوازي الاضلاع  
ك م ل ف حتى يعدل الشكل المفروض ا ب م د والزاوية ف ك م منه تعدل  
الزاوية المفروضة ي

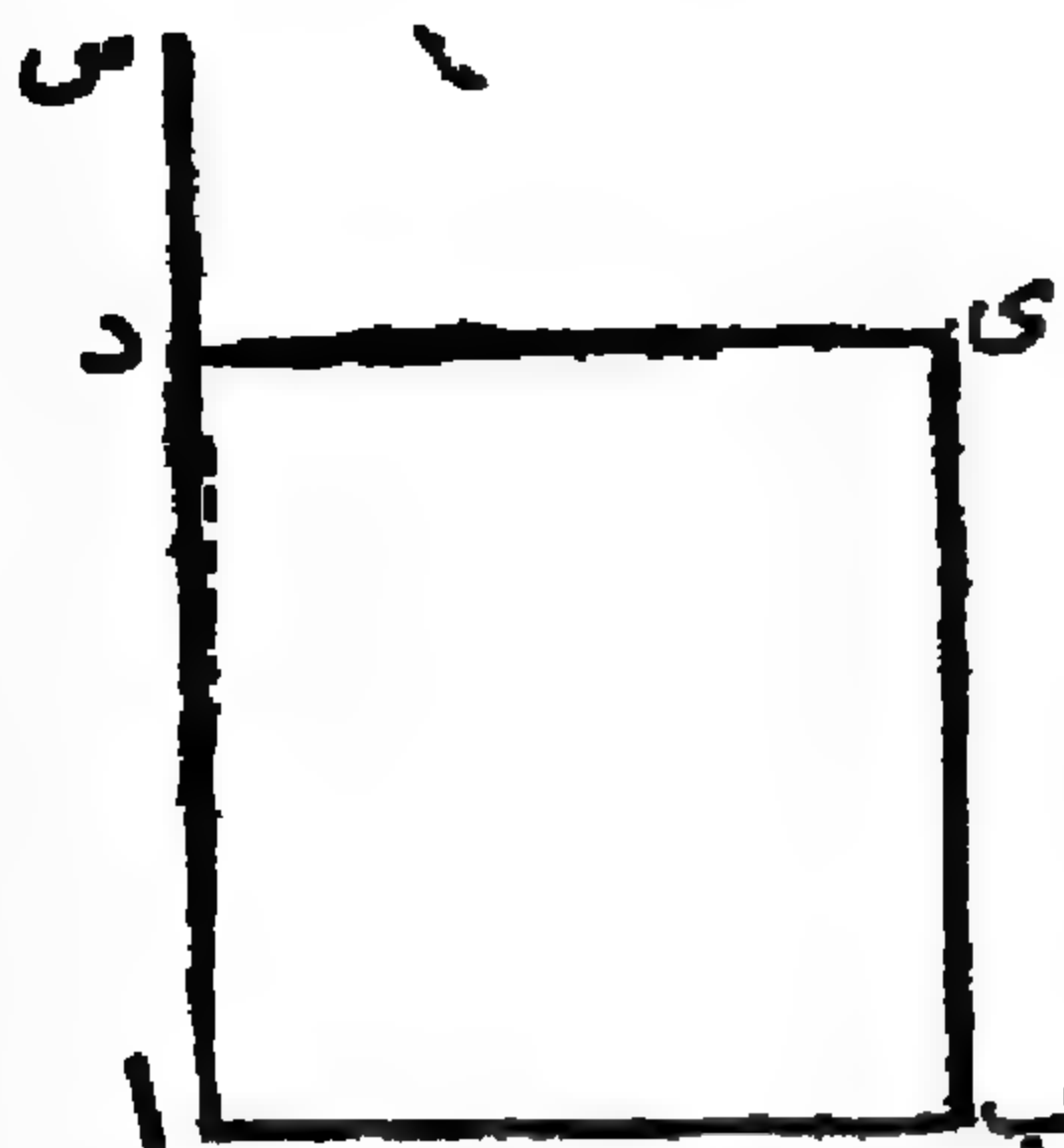
فرع. على هذا الاسلوب بيني على خط مستقيم مفروض شكل متوازي الاضلاع  
ل زاوية تعدل زاوية مفروضة وهو يعدل شكلاً مفروضاً ذا اضلاع مستقيمة ا ب  
بينى اولاً على الخط المفروض شكلاً متوازي الاضلاع يعدل المثلث الاول ا ب د  
(ق ٤٤ ك ١) وزاوية من زواياه تعدل الزاوية المفروضة

## القضية السادسة والاربعون ع

علينا ان نرسم مربعاً على خط مستقيم مفروض

ليكن ا ب الخط المستقيم المفروض. علينا ان نرسم عليه مربعاً

من النقطة ا ارسم الخط ا س عموداً على ا ب  
(ق ١١ ك ١) واقطع ا د حتى يعدل ا ب (ق ٢٦ ك ١)  
ومن د ارسم د ي حتى يوازي ا ب (ق ٢١ ك ١)  
ومن ب ارسم ب ي حتى يوازي ا د. فالشكل  
ا د ي ب متوازي الاضلاع والخط ا ب يعدل  
د ي والخط ا د يعدل ي ب (ق ٢٤ ك ١) ولكن



ا ب يعدل ا د فالخطوط الاربعة ا ب ا د د ي ب ي هي متساوية والشكل المتوازي  
الاضلاع ا ب ي د هو متساوي الاضلاع ايضاً وزواياه قائمة لان ا د الذي يلاقي  
المتوازيين د ي ا ب يجعل الزاويتين ب ا د ا د ي تعدلان قائمتين (ق ٢٩ ك ١)  
وقد جعلت ب ا د قائمة فتكون ا د ي ايضاً قائمة وفي كل شكل ذي اضلاع متوازية  
تكون الزوايا المتقابلة متساوية (ق ٢٤ ك ١) فالزاويتان ا ب ي ب ي د هما  
ايضاً قائمتان فالشكل ذو زوايا قائمة وقد تبرهنت مساواة الاضلاع وقد رُسم على  
الخط المفروض ا ب

فرع. كل ذي متوازي الاضلاع له قائمة واحدة تكون جميع زواياه قائمات

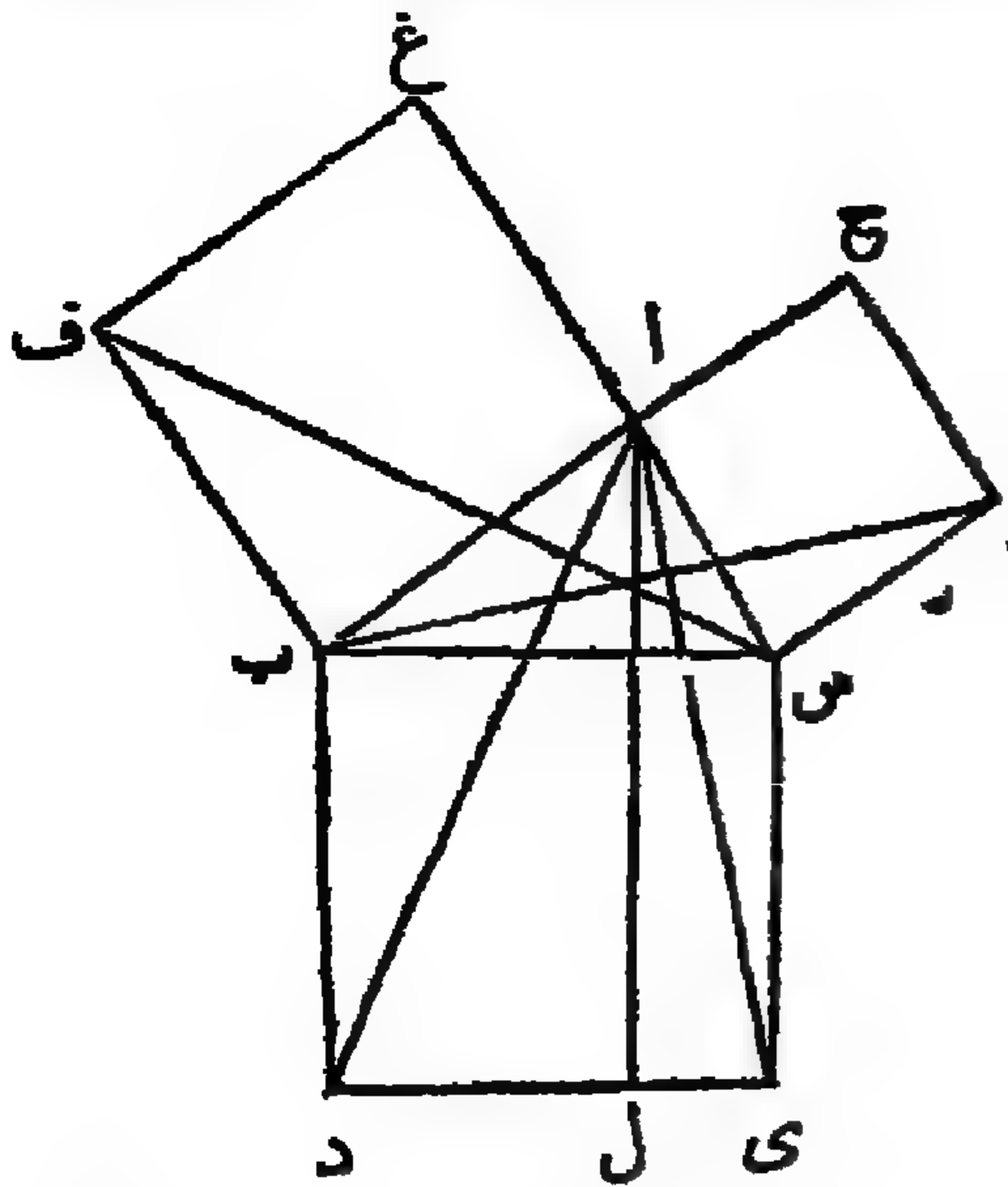
## القضية السابعة والاربعون ن

في كل مثلث ذي قائمة مربع الوتر يعدل مربعي الساقين

ليكن ا ب س مثلثاً ذا قائمة ب ا س فمربع الوتر ب س يعدل مربع ا ب مع  
مربع ا س

ارسم على ب س المربع ب د ي س (ق ٤٦ ك ١) وعلى ب ا المربع ب غ وعلى  
ا س المربع س ح ومن ا ارسم ا ل حتى يوازي ب د ا و س ي (ق ٢١ ك ١) ارسم ا د  
و ف س. الزاوية ب ا س قائمة وب ا غ كذلك (ح ٢٥) فالخط المستقيم ب ا





يجعل مع الخطين المستقيمين اس اغ  
الزاويتين المتواليتين با س باغ  
تعدلان قائمتين فالخطان على استقامة  
واحدة (ق ١٤ ك ١) ولهذا السبب  
الخطان با ا ح ايضا على استقامة  
واحدة. والزاوية دب س تعدل الزاوية  
ف با لانهما قائمتان. اصف الى كل  
واحدة اب س فكل الزاوية دب ا تعدل

الكل ف ب س (اولية ٢) والضلعان اب ب د يعدلان الضلعين ف ب ب س كل  
واحد يعدل نظيره. والزاوية اب د تعدل الزاوية ف ب س فالقاعدة ا د تعدل  
القاعدة ف س (ق ١٤ ك ١) والمثلث اب د يعدل المثلث ف ب س. والشكل المتوازي  
الاضلاع ب ل هو مضاعف المثلث اب د (ق ١٤ ك ١) لانها على قاعدة واحدة  
ب د وبين خطين متوازيين ب د ا ل. والمربع ب غ هو مضاعف المثلث ف ب س  
لانها على قاعدة واحدة ب ف وبين خطين متوازيين ب ف غ س والاشياء المضاعفة  
اشياء متساوية هي متساوية (اولية ٦) فالشكل ب ل يعدل المربع ب غ. وهكذا اذا  
رسم ب ك واى يبرهن ان الشكل س ل يعدل المربع ح س فكل المربع ب د ي س  
يعدل المربعين ب غ وح س

فرع اول. مربع ساق مثلث ذي قائمة يعدل مربع الوتر الا مربع الساق الاخر  
اي  $اب^2 = ب س^2 - اس^2$

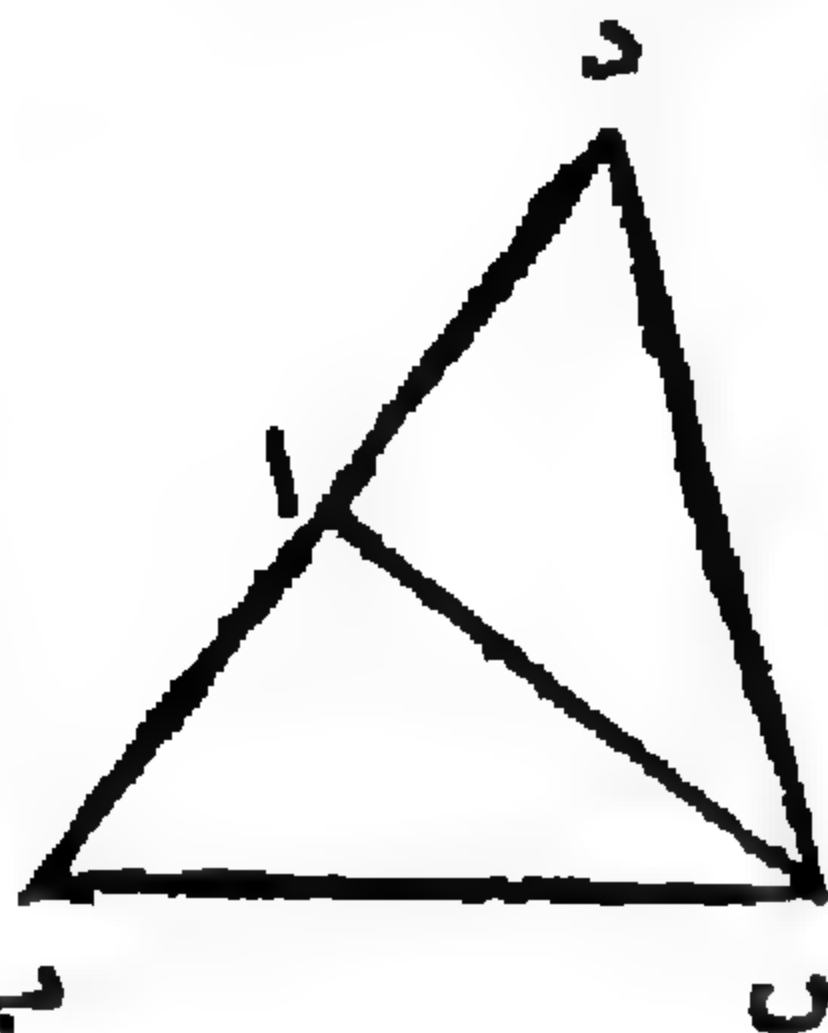
فرع ثان. اذا فرض  $اب = اس$  اي اذا كان اب س متساوي الساقين فلنا  
 $ب س^2 = اس^2 = اب^2 = اس^2$  وب س  $= اب^2$  ٢٦

فرع ثالث. في مثلثين قائمي الزاويتين اذا عدل ضلعان من الواحد ضلعين  
من الاخر فالضلع الثالث من الواحد يعدل الثالث من الاخر

القضية الثامنة والاربعون

اذا عدل مربع ضلع مثلث مربعي الضلعين الآخرين فالمثلث قائم الزاوية

ليكن  $AB$   $BC$  مثلثا ولنفرض ان مربع  $BC$  يعدل مربعي  $BA$   $AC$  فتكون  $BCA$  قائمة



من الرسم ا د عمودا على  $BC$  (ق ١١ ك)

واجعل ا د يعدل  $AB$  وارسم د س

فمن حيث ان د ا يعدل  $AB$  فمربع د ا يعدل

مربع  $AB$  اضف الى كل واحد منها مربع  $AS$  فمربع د ا س

مع مربع  $AS$  يعدل مربع  $BC$  مع مربع  $AS$  ولكن مربع د س يعدل مربع د ا مع

مربع  $AS$  (ق ٤٧ ك) لان د ا س قائمة وحسب المفروض مربع  $BC$  س يعدل مربع

$BC$  مع مربع  $AS$  فمربع د س يعدل مربع  $BC$  مع مربع  $AS$  فمربع  $BC$  س

ولان د ا يعدل  $AB$  و  $AS$  مشترك بين المثلثين د ا س  $BCA$  والقاعدة  $BC$  س

تعدل القاعدة د س فالزاوية د ا س تعدل الزاوية  $BCA$  (ق ٨ ك) ود ا س

قائمة فتكون  $BCA$  قائمة ايضا

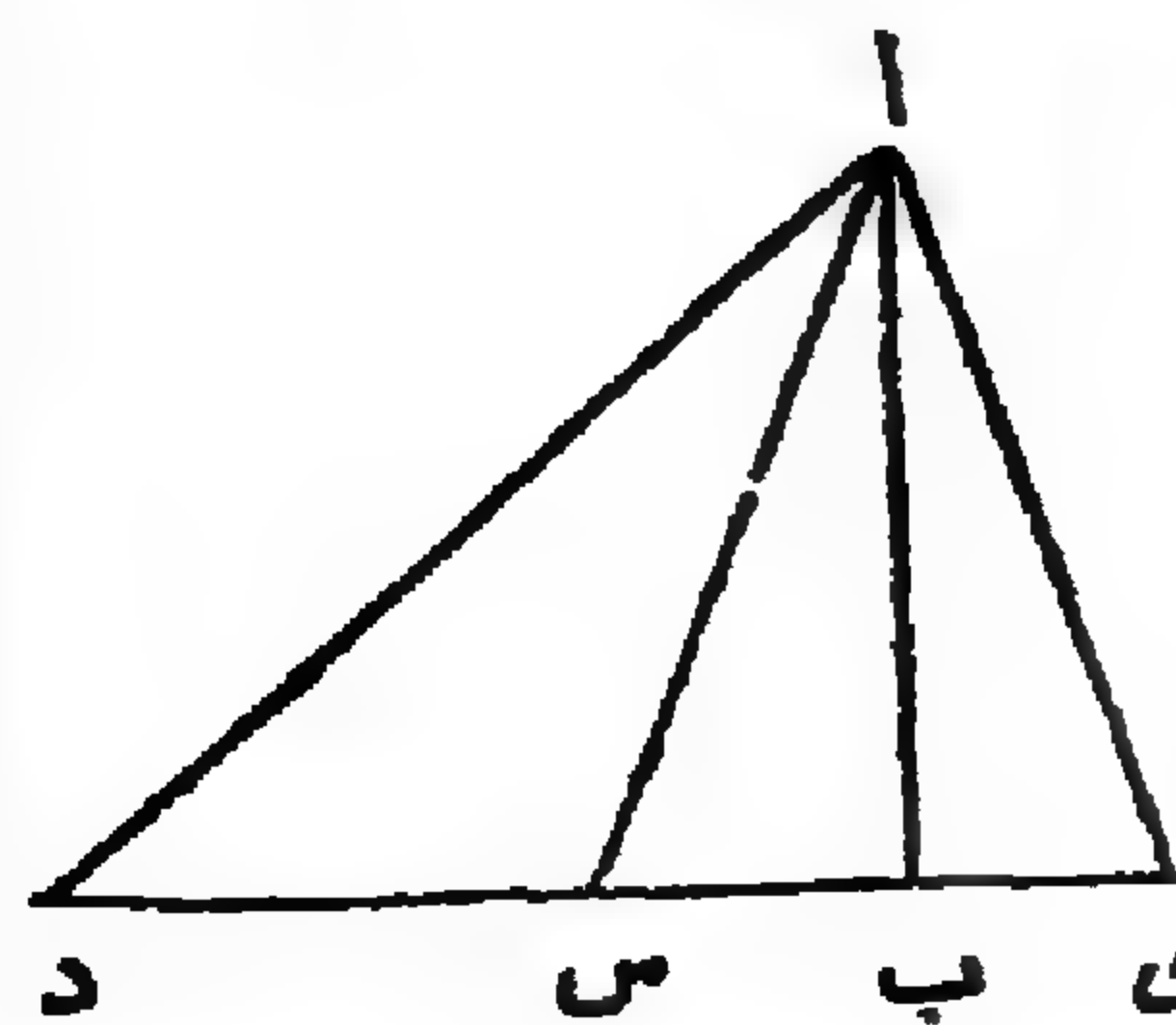
مضافات الى الكتاب الاول

قضية ١٠٠

الخط العمودي هو اقصر الخطوط التي يمكن رسمها من نقطة خارجة عن خط مفروض الى ذلك الخط وكل خطين مائلين واقعين على جانبي العمود خارجين من نقطة واحدة وفاصلين جزئين متساويين من الخط الذي يقعان عليه متساويان ومن كل خطين اخرين مائلين فاصلين جزئين غير متساويين فابعدهما عن العمود اطولها



ليكن  $اب اس$  ا د الى اخره المخطوط المرسومة من النقطة المفروضة الى



المخط المستقيم الغير المحدود  $دي$  وليكن  $اب$  عموداً فهو اقصر من  $اس$  و  $اس$  اقصر من  $اد$  وهم جبراً لان الزاوية  $اب س$  قائمة فالزاوية  $اس ب$  حادة (ق ١٧ ك ١) واصغر من  $اب س$  والزاوية الصغرى من كل مثلث

قابلها الضلع الاقصر (ق ١٩ ك ١) فالضلع  $اب$  اقصر من الضلع  $اس$ . ثم اذا كان  $ب س$  و  $ب ي$  متساويين يكون المخطان المائلان  $اس اي$  متساويين ايضاً. لان الزاوية  $اب س = اب ي$  والضلع  $اب$  مشترك بين المثلثين  $اب س$  و  $اب ي$  فالمثلثان متساويان (ق ٤ ك ١) والضلع  $اس = اي$ . ولان الزاوية  $اس ب$  حادة فالزاوية  $اس د$  منفرجة لانها معاً تعدلان قائمتين (ق ١٢ ك ١) والزاوية  $اد س$  حادة لان  $اب د$  قائمة فالزاوية  $اس د$  هي اكبر من  $اد س$  فالضلع  $اد$  اطول من الضلع  $س د$  (ق ١٩ ك ١)

فرع اول. العمود هو قياس حقيقي للبعد بين نقطة ونقط لانه البعد الاقرب بينها

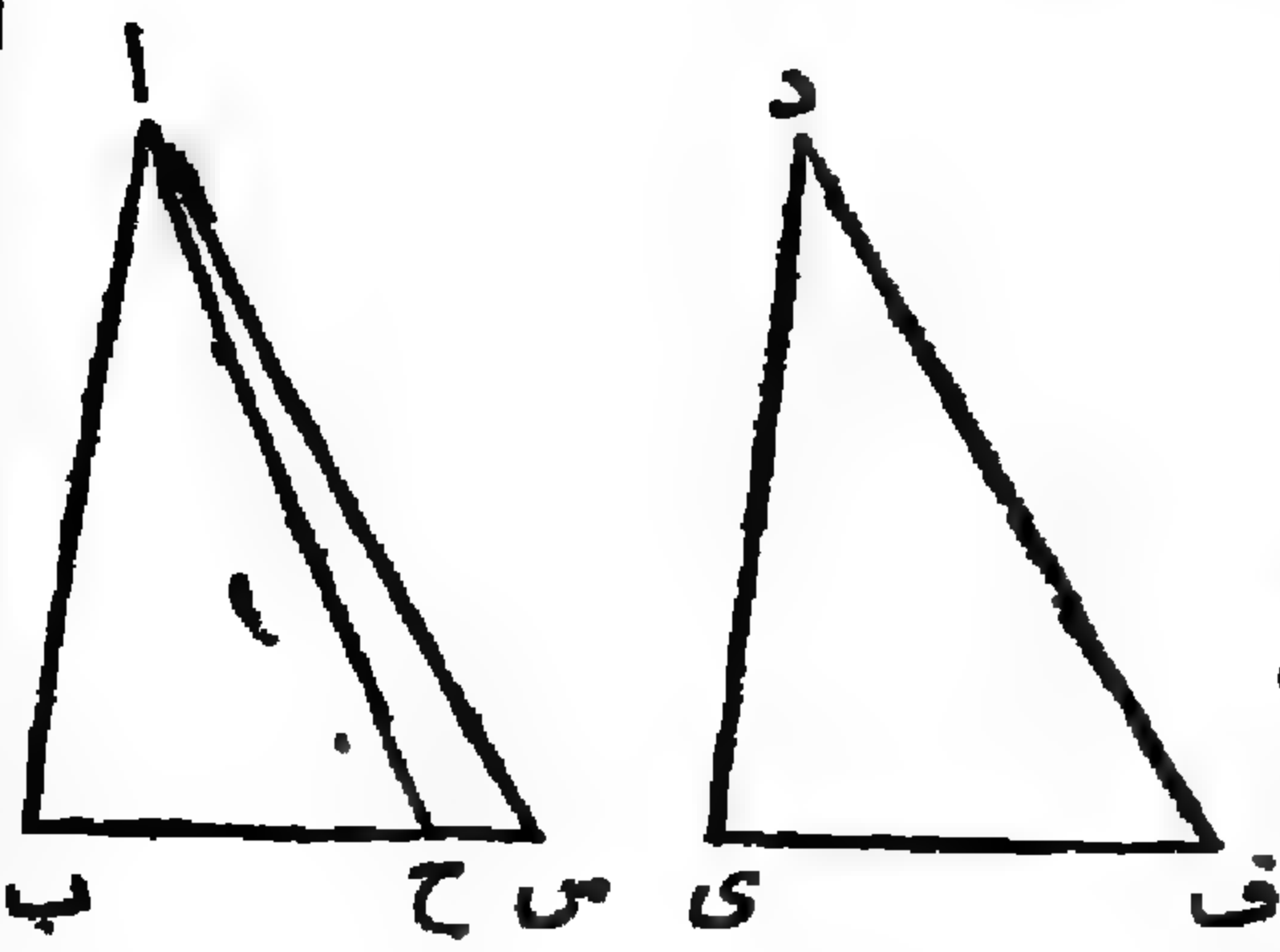
فرع ثان. كل نقطة في عمود على نقطة انصاف خط هي على بعد واحد من طرفي المخط

فرع ثالث. من نقطة واحدة لا يمكن رسم ثلاثة خطوط متساوية الى خط واحد والا لكان خطان مائلان متساويان على جانب واحد من العمود وذاك لا يمكن

### قضيه ب. ن

اذا عدل وتر مثلث قائم الزاوية وساق من ساقيه وتر مثلث آخر قائم الزاوية وساقاً من ساقيه فالمثلثان متساويان

لتفرض الوتر  $اس = د ف$  والضلع  $اب = دي$  فالمثلث القائم الزاوية  $اب س$



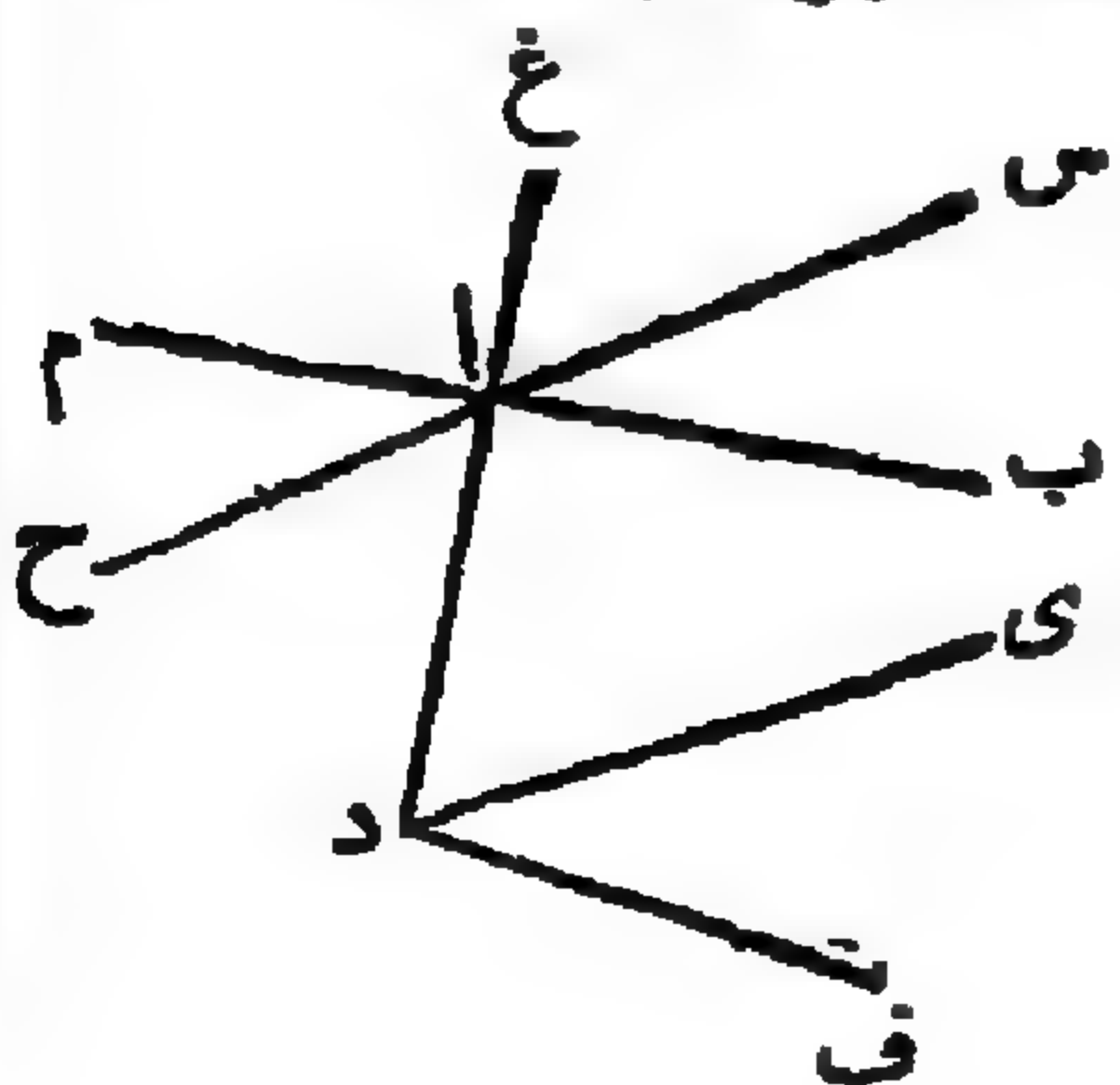
= القائم الزاوية دى ف، فلو قُرِصَتْ  
مساواة الضلع الثالث منها لكانت  
مساواة المثلثين ظاهرة. وإن لم يكن  
الضلعان الاخران متساويين فخذ  
جزءاً من ب س مثل ب ح حتى  
يعدل دى ف (ق ٢ ك ١) ارسم ا ح

فالمثلث ا ب ح = دى ف (ق ٤ ك ١) لأن ا ب = دى و ب ح = دى ف والزاوية  
ا ب ح = دى ف لانها قائمتان فلذلك ا ح = د ف ولكن قد قُرِص ان ا س =  
د ف فالنتيجة ان ا ح = ا س ولكن حسب القضية الماضية الأبعد عن العمود هو  
اطول من الاقرب اليه فلا يمكن ان ا ح = ا س ولا يمكن ان ب س لا يعدل دى ف  
فالمثلثان ا ب س دى ف متساويان

### قضية ج. ن

إذا كان ضلعاً زاوية موازيين ضلعي زاوية اخرى وكان انفراجهما الى  
جهة واحدة فالزاويتان متساويتان

لتفرض ان ا ب يوازي د ف و ا س يوازي دى فالزاوية س ا ب = دى ف.  
ارسم غ ا د على رأسها. فلان ا ب يوازي د ف  
فالزاوية الخارجة غ ا ب = غ د ف (ق ٢٩ ك ١) ولهذا السبب غ ا س = غ دى ف البقية  
س ا ب = البقية دى ف  
فرع. اذا اخرج ب الى م وس الى ح



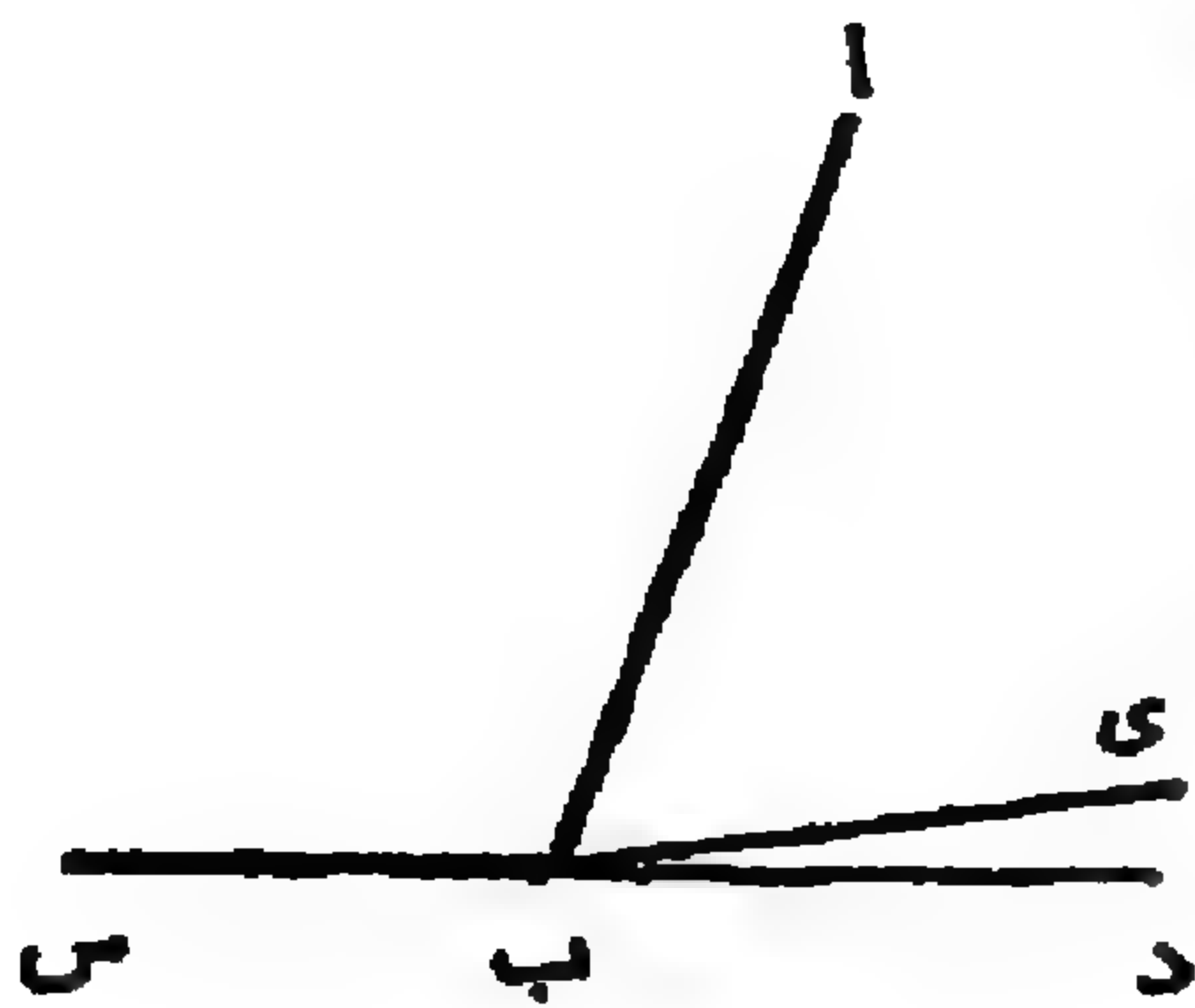
فلنا ب ا س = ح ا م واذا ذاك فالزاوية ح ا م = دى ف ايضاً

تعليقة. يلزم حصر القضية بشرط انفراج الخطيين الى جهة واحدة لان سبب  
الزاوية س ا م س ا ب يوازي دى ف و ا م يوازي د ف ولكن الزاويتان غير متساويتين  
وس ا م وى د ف معاً تعدلان قائمتين



قضية د.ع

مفروض زاويتان من زوايا مثلث وعلينا ان نجد الثالثة



ارسم خطاً مستقيماً مثل س د وفي نقطة  
منه مثل ب اجعل الزاوية س ب ا حتى  
تعدل واحدة من الزاويتين المفروضتين  
والزاوية ا ب ي حتى تعدل الاخرى فالباقية  
ي ب د تعدل الثالثة لان هذه الثلاث  
زوايا تعدل قائمتين (فرع ق ١٢ ك ١)

قضية ه.ع

مفروض زاويتان من زوايا مثلث وضع من اضلاعه فعلينا ان نرسم  
المثلث

الزاويتان المفروضتان تكونان الموابيتين ضلع المفروض او تكون احدهما  
متوالية له والاخرى متقابلة له. ففي الحالة الثانية استعمل الثالثة حسب القضية الماضية  
فتكون هي الاخرى المتوالية

ثم ارسم الخط المستقيم ب س حتى يعدل الضلع المفروض وعند ب اجعل



الزاوية س ب ا تعدل احدى المتوابيتين  
وعند س اجعل الزاوية ب س ا تعدل  
الاخرى المتوالية فالخطان ب ا ب س  
يتقاطعان ويحدث من ذلك المثلث المفروض

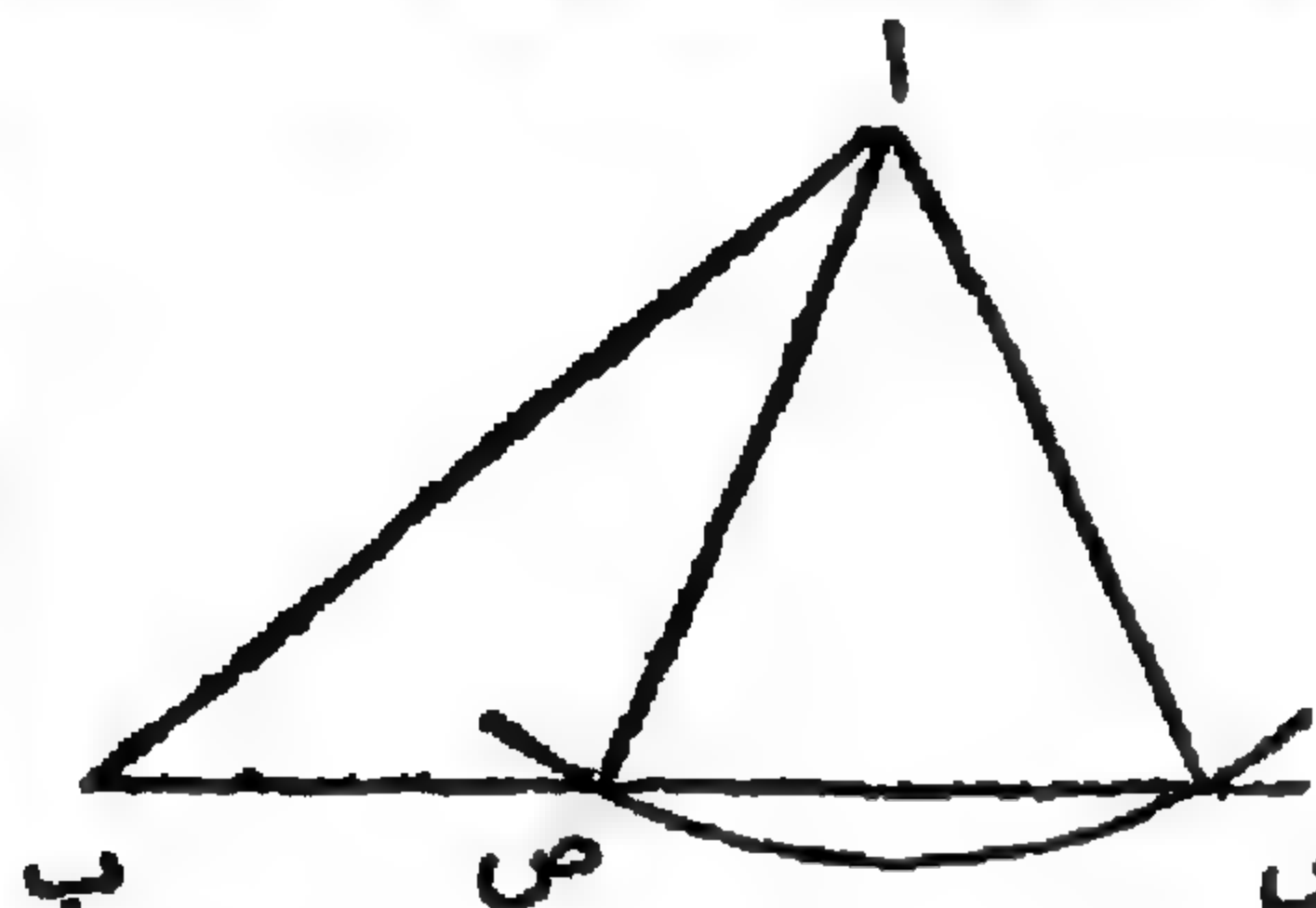
لانه لو كانا متوازيين لكانت الزاويتان عند ب وس تعدلان معاً قائمتين ولم تكونا  
زوايا مثلث فبالضرورة يكون ا ب س المثلث المطلوب

# قضية و.ع

مفروض ضلعان من اضلاع مثلث وزاوية متقابلة لاحدهما فعلينا ان

## نرسم المثلث

لهذه العملية حالتان احدهما متى كانت الزاوية المفروضة منفرجة. اجعل الزاوية



ب ص ا تعدل المفروضة ثم اجعل

ص ا يعدل الضلع الذي يوالي

الزاوية المفروضة فلو جعلت النقطة ا

مركزا والضلع الاخر ا ب بعدا ورسم

قوس لقطع ب س على جانبي ص فلا

يمكن ان يرسم اكثر من مثلث واحد ذي زاوية منفرجة على هذه الكيفية وهو المثلث

ب ص ا

ولو كانت المفروضة قائمة لرسم مثلثان لكن كان الوتران يقطعان ب س على

بعد واحد على جانبي العمود فكان المثلثان متساويين

الحالة الثانية متى كانت الزاوية المفروضة حادة والضلع المتقابل اطول من

المتوالي فالعمل فيها كما تقدم. اجعل ب س ا تعدل المفروضة و ا س يعدل

الضلع المتوالي ثم اجعل ا مركزا والضلع الاخر طولاً فاذا كان طوله ا ب فالقوس

يقطع س ب في ب ا رسم ا ب فيكون ب ا س المثلث المطلوب واذا كانت المفروضة

حادة والضلع المتقابل اقصر من الاخر فاجعل س ب ا تعدل المفروضة واجعل

ب ا يعدل الضلع المفروض المتوالي ثم اجعل ا مركزا و ا س بعدا فالقوس يقطع

ب س في س و ص على جانب واحد من ب فيحدث مثلثان ب ا ص ب ا س وكل

واحد منها مستوفٍ شروط العمل

تعليقة. في هذه الحالة الاخيرة لو كان طول الضلع الاقصر طول العمود من ا

الى ب س لحدث مثلث قائم الزاوية. ولو كان ذلك الضلع اقصر من العمود من ا

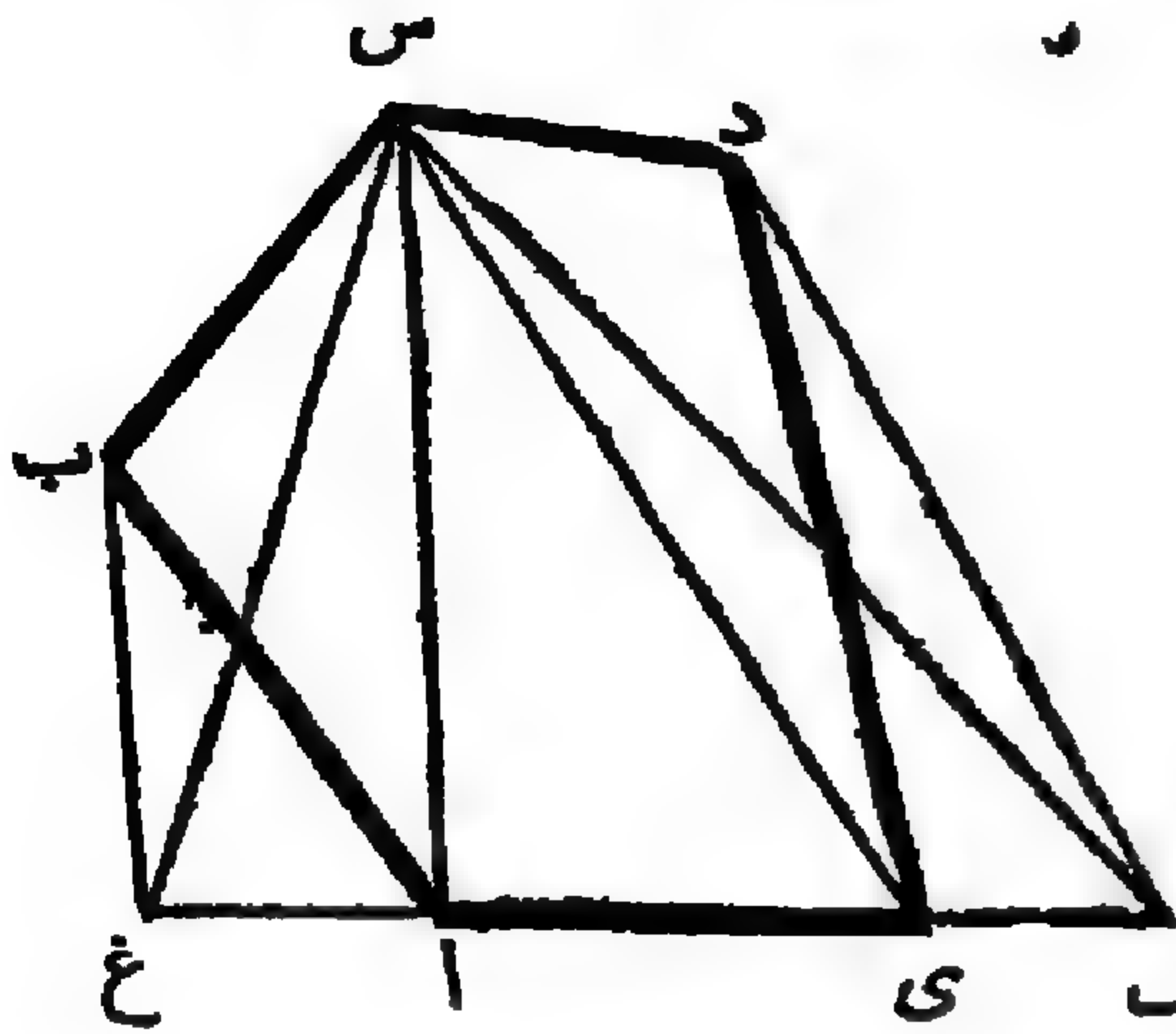
على ب س لكانت المسئلة غير ممكنة في كل الاحوال



### قضبة ز.ع

علينا ان نجد مثلثا يعدل شكلا مفروضا اذا اضلاع مستقيمة

ليكن ا ب س دى الشكل المفروض. ارسم القطر س دى الذي يفصل من



الشكل المثلث س دى. ارسم د ف

حتى يوازي س دى واخرج اى الى ف

ثم ارسم س ف فالشكل ا ب س دى

يعدل الشكل ا ب س دى لان

المثلثين س دى س دى ف دى هما على

قاعدة واحدة س دى وبين خطين

متوازيين س دى د ف فهما متساويان

(ق ٣٧ ك ١) ثم ارسم القطر س ا وارسم ب غ حتى يوازي س ا واخرج اى الى غ وارسم

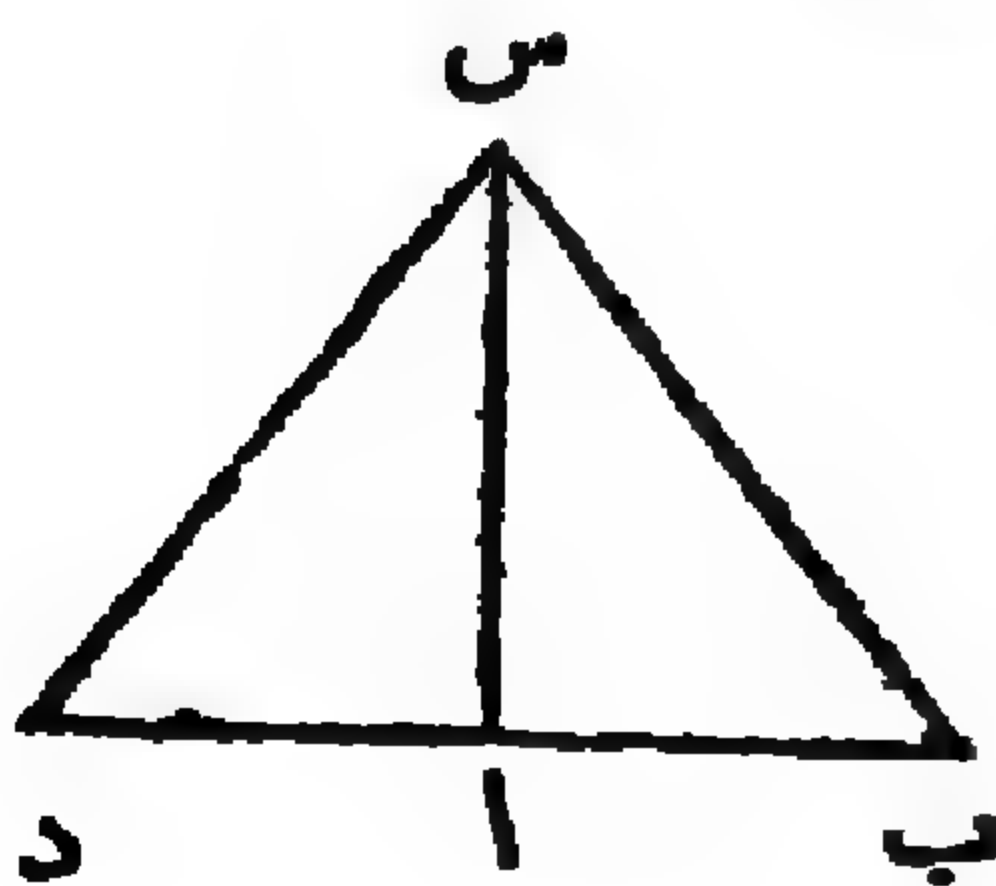
س غ فالشكل ا ب س دى قد تحول الى مثلث يعدله س غ ف

فرع. من حيث ان المثلث يمكن تحويله الى شكل ذي زوايا قائمة يعدله

فبالضرورة كل ذي اضلاع كثيرة يمكن تحويله الى شكل ذي زوايا قائمة يعدله

### قضبة ح.ع

علينا ان نستعلم ضلع مربع يعدل مجتمع مربعين



ارسم خطين غير محدودين مثل ا ب ا س

احدهما عموديه على الاخر. ثم اقطع ا ب حتى يعدل

ضلعاً من احد المربعين المفروضين واس الاخر. ارسم

ب س فلان ب ا س قائمة فربع ب س = مربع ب ا

س

مع مربع ا س (ق ٤٧ ك ١)

تعليقة. هكذا يرسم مربع يعدل مجتمع اى مربعات فرضت وذلك بتحويل ثلثة

منها الى اثنين واثنين الى واحد وهلم جرا

قضية ط.ع

علينا ان نجد ضلع مربع يعدل فضلة مربعين مفروضين

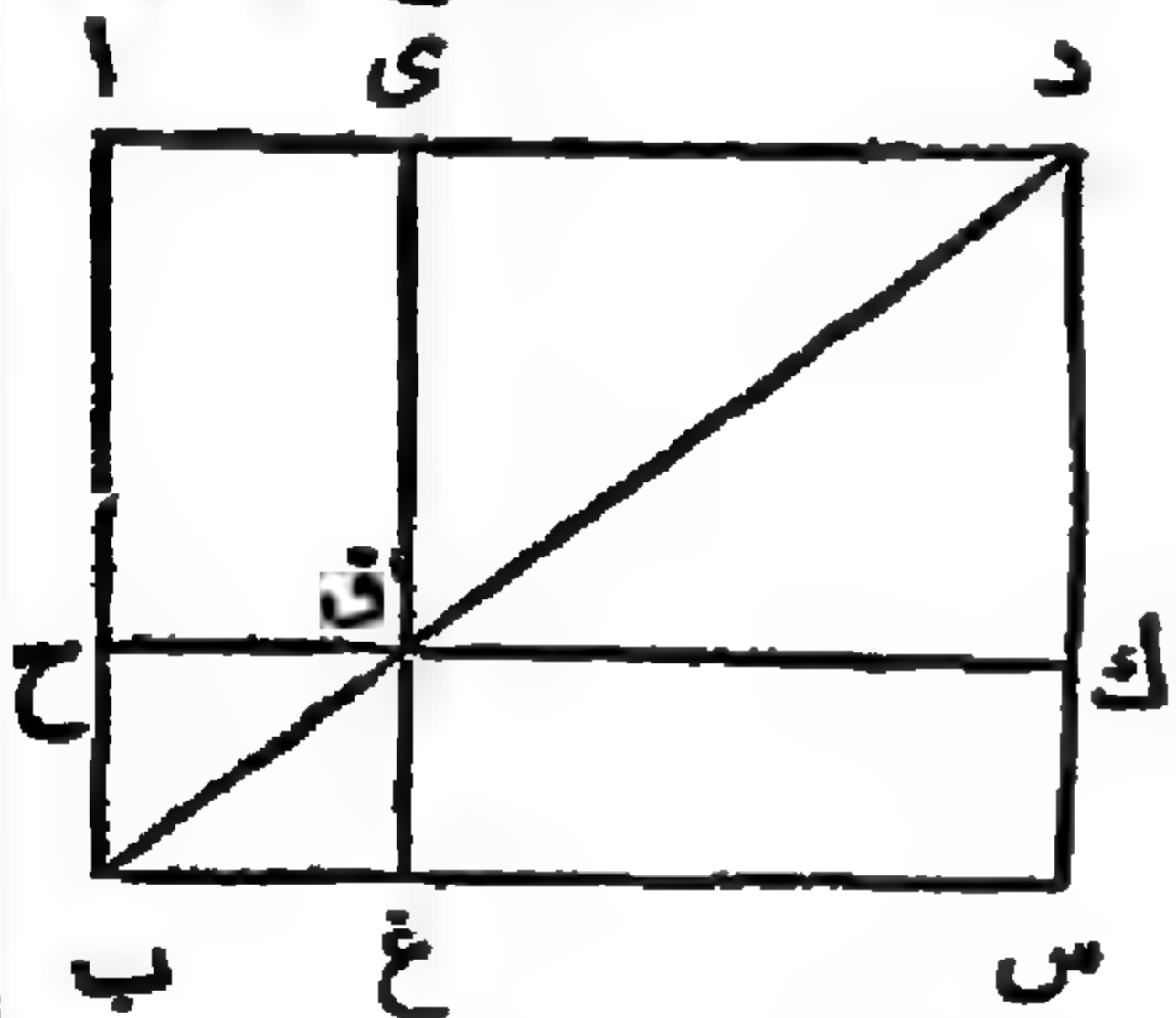
ارسم كما في القضية السابقة اس ا د احدهما عموداً على الاخر واجعل اس  
يعدل ضلع اصغر المربعين ثم اجعل س مركزاً وضلع المربع الاخر بعداً وارسم قوساً  
يقطع ا د في د فالربع المرسوم على ا د يعدل فضلة مربعي س د واس لان د اس  
قائمة واد<sup>2</sup> = س د<sup>2</sup> - اس<sup>2</sup> (ق ٤٧ ك ١ فرع اول)

قضية ي.ع

مفروض شكل ذو زوايا قائمة وعلينا ان نرسم اخر مثله له ضلع

مفروض

ليكن ا ي ق ح الشكل المفروض. اخرج ضلعاً من اضلاعه مثل ا ح حتى يصير  
ح ب على الطول المفروض. اخرج ا ي وارسم  
ب ق واخرجه حتى يلاقي ا ي في د ثم اخرج  
ي ق واجعل ق غ يعدل ح ب وارسم  
ب غ س وح ق ك حتى يوازي ا د ومن د  
ارسم د ك س حتى يوازي ا ب او ي غ



فالشكل غ ق ك س يعدل ا ح ق ي (ق ٤٢ ك ١) وله ق غ الضلع المفروض  
فرع. شكل ذو اضلاع كثيرة يمكن تحويله الى شكل ذي زوايا قائمة يعدله وله  
ضلع مفروض



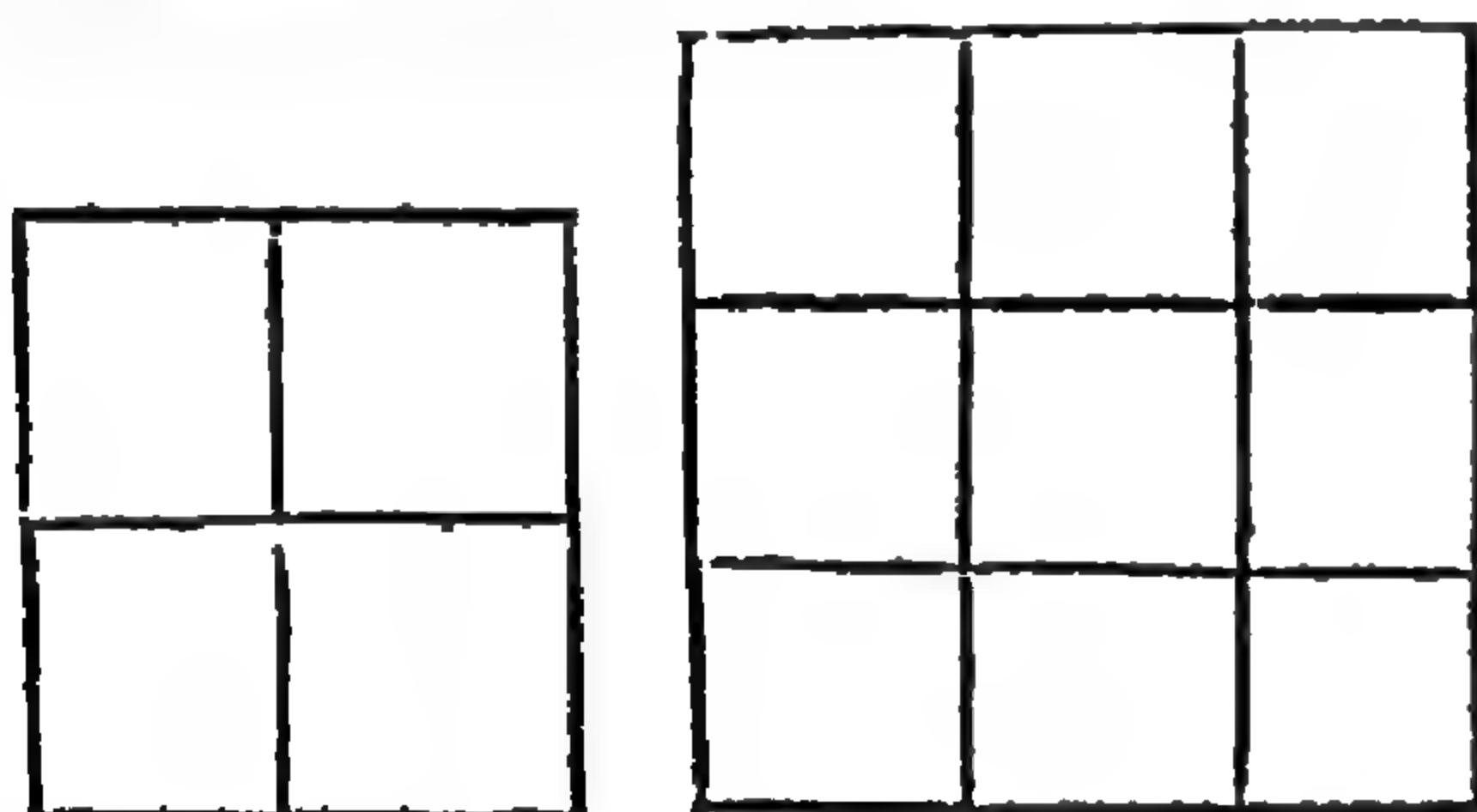
# اصول الهندسة

## الكتاب الثاني

### حدود

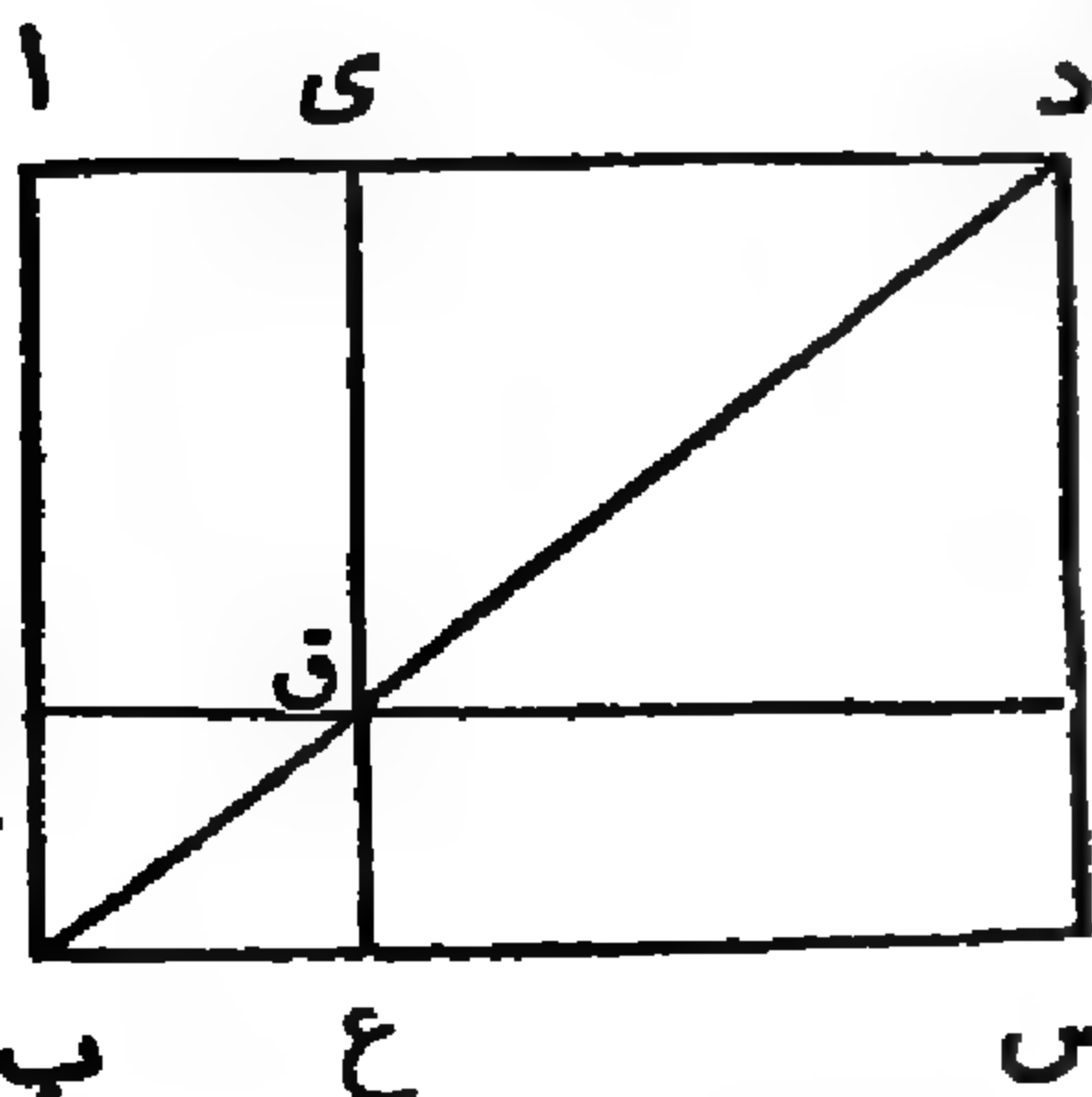
١ كل شكل متواري الاصلاح قائم الزوايا يُعَدُّ عنه بالضلعين المحيطين باحدى قائماته فالشكل اس المتوازي الاصلاح القائم الزوايا يسمى القائم الزوايا الذي يحيط به ا د و د س او ا د و ب وهكذا الى اخره ولاجل الاختصار يقال القائم الزوايا ا د ي د س او ا د س او ا د د س

حاصل خطين او مسطحهما في اصطلاح الهندسة هو القائم الزوايا المصطنع منها



مع ما يواربها. وقد تستعمل هذه العبارة ايضا في علم الحساب وعلم الجبر والمقابلة حيث يدل على حاصل كيتين غير متماثلتين. وادا كانا متماثلتين فمسطحهما مربع اي

كبة في دايها. فمربعات الاعداد ١ ٢ ٣ الى اخره هي ١ ٤ ٩ الى اخره والمربع المرسوم على مضاعف خط هو اربعة امثال المربع المرسوم على الخط ذاته. والمرسوم على ثلثة امثال خط هو تسعة امثال المرسوم على الخط ذاته

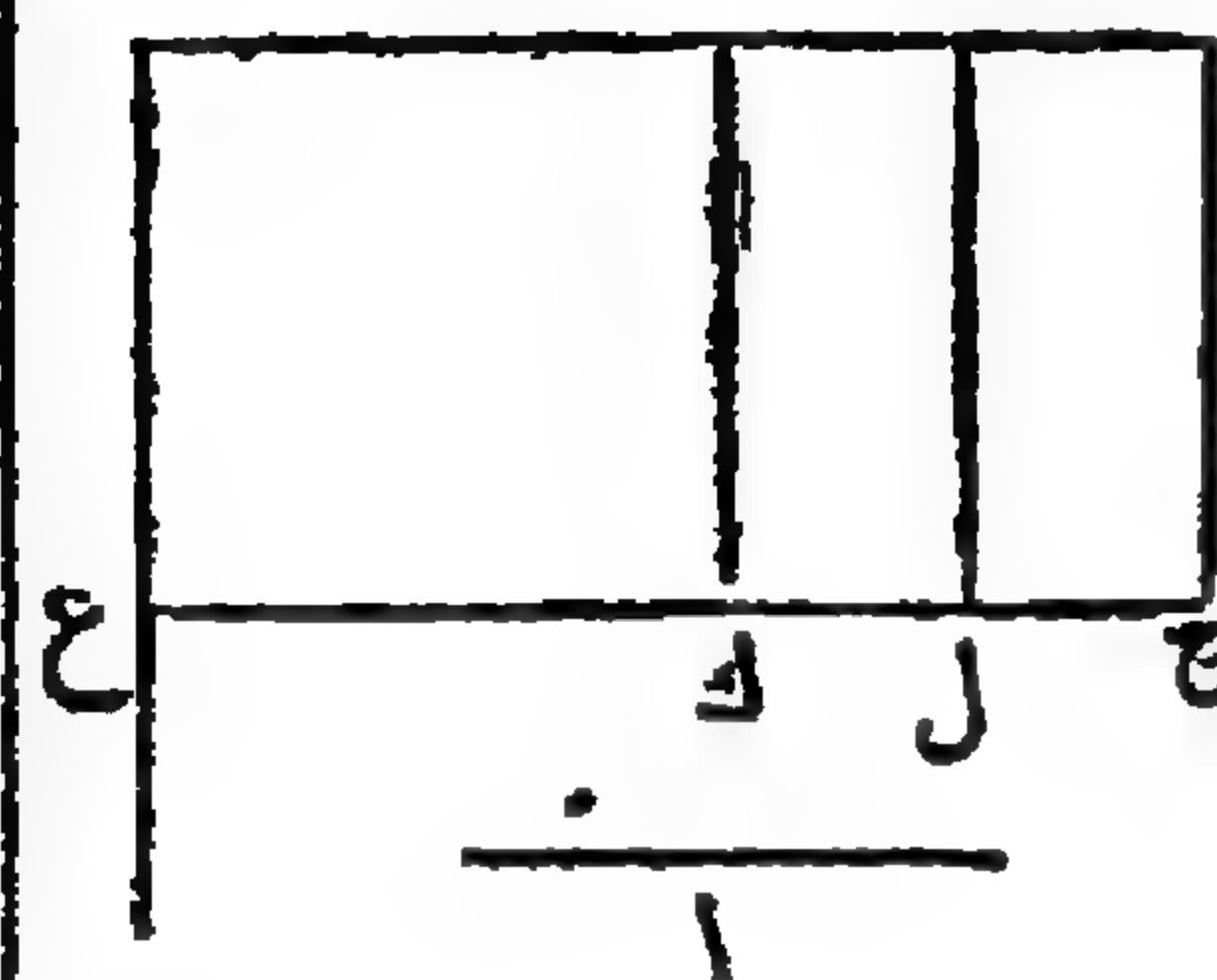


٢ شكل من الاشكال الواقعة على جابي القطر في كل شكل متواري الاصلاح مع المتين يسمى علم والشكل ح ع مع المتين اق ق س هو علم الشكل اس وكذلك ك ي ك مع اق وق س. ولاجل الاختصار يسمى الاول العلم اع ك او ي ح س

## القضية الاولى . ن

اذا فرض خطان مستقيمان واتقسم احدهما الى اقسام متعددة فالقائم  
الزوايا مسطحا يعدل مجموع القائات الزوايا مسطحات الخط الغير  
المقسوم في اقسام المتسوم

ليكن ب س خطا مستقيما وا خطا اخر مستقيما وليقسم ب س الى اقسام في د  
وي فالقائم الزوايا  $a \times b$  س يعدل القائات س ي د



الزوايا  $a \times b$  د مع  $a \times د$  ي مع  $a \times ي$  س  
من النقطة ب ارسم الخط ب ف عمودا  
على ب س (ق ١ ك ١) واقطع منه ب ع  
حتى يعدل ا (ق ٢ ك ١) ومن ع ارسم ع ح  
حتى يوازي ب س (ق ٢ ك ١) ومن النقط

الثلاث د ي س ارسم المخطوط د ك ي ل س ح حتى يوازي ب غ ف الاشكال  
ب ح ب ك د ل ي ح هي قائمات الزوايا وب ح = ب ك + د ل + ي ح

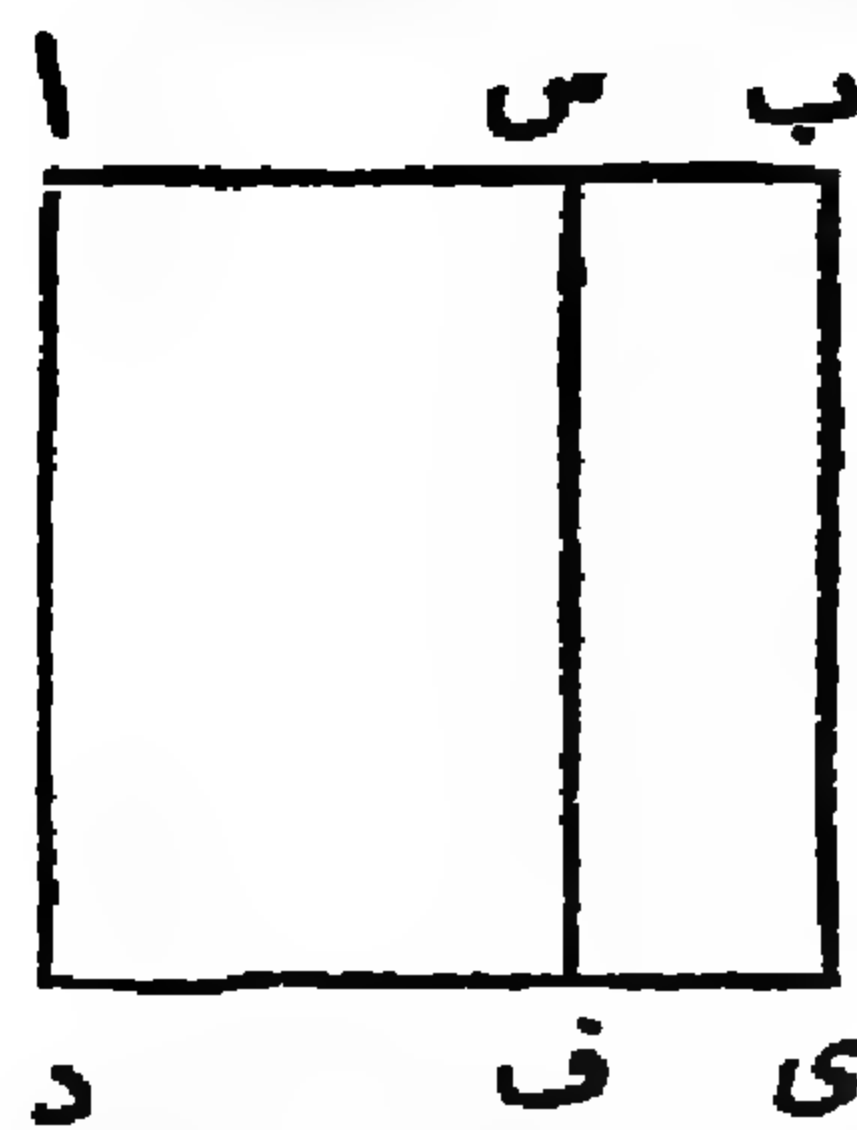
ولكن ب ح = ب ع + ع ب = س  $\times$  ب س لان ب ع = ا وب ك = ب غ  
 $\times$  ب د = ا  $\times$  ب د لان ب ع = ا ود ل = د ك  $\times$  د ي = ا  $\times$  د ي لان د ك =  
ب غ = ا (ق ٢ ك ١) وهكذا ايضا ي ح = ا  $\times$  ي س فاذا  $a \times ب س = ا \times ب د$   
 $+ ا \times د ي + ا \times ي س$  اية القائم الزوايا او المسطح  $a \times ب س$  يعدل مجموع  
القائات الزوايا  $a \times ب د + ا \times د ي + ا \times ي س$

تعليقة . خصائص اقسام المخطوط المبرهنة في هذا الكتاب تستعمل ايضا بسهولة  
من علم الجبر والمقابلة . ففي هذه القضية اذا فرضنا اقسام الخط ب س ب وس ود  
فلما  $a \times (ب + س + د) = ا \times ب + ا \times س + ا \times د$

## القضية الثانية . ن

اذا انقسم خط مستقيم الى قسمين والقائما الزوايا مسطحا كل الخط في  
كروا د س مسمي مد ل م س اربع كل الخط



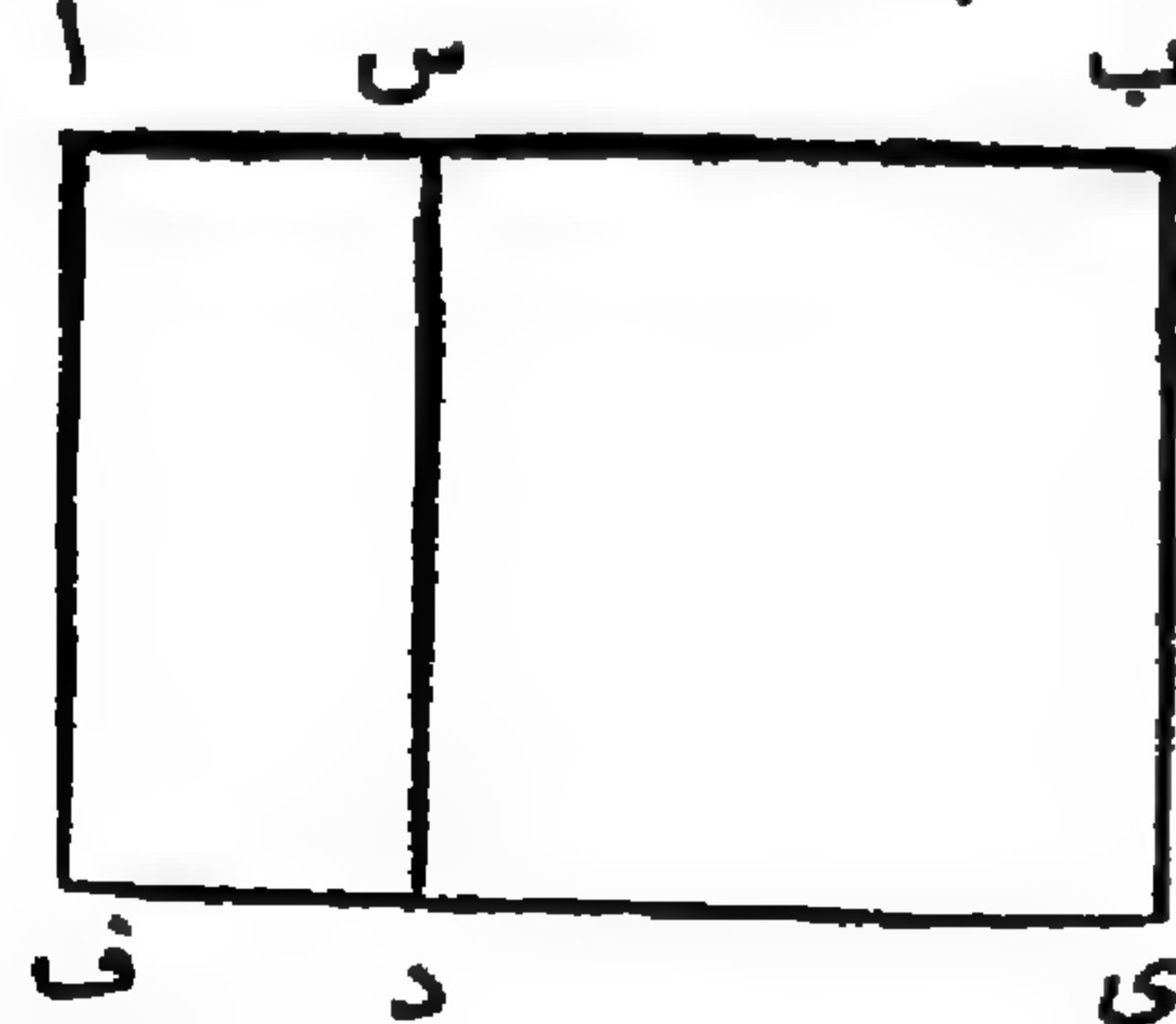


ليقسم الخط المستقيم اب الى قسمين في س فالقائم  
الزوايا اب  $\times$  ب س مع القائم الزوايا اب  $\times$  اس يعدلان  
مربع اب اي اب  $\times$  ب س + اب  $\times$  اس = اب<sup>٢</sup>  
ارسم على اب المربع ادي ب (ق ٤٦ ك ١) ومن  
س ارسم س ف حتى يوازي اداو ب ي (ق ٢١ ك ١)  
فلنا اف + س ي = اى ولكن اف = اد  $\times$  اس = اب  $\times$  اس لان اد = اب  
والشكل س ي = ب ي  $\times$  ب س = اب  $\times$  ب س و اى = اب<sup>٢</sup> فاذا اب  $\times$   
اس = اب  $\times$  ب س = اب<sup>٢</sup>

تعليقة. وهكذا بالجبر. فلنفرض اب = ا و اس = ب و س ب = د فلنا ا =  
ب + د اضرب جانبي المعادلة في ا فلنا ا<sup>٢</sup> = اب + اد

### القضية الثالثة. ن

اذا انقسم خط مستقيم الى قسمين فالقائم الزوايا مسطح كل الخط في  
احد قسميه يعدل القائم الزوايا مسطح القسمين مع مربع القسم المذكور  
ليقسم الخط المستقيم اب الى قسمين في س فالقائم الزوايا اب  $\times$  ب س يعدل



القائم الزوايا اس  $\times$  ب س مع مربع ب س  
ارسم على ب س المربع س دي ب  
(ق ٤٦ ك ١) واخرج ي د الى ف ومن ا  
ارسم اف حتى يوازي س داو ب ي (ق ٢١ ك ١)  
ك ١) فالشكل اى = اد + س ي ولكن

اى = اب  $\times$  ب ي = اب  $\times$  ب س لان ب ي = ب س و اد = اس  $\times$  س د =  
اس  $\times$  س ب و س ي = ب س<sup>٢</sup> فاذا اب  $\times$  ب س = اس  $\times$  س ب + ب س<sup>٢</sup>  
تعليقة. وهكذا بالجبر. فلنفرض اب = ا و اس = ب و س ب = د فلنا  
ا = ب + د اضرب الجانبيين في س فلنا اس = س ب + س<sup>٢</sup>

القضية الرابعة . ن

إذا اتقسم خط مستقيم إلى قسمين فربع الخط كله يعدل مربعي القسمين  
مع مضاعف القائم الزوايا مسطح القسمين

ليقسم الخط المستقيم  $AB$  إلى قسمين في  $C$  فربع  $AB$  يعدل مربع  $AC$  مع مربع  
 $BC$  مع مضاعف القائم الزوايا  $AC$  في  $C$   $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2 \times AC \times BC$

ارسم على  $AB$  المربع  $AD$  ب (ق ٤٦ ك ١) وارسم  $BE$  د ومن  $C$  ارسم  $CE$  غ

ف حتى يوازي  $AD$  و  $BE$  (ق ٢١ ك ١) ومن  $C$  ارسم  $CE$  ح  
ح حتى يوازي  $AB$  و  $DE$

فمن حيث ان  $C$  يوازي  $AD$  ويلاقيها ب  $D$   
فالزاوية الخارجة  $BCG$  تعدل الداخلة المتقابلة  
 $ADB$  (ق ٢٩ ك ١) ولكن  $ADB = ABE$  (ق ٥

ك ١) لان  $BA = AD$  لانها ضلعا مربع. فالزاوية  $BCA = BCG = BGE =$   
 $CEG$  (ق ٦ ك ١) ولكن  $BC = BE$  (ق ٢٤ ك ١) ومن  $C$   $BC = BE$  ك فالشكل  
 $BCGE$  متساوي الاضلاع وهو متساوي الزوايا ايضا لان  $BCG$  قائمة  
فتكون بقية زوايا الشكل  $BCGE$  قائمة (ق ٤٦ ك ١) فهو مربع على  
الضلع  $BC$  وهكذا ايضا يبرهن ان  $C$  مربع وهو على الضلع  $CG$  الذي  
يعدل  $AC$  فالشكلان  $BCGE$   $ACFE$  هما مربعان  $BC = CF$  ولان  $AC = CE$  يعدل  
التم  $CE$  (ق ٤٢ ك ١)  $AC = CE = CF = EF$   $AC \times BC = CF \times EF$  فلذلك ايضا  $CE$   
 $= AC \times BC + AC \times CE = AC \times (BC + CE) = AC \times AB$  ولكن  $AC \times BC =$   
 $BC^2$  فاذا  $AC \times BC = BC^2$   $AC \times CE = AC^2$   $AC \times AB = BC^2 + AC^2$   
ولكن  $AC \times AB = AC \times (BC + CE) = AC \times BC + AC \times CE = BC^2 + AC^2$

فرع . يتضح من هذه القضية ان الاشكال المتوازية الاضلاع على جانبي قطر  
مربع هي ايضا مربعات

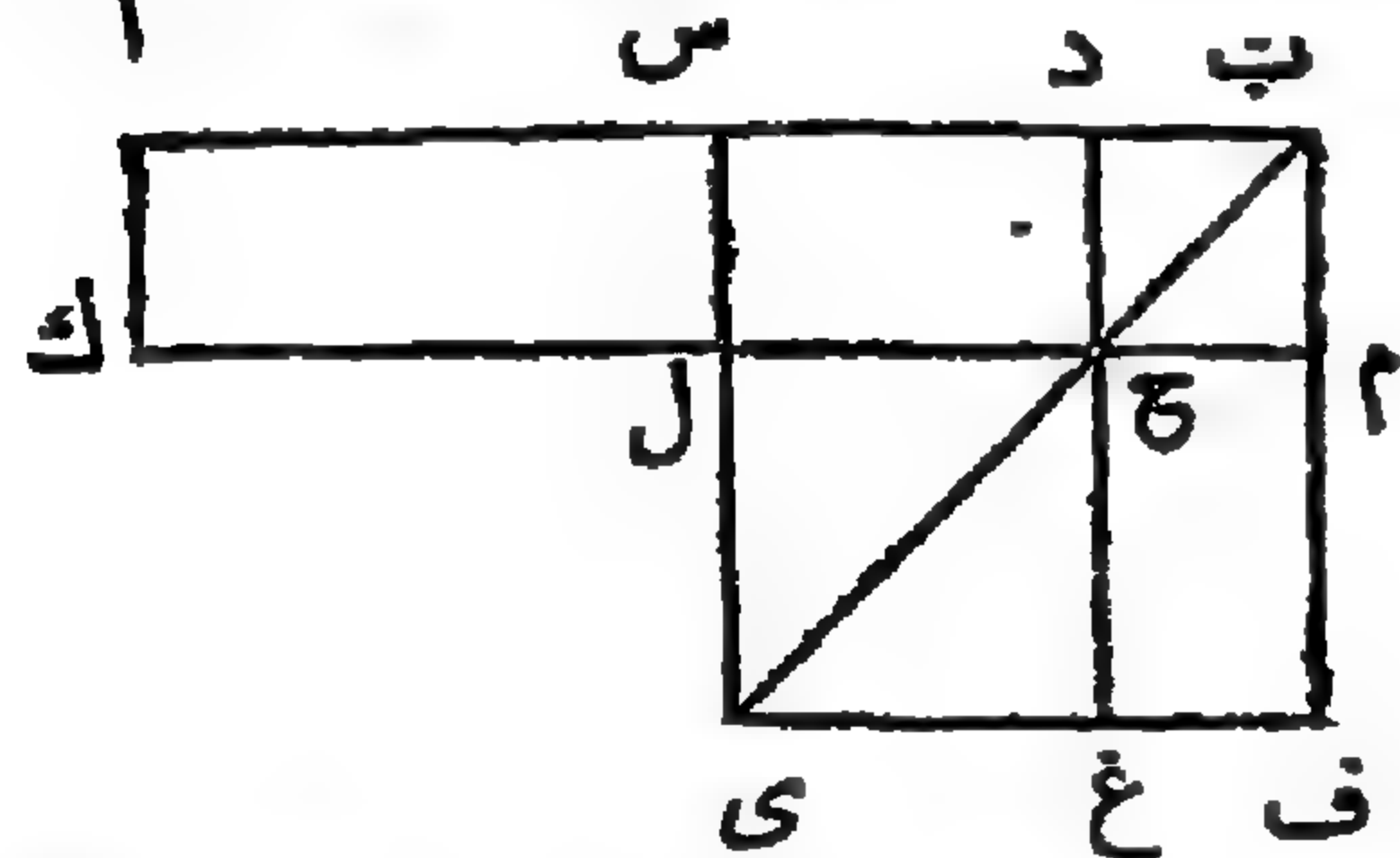


تعليقة . هذه القضية تبرهن ايضاً من مربع كمية ثنائية في الجبر فاذا فرض القسم  
اوب فلنا  $(ا + ب)^2 = ا^2 + ٢اب + ب^2$

### القضية الخامسة . ن

اذا انقسم خطٌ مستقيم الى قسمين متماثلين وايضاً الى قسمين غير  
متماثلين فالقائم الزوايا مسطح القسمين الغير المتماثلين مع مربع القسم  
الواقع بين تقطعي الانقسام يعدل مربع نصف الخط

ليقسم الخط المستقيم ا ب الى قسمين متماثلين في س وغير متماثلين في د فالقائم



الزوايا ا د × د ب مع مربع س د يعدل  
مربع س ب اي ا د × د ب + س د =  
س ب

ارسم على س ب المربع س ي ف ب

(ق ٤٦ ك ١) وارسم القطر ب ي ومن د ارسم د ح غ (ق ٢١ ك ١) حتى يوازيه  
س ي اوب ف ومن ح ارسم ك ل م حتى يوازي س ب اوي ف ومن ا ارسم ا ك  
حتى يوازي س ل اوب م

فن حيث ان س ح = ح ف فاذا اضيف الى كل واحد منها د م لنا س م =  
د ف ولكن ال = س م (ق ٢٦ ك ١) فاذا ا ل = د ف . اضيف الى كل واحد منها  
س ح فلنا ا ح = العلم س م غ . واح = ا د × د ح = ا د × د ب لان د ح = د ب  
(فرع ق ٤ ك ٢) فالعلم س م غ = ا د × د ب . اضيف الى كل واحد منها ل غ =  
س د فالعلم س م غ + ل غ = ا د × د ب + س د ولكن س م غ + ل غ = ب س  
فاذا ا د × د ب + س د = ب س

فرع . يتضح من هذه القضية ان فضلا مرتبتي خطين غير متماثلين ا س س د  
يعدل القائم الزوايا مسطح مجتمعهما في فضلتهما اي ان ا س - س د = (ا س + س د)  
< (ا س - س د)

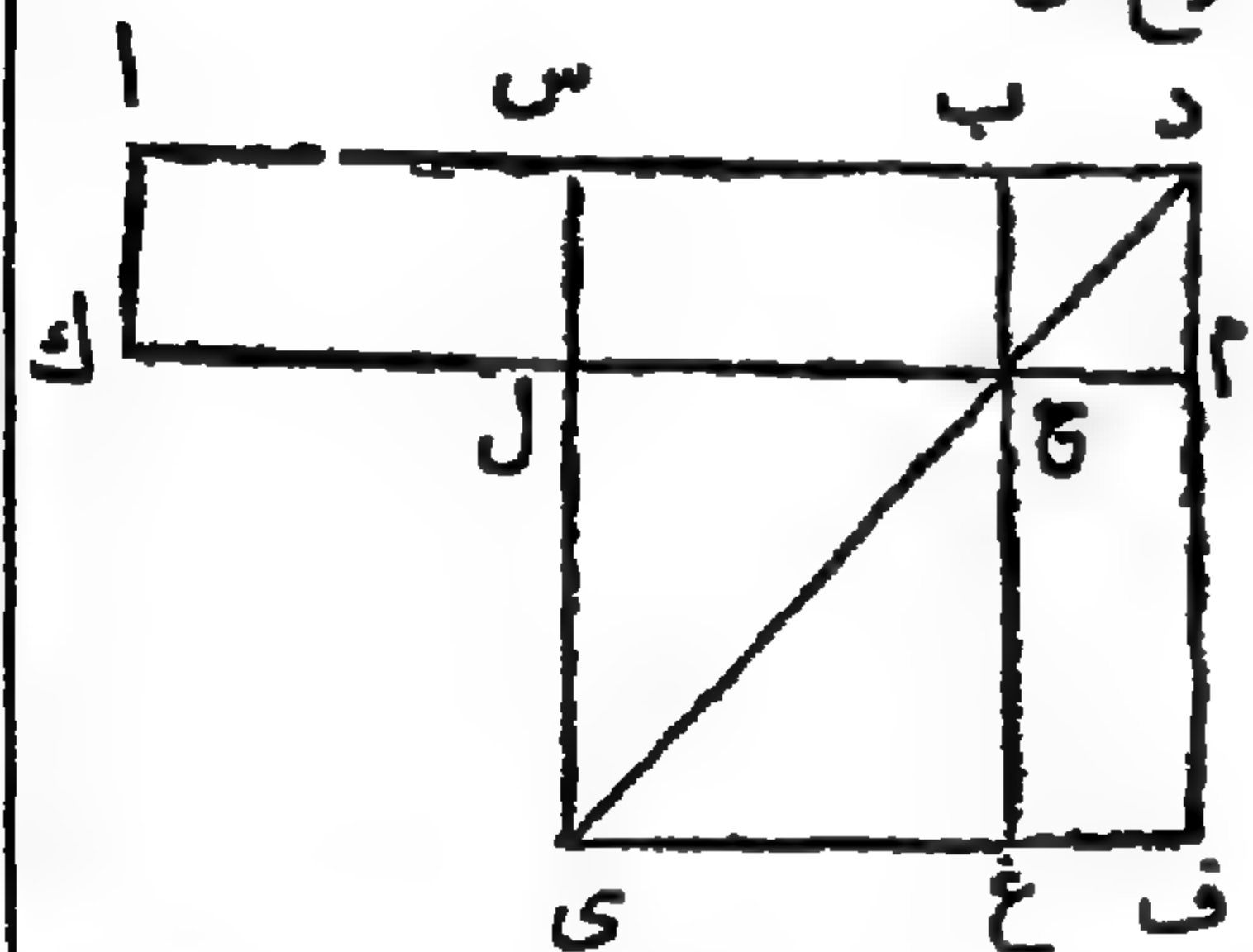
تعليقة . في هذه القضية لنفرض ا س = ا وس د = ب فلنا ا د = ا + ب ود ب

$a^2 - b^2 = (a + b) \times (a - b)$  = اے مربع میں سے بے مربع کا فرق  
 فضلہ بے فضلہ مرعہ

## القضية السادسة: ن

إذا تنصف خط مستقيم ثم أخرج على استقامته الى نقطة ما فالقائم  
الزوايا مسطح الخط كله بعد اخراجه في الجزء الذي قد زيد عليه مع  
مربع نصف الخط الذي قد تنصف يعدل مربع الخط المركب من  
النصف والجزء المزيد

لِيُقَسَّمِ الْمِخْلُفُ الْمُسْتَقِيمُ إِلَى قِسْمَيْنِ مِثَالَيْنِ فِيهِ مِنْ ثُمَّ يُخْرَجُ إِلَى دِفَالِ الْقَامِ  
الزَّوَايَا  $d \times d$  بِمَعْرِفَةِ مَرَبَعٍ مِنْ بٍ يَعْدِلُ مَرَبَعٍ مِنْ د .



تعليقة. وهكذا بالجبر. لنفرض  $12 = ب$  و  $ب = د$  فلنا  $د = 12 + ب$   
 ومن  $د = 1 + ب$  وبالضرب  $ب \times (12 + ب) = 12ب + ب^2$ . أضف الى  
 الجانين  $1$  فلنا  $ب \times (12 + ب) + 1 = 1 + 12ب + ب^2$   
 $1 + (1 + ب) = 1 + 12ب + ب^2$

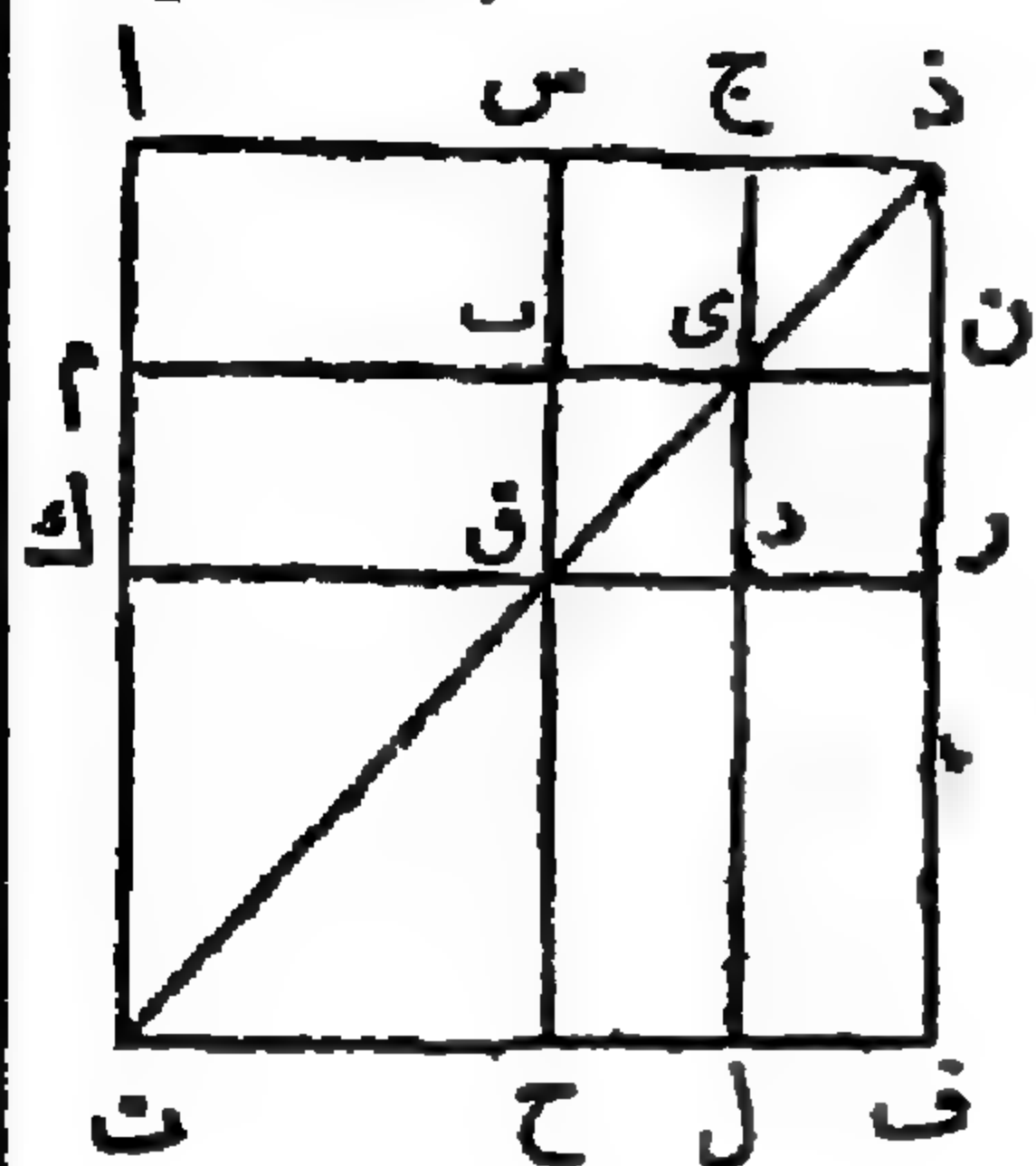




القضية الثامنة من

إذا اتقسم خط مستقيم الى قسمين فاربعة امثال القائم الزوايا مسطح كل  
الخط في احد القسمين مع مربع القسم الاخر يعدل مربع الخط المركب  
من الكل مع القسم الاول

ليقسم الخط المستقيم ا ج الى قسمين ب في س فاربعة امثال القائم الزوايا ا ج ×  
ج س مع مربع ا س يعدل مربع الخط المركب  
من ا ج مع ج س



اخرج ا ج الى ذ واجعل ج ذ يعدل  
ج س وعلى ا ذ ا رسم المربع ا ت ف ذ ولرسم  
شكلين مثل ما في القضية السالفة. فمن حيث  
ان ب ي = س ج (ق ٤٤ ك ١) وس ج = ج ذ

وج ذ = ن ي فلذلك ب ي = ن ي ولهذا السبب ايضا ق د = د ر ولان س ج =  
ج ذ وب ي = ي ن فالقائم الزوايا س ي وج ن متساويان وكذلك ايضا  
ب د = ي ر ولكن س ي = ي ر (ق ٤٢ ك ١) لانها متماثل الشكل س ر فاذا ج ن =  
ب د والقائمات الزوايا الاربع س ي ج ن ي ر ب د متساوية وهي معاً = ٤ س ي  
وايضاً لان س ج = ج ذ وج ذ = ج ي (فرع ق ٤٢ ك ٢) اوس ب ولان س ج =  
ب ي اوب ق فلذلك س ب = ب ق ولان س ب = ب ق وق د = د ر فالقائم  
الزوايا ا ب = م ق وق ل = د ف ولكن م ق = ق ل (ق ٤٢ ك ١) لانها متماثل  
فاذا ا ب = د ف فالارباع ا ب م ق ق ل د ف متساوية وهي معاً تعدل ٤ ا ب  
وقد تبرهن ان س ي ب د ج ن ي ر معاً = ٤ س ي فاصافة اشبة متساوية  
الى اشياء متساوية يكون كل العلم ا ر ح = ٤ ا ي و ا ي = ا ج × ج ي = ا ج ×  
ج س و ٤ ا ي = ا ج × ج س فالعلم ا ر ح = ا ج × ج س. اضع الى الجانبين  
ك ح او ا س (فرع ق ٤٢ ك ٢) فالعلم ا ر ح + ك ح = ا ج × ج س + ا س ولكن  
ا ر ح + ك ح = ا ف = ا ذ فاذا ا د = ا ج × ج س + ا س

فرع اول من حيث ان ا ذ هو مجتمع الخطين ا ج ج س واس فضلتهما

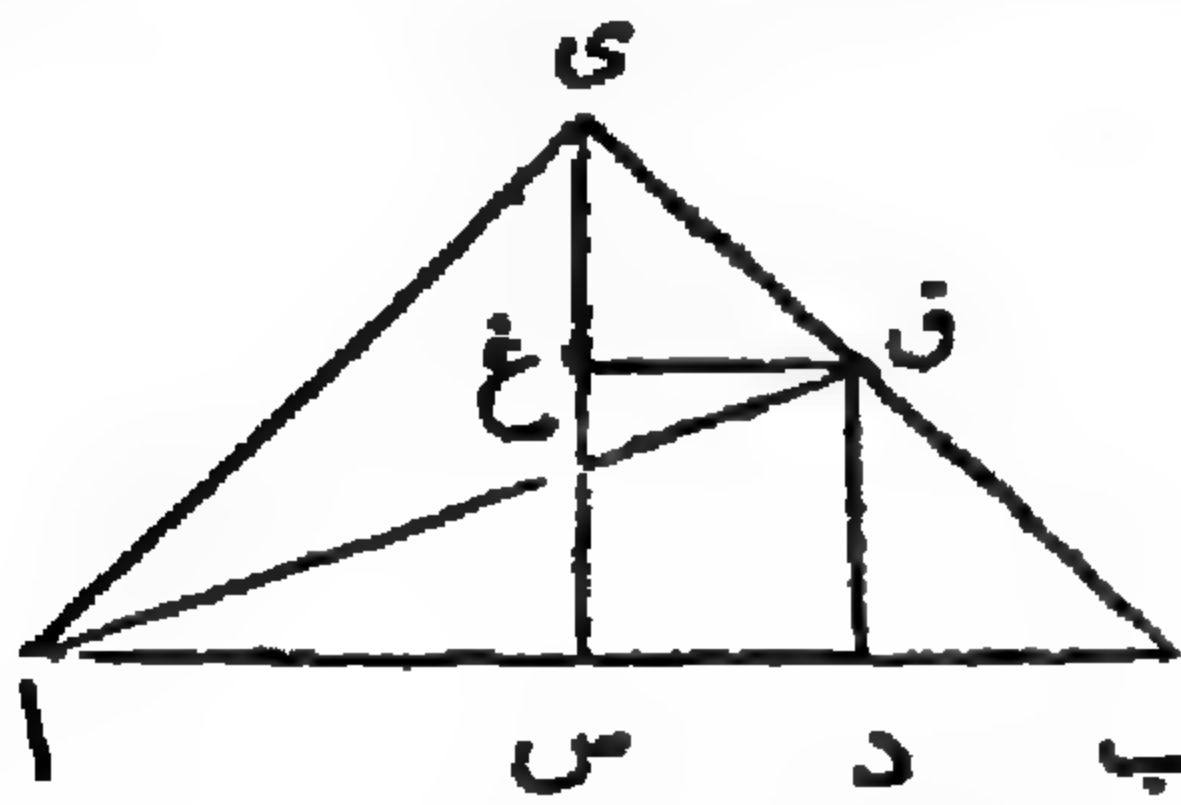


فاربعة امثال القائم الزوايا مسطح خطين مع مربع فضلتهما يعدل مربع مجتمع الخطين  
 فرع ثان. بما انه قد تبرهن من هذه القضية ان مربع من ذ هو اربعة امثال  
 مربع من ج يتضح ان مربع خط هو اربعة امثال مربع نصفه  
 تعلية. لنفرض  $ا = س$  و  $ا = س$  و  $س = ج$  و  $ب = د$  و  $س + س = ٢ ب$  و  $ا =$   
 $ب + س$ . اضرب الجانبين في  $٤ ب$  فلنا  $٤ ا ب = ٤ ب + ٤ ب س$  اضف  $س$   
 الى الجانبين فلنا  $٤ ا ب + س = ٤ ب س + ٤ ب + س$  اي  
 $٤ ا ب + س = (س + ٢ ب)$

### القضية التاسعة. ن

اذا اتقسم خط مستقيم الى قسمين متماثلين وايضاً الى قسمين غير  
 متماثلين فمربعاً القسمين الغير المتماثلين معاً يعدلان مضاعف مربع  
 نصف الخط مع مضاعف مربع الجزء الواقع بين تقطعي الانقسام

ليقسم الخط المستقيم اب الى قسمين متاثلين في س وغير متاثلين في د فمربعاً  
 اد دب معاً يعدلان مضاعف مربعي  
 اس س د



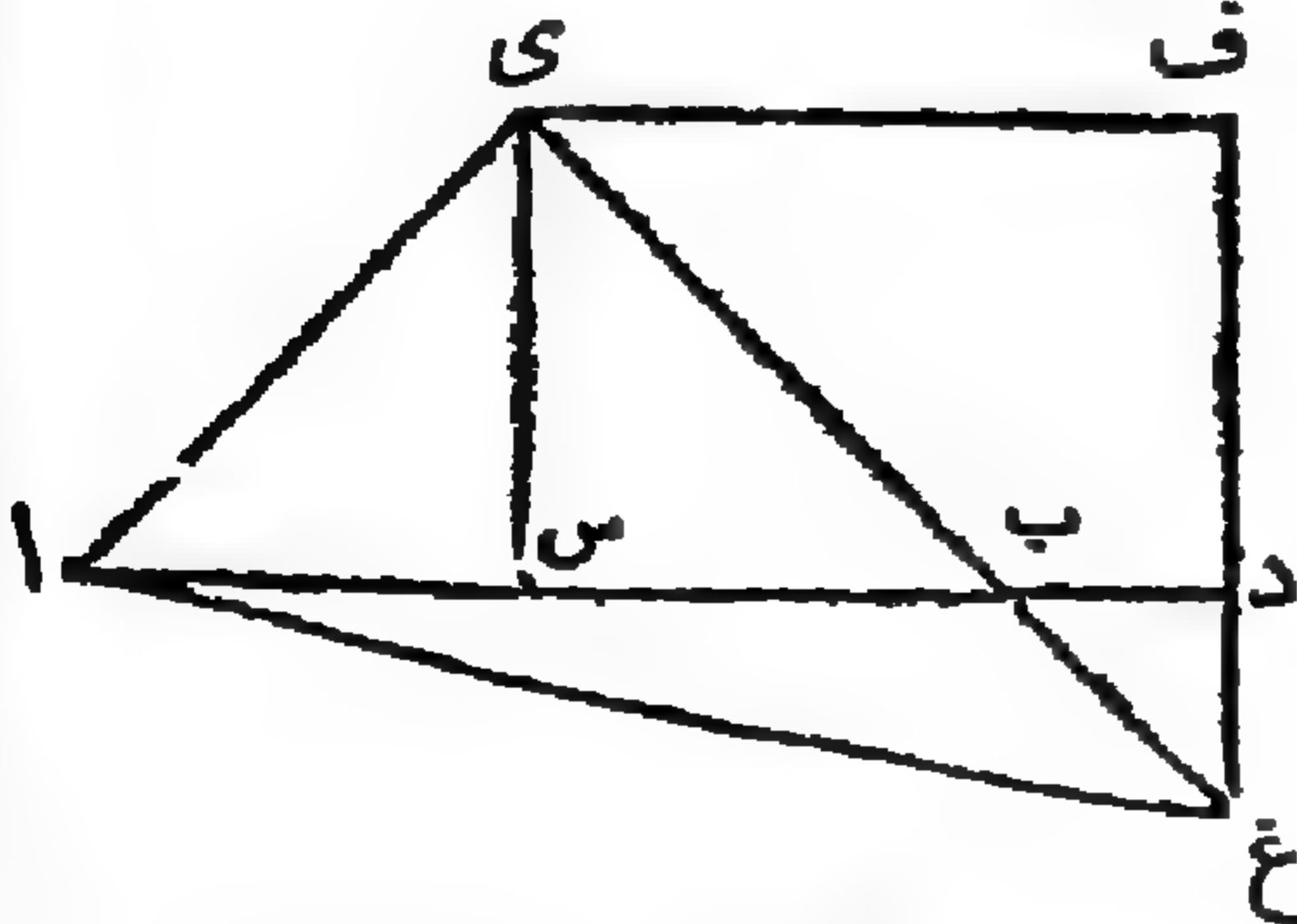
من س ا رسم س ي (ق ١١ ك ١)  
 عموداً على اب واجعل س ي يعدل اس

اوس ب. ا رسم ا ي وى ب ومن دارسم دق (ق ٢١ ك ١) حتى يوازى س ي.  
 ومن ق ا رسم ق غ حتى يوازى اب وارسم اق. فمن حيث ان اس يعدل س ي  
 فالزاوية ا س تعدل الزاوية ا ي س (ق ٢١ ك ١) وهما معاً قائمة لان اس ي  
 قائمة (فرع ٤ ق ٢٢ ك ١) ولهذا السبب ايضاً كل واحدة من الزاويتين س ي ب  
 س ب ي نصف قائمة. فالكل ا ي ب قائمة. ومن حيث ان غ ي ق نصف قائمة  
 وى غ ق قائمة لانها تعدل الداخلة المتقابلة س ب (ق ٢٦ ك ١) فالباقية ي ق غ  
 تعدل نصف قائمة. فالزاوية غ ي ق تعدل ي ق غ والضلع ي غ يعدل الضلع  
 غ ي (ق ٦ ك ١) وايضاً لان الزاوية عند ب هي نصف قائمة وق د ب قائمة لانها تعدل

الداخلة المتقابلة  $س ب$  (ق ٢٩ ك ١) فالباقية  $د ق ب$  هي نصف قائمة. فالزاوية عند  $ب$  تعدل الزاوية  $د ق ب$  والضلع  $ق د$  يعدل الضلع  $د ب$  (ق ٦ ك ١) ولأن  $اس = س ي$   $اس = س ي$   $واس = س ي$   $اس = س ي$  ولكن (ق ٤٧ ك ١)  $اي = اس + س ي$  فاذا  $اي = اس$  وايضاً لأن  $ي غ = غ ق$   $ي غ ق = غ ق$   $وي غ + غ ق = غ ق$  ولكن  $ي ق = ي غ + غ ق$  فاذا  $ي ق = غ ق$   $اس د$  لأن  $س د = غ ق$  (ق ٢٤ ك ١) وقد تبين ان  $اي = اس$  فاذا  $اي = ي ق$   $اس = اس + اس د$  ولكن (ق ٤٧ ك ١)  $اق = اي + ي ق$  واد  $+ د ق = اق$  اي  $اد + د ب = اق$  فاذا  $اد + د ب = اس + اس د$  تعليقة. هذه القضية واضحة من الجبر اذا فرضنا  $اس = ا$  و  $س د = ب$  و  $ا د = ب - ا$  و  $د ب = ب$  فلنا  $(ب + ا) + (ب - ا) = ب + ب$

### القضية العاشرة. ن

اذا تنصّف خط مستقيم ثم أخرج الى نقطة ما فربّع كل الخط بعد اخراجه ومربّع الجزء الذي قد زيد اليه ها معاً مضاعف مربع نصف الخط الذي قد تنصّف مع مربع الخط المركب من النصف والجزء المزيّد لينصف الخط المستقيم  $اب$  في  $س$  ويخرج الى النقطة  $د$  فربعا  $اد د ب$  ها معاً



مضاعف مربعي  $اس س د$  من  $س$  ارسم  $س ي$  عموداً على  $اب$  (ق ١١ ك ١) واجعل  $س ي$  يعدل  $اس$  او  $س د$  ارسم  $اي$  و  $ي ب$  ومن  $ي$  ارسم  $ي ف$  (ق ٢١ ك ١)

حتى يوازي  $اب$  ومن  $د$  ارسم  $د ف$  حتى يوازي  $س ي$ . فلأن  $ي ف$  يلاقي المتوازيين  $س ي$   $د ف$  فالزاويتان  $س ي ف$   $ي ف د$  هما معاً قائمتان (ق ٢٩ ك ١) فتكون  $ب ي ف ي ف د$  معاً اقل من قائمتين ولا بد من التقاء  $ي ب$  و  $ف د$  اذا أخرجنا (ق ٢٩ ك ١) لنفرض التقاءهما في  $غ$  وارسم  $اغ$  فلأن  $اس = س ي$  فالزاوية  $س ي ا$



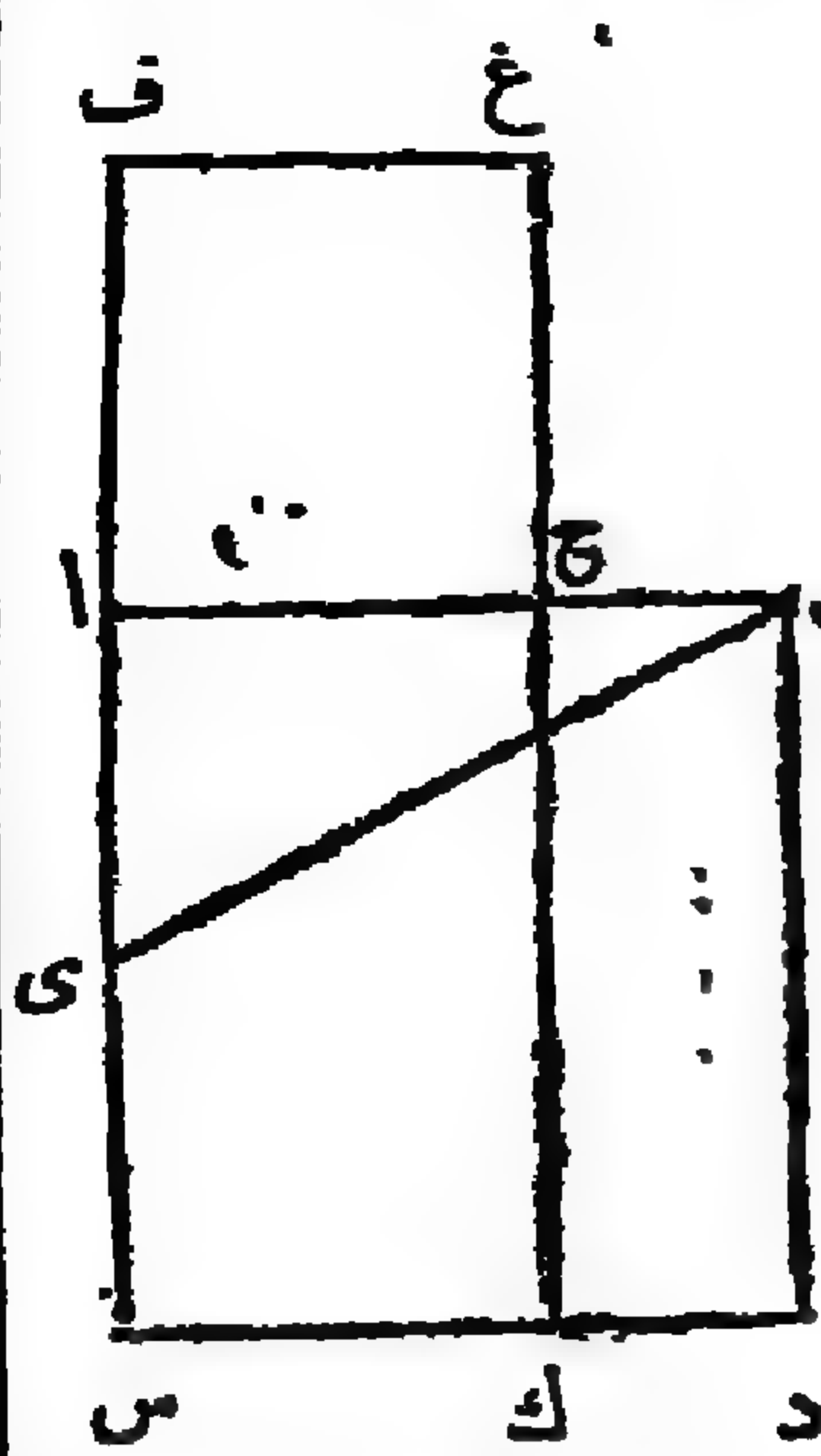
= ي ا س (ق ٥ ك ١) و ا س ي قائمة فكل واحدة من س ا ي س ي ا هي نصف قائمة (ق ٢٢ ك ١ فرع ٤) ولهذا السبب كل واحدة من س ي ب س ب ي ايضاً نصف قائمة فتكون ا ي ب قائمة. ومن حيث ان ي ب س نصف قائمة فالزاوية د ب غ ايضاً نصف قائمة (ق ١٥ ك ١) لانها متقابلتان وب د غ قائمة لانها تعدل المتبادلة د س ي (ق ٢٩ ك ١) فالباقية د غ ب نصف قائمة وتعدل د ب غ فالضلع ب د يعدل الضلع د غ (ق ٦ ك ١) ومن حيث ان ي غ ف نصف قائمة والزاوية عند ف قائمة لانها تعدل المتقابلة ي س د (ق ٢٤ ك ١) فالباقية ف ي غ نصف قائمة وتعدل ي غ ف فالضلع ف ي يعدل الضلع ف غ (ق ٦ ك ١) ولان ي س يعدل س ا ي س = س ا و ي س = س ا و ا ي = ا ي و ا س = ا س + س ي (ق ٤٧ ك ١) فاذا ا ي = ا س و لان ي ف = ف غ ي ف = ف غ و ي ف + ف غ = ف ي ف = ف غ (ق ٤٧ ك ١) و ي ف = س د فاذا ي غ = ا س د وقد تبهرن ان ا ي = ا س فاذا ا ي + ي غ = ا س + ا س د و ا غ = ا ي + ي غ (ق ٤٧ ك ١) فاذا ا غ = ا س + ا س د و ا غ = ا س د + د غ (ق ٤٧ ك ١) = ا د + د ب فاذا ا د + د ب = ا س + ا س د

تعليقة. اذا فرضنا ان ا س = ا و ب د = ب و ا د = ا + ب و س د = ا + ب فلنا (ا + ب) + ب = ا + ا + ب = ا + ا + ب ولكن ا + ا + ب = ا + ب = ا + ب فاذا (ا + ب) + ب = ا + ا + ب = ا + ب = ا + ب

### القضية الحادية عشرة. ع

علينا ان تقسم خطاً مستقيماً مفروضاً الى قسمين حتى يعدل القائم الزوايا مسطح الكل في احد القسمين مربع القسم الآخر

ليكن ا ب الخط المستقيم المفروض فعلياً ان نقسمه الى قسمين حتى يعدل القائم الزوايا مسطح ا ب في احد قسميه مربع القسم الآخر. ارسم على ا ب المربع ا ب د س (ق ٤٦ ك ١) ونصّف ا س في ي (ق ١٠ ك ١) ارسم ب ي واخرج س ا الى ف واجعل ي ف حتى يعدل ي ب (ق ٢ ك ١) وعلى ا ف ارسم المربع ف غ ح ا



(ق ٤٦ ك ١) فقد انقسم اب في ح حتى يعدل

القائم الزوايا اب  $\times$  ب ح مربع اح

أخرج غ ح الى ك. فمن حيث ان اس قد

تنصف في ي ثم أخرج الى ف فالقائم الزوايا

س ف  $\times$  ف ا مع مربع اي يعدل مربع ي ف

(ق ٦ ك ٢) ولكن ي ف يعدل ي ب فالقائم

الزوايا س ف  $\times$  ف ا مع مربع اي يعدل مربع

ي ب ولكن مربع ي ب يعدل مربع ب ا مع

مربع اي (ق ٤٧ ك ١) لان ب ا ي قائمة فالقائم

الزوايا س ف  $\times$  ف ا مع مربع اي يعدل مربع ب ا مع مربع اي. اطرح المشترك مربع

اي فالباقي القائم الزوايا س ف  $\times$  ف ا يعدل مربع اب وس ف  $\times$  ف ا يعدل الشكل

ف ك لان ف ا = ف غ واد يعدل مربع اب فالشكل ف ك يعدل ا د اطرح

الجزء المشترك اك فالباقي ف ح يعدل الباقي ح د ولكن ح د = ا ب  $\times$  ب ح لان

ا ب = ب د و ف ح هو مربع اح فالقائم الزوايا اب  $\times$  ب ح يعدل مربع اح فقد

انقسم اب الى قسمين في ح والقائم الزوايا اب  $\times$  ب ح يعدل مربع اح

### القضية الثانية عشرة من

في كل مثلث ذي زاوية منفرجة اذا رُسم عمود من احدى الحادتين

على الضلع المقابل بعد اخراجه فمربع الضلع الذي يقابل المنفرجة

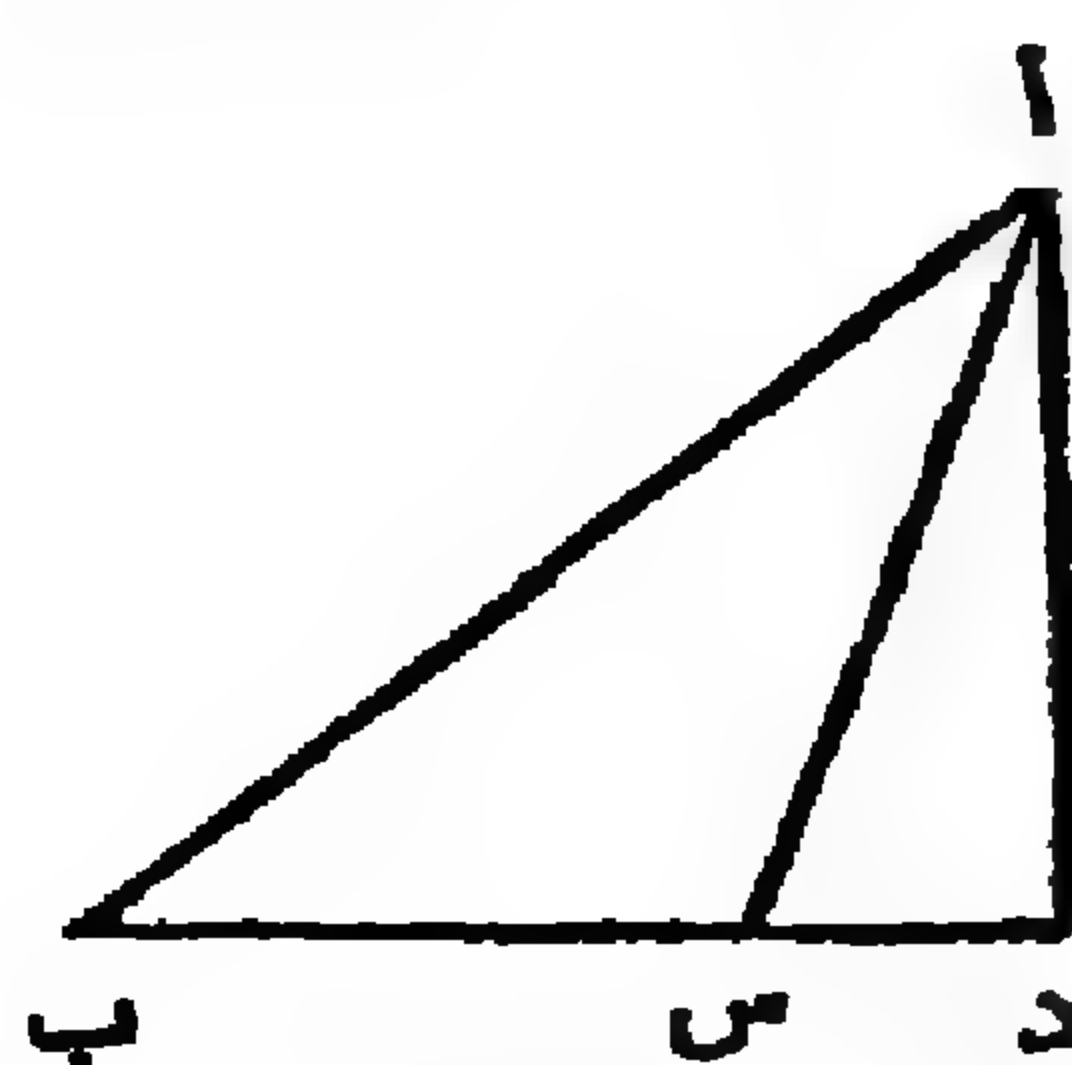
هو اكبر من مربعي المحيطين بالمنفرجة بمضاعف القائم الزوايا مسطح

الضلع الذي وقع عليه العمود في الجزء المزيد اي الواقع بين المنفرجة

والعمود

ليكن اب س مثلثا ذا زاوية منفرجة اس ب وليقع عمود من ا ب ا د على





ب ب س بعد اخراج د الى د (ق ١٢ ك ١) فمربع  
اب هو اكبر من مربعي اس وس ب بمضاعف  
القائم الزوايا ب س  $\times$  س د

فمن حيث ان ب د قد انقسم الى قسمين

في س فلنا (ق ٤ ك ٢)  $ب د = د' س'$

س د' + ٢ ب س  $\times$  س د اضف ا د' الى الجانبين فلنا ب د' + ا د' = ب س' +

س د' + ا د' + ٢ ب س  $\times$  س د ولكن ا ب' = ب د' + ا د' (ق ٤٧ ك ١) واس'

= س د' + ا د' فاذا ا ب' = ب س' + اس' + ٢ ب س  $\times$  س د اي ا ب' هو اكبر

من ب س' + اس' بمسطح ٢ ب س  $\times$  س د

### القضية الثالثة عشرة من

في كل مثلث مربع الضلع المقابل احدى الزوايا الحادة هو اصغر من  
مربعي الضلعين المحيطين بها بمضاعف القائم الزوايا مسطح احد  
هذين الضلعين في الجزء منه الواقع بين الزاوية الحادة وعمود عليه من  
الزاوية المقابلة

ليكن ا ب س مثلثا ولتكن الزاوية عند ب احدى زوايا الحادة وليقع على



الضلع ب س منه عمود ا د من الزاوية المقابلة  
(ق ١٢ ك ١) فمربع الضلع اس الذي يقابل الزاوية  
عند ب هو اصغر من مربعي س ب ب ا بمضاعف  
القائم الزوايا س ب  $\times$  ب د

اولا يقع العمود ا د داخل المثلث ا ب س

فلان الخط المستقيم س ب قد انقسم ب د فلنا (ق ٧ ك ٢)  $ب س = ب د' + د' س' =$

٢ ب س  $\times$  ب د + س د' اضف الى الجانبين ا د' فلنا ب س' + ب د' + ا د' =

٢ ب س  $\times$  ب د + س د' ولكن ب د' + ا د' = ا ب' وس د' + ا د' =

اس' (ق ٤٧ ك ١) فاذا ب س' + ا ب' = ٢ ب س  $\times$  ب د + اس' اي اس' هو

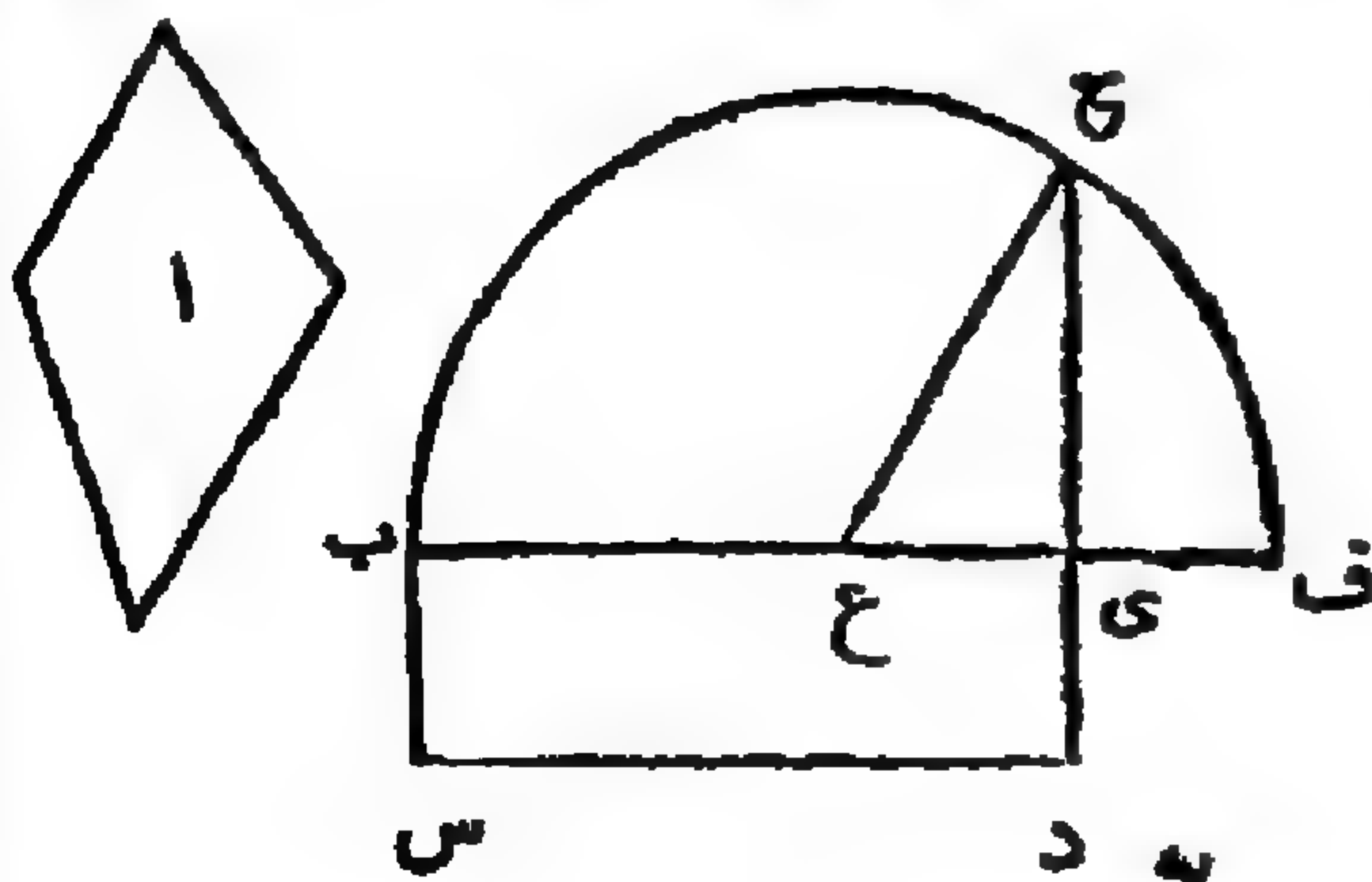
اصغر من  $\angle$  ب س  $\angle$  ا ب  $\angle$  بمسطح  $\angle$  ب س  $\times$  ب د

ثانياً ليقع العمود ا د خارج المثلث ا ب س (انظر شكل القضية السابقة) فمن حيث ان الزاوية عند د هي قائمة فالزاوية ا س ب هي اكبر من قائمة (ق ١٦ ك ١) و  $\angle$  ب  $\angle$  = (ق ١٢ ك ٢) ا س  $\angle$  + ب س  $\angle$  +  $\angle$  ب س  $\times$  ب س د اصف الى الجانين  $\angle$  ب س  $\angle$  فلنا ا ب  $\angle$  + ب س  $\angle$  = ا س  $\angle$  +  $\angle$  ب س  $\angle$  +  $\angle$  ب س  $\times$  ب س د ومن حيث ان الخط ب د قد اقسم في س فلنا (ق ٢ ك ٢) ب س  $\angle$  + ب س  $\times$  ب س د = ب س  $\angle$  + ب س  $\times$  ب د و  $\angle$  ب س  $\angle$  +  $\angle$  ب س  $\times$  ب د =  $\angle$  ب س  $\times$  ب د فاذا ا ب  $\angle$  + ب س  $\angle$  = ا س  $\angle$  +  $\angle$  ب س  $\times$  ب د و ا س  $\angle$  هو اصغر من ا ب  $\angle$  + ب س  $\angle$  بمسطح  $\angle$  ب د  $\times$  ب س ثالثاً ليكن الضلع ا س عموداً على ب س فيكون ب س الجزء بين العمود والزاوية الحادة عند ب والامر واضح (ق ٤٧ ك ١) ان ا ب  $\angle$  + ب س  $\angle$  = ا س  $\angle$  +  $\angle$  ب س  $\angle$  +  $\angle$  ب س  $\times$  ب س



### القضية الرابعة عشرة ع

علينا ان نرسم مربعاً يعدل شكلاً مفروضاً اذا اضلاع مستقيمة  
ليكن الشكل المفروض. علينا ان نرسم مربعاً يعدل الشكل ا. ارسم شكلاً ذا



زوايا قائمة ب ي د س واجعله  
يعدل ا (ق ٤٥ ك ١) فان كان  
ضلعاه ب ي ي د متساويين  
فهو المربع المطلوب والا فخرج  
ب ي الى ف واجعل ي ف  
يعدل ي د ونصف ب ف في

غ ومن المركز غ وعلى البعد غ ف ارسم دائرة ب ج ف واخرج د ي الى  
ح وارسم ح غ فلان الخط المستقيم ب ف قد اقسم الى قسمين متساويين في غ وغير  
متساويين في ي فالتام الزوايا ب ي  $\times$  ي ف مع مربع ي غ يعدل مربع غ ف



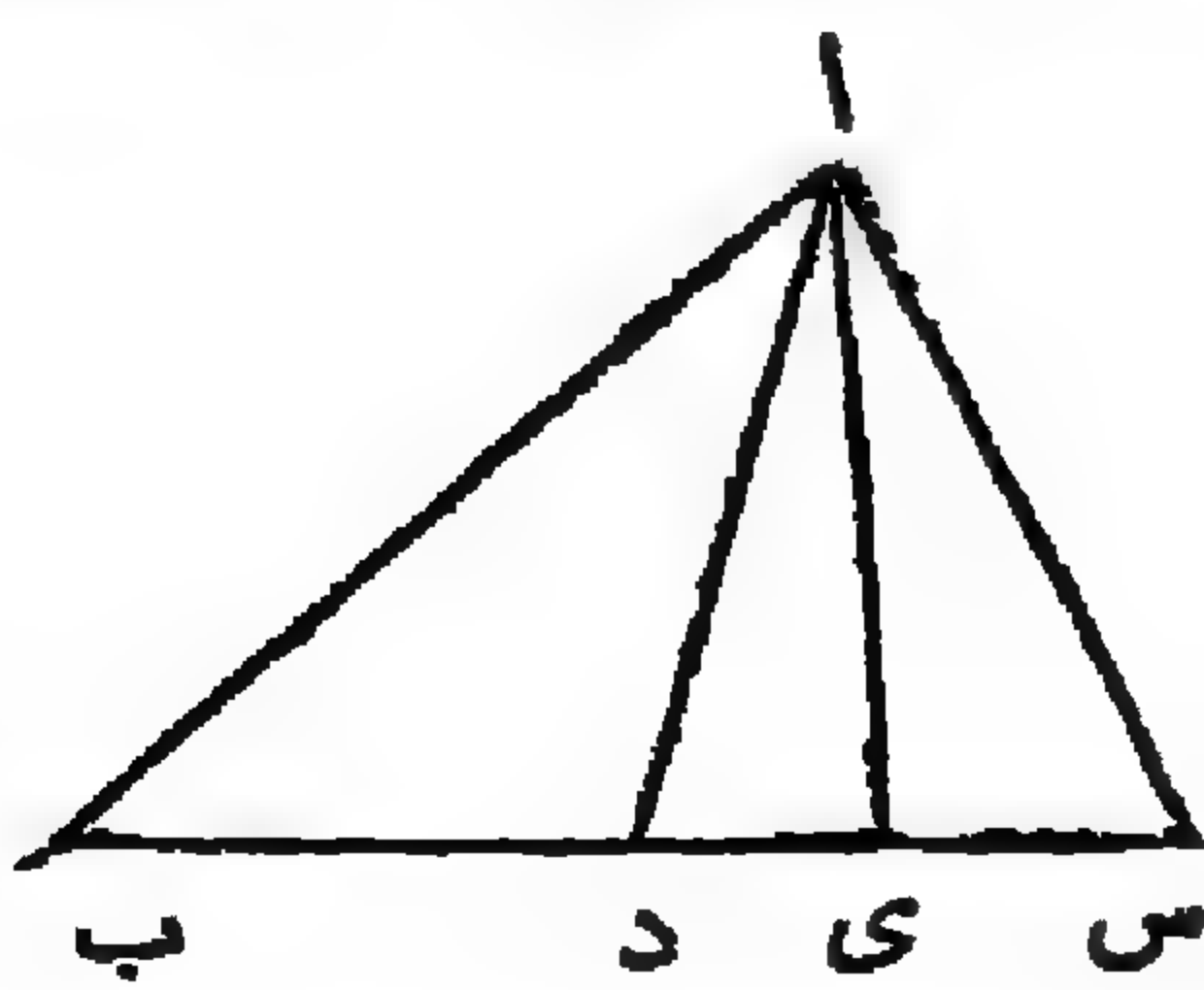
(ق ٥ ك ٢) و غ ف يعدل غ ح فالقائم الزوايا ب ي  $\times$  ي ف مع مربع ي غ يعدل مربع غ ح ومربع غ ح يعدل مربع ح ي مع مربع ي غ (ق ٤٧ ك ١) فالقائم الزوايا ب ي  $\times$  ي ف مع مربع غ ي يعدل مربع ح ي مع مربع ي غ اطرح المشترك مربع ي غ فللباقى القائم الزوايا ب ي  $\times$  ي ف يعدل مربع ح ي وب د يعدل ب ي  $\times$  ي ف لان ي د  $=$  ي ف فالشكل ب د يعدل مربع ح ي وب د يعدل الشكل ا فمربع ح ي يعدل الشكل ا فاذا رُسم على ح ي مربع فهو يعدل الشكل ا المفروض

مضافات

قضية ١٠ ن

اذا تنصّف ضلعٌ من اضلاعٍ مثلثٍ فجميع مربّعي الضلعين الآخرين يعدل مضاعف مربع نصف الضلع المتنصف مع مضاعف مربع الخط المرسوم من نقطة الاتصاف الى الزاوية المقابلة

ليكن ا ب س مثلثاً ولينصف الضلع ب س مة في د وارسم د ا الى الزاوية المقابلة فجميع مربّعي ب ا ا س يعدل مضاعف مربّعي ب د د ا



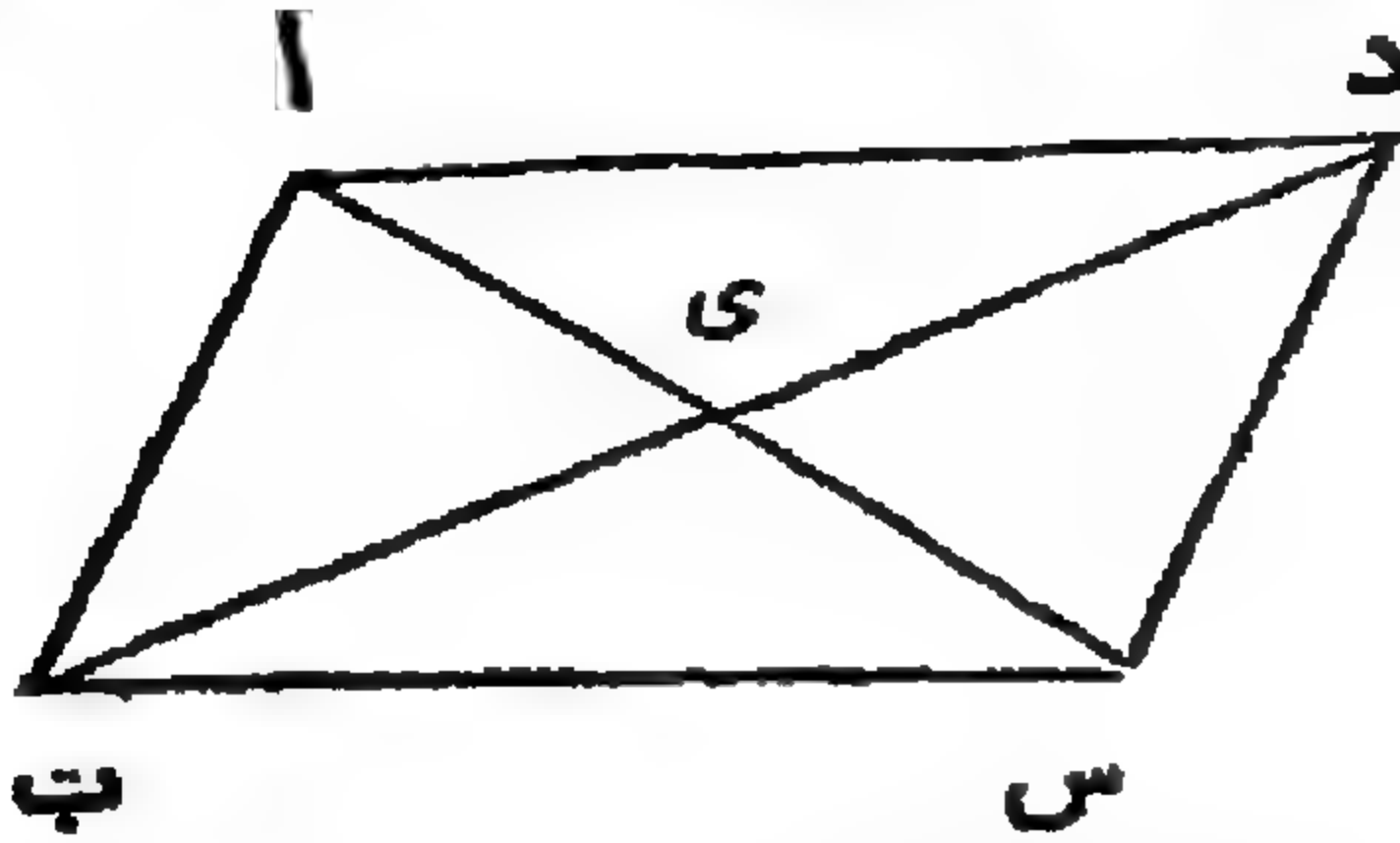
من الرسم ا ي عموداً على ب س فمن حيث ان ب ي قائمة ا ب (ق ٤٧ ك ١)  $=$  ب ي  $+$  ا  $+$  و ا س  $=$  س ي  $+$  ا ي  $+$  ا ب  $+$  ا س

$=$  ب ي  $+$  س ي  $+$  ا ي ومن حيث ان الخط المستقيم ب س قد انقسم الى قسمين متساويين في د وغير متساويين في ي فلنا (ق ٩ ك ٢)  $=$  ب ي  $+$  س ي  $=$  ب د  $+$  د ي فاذا ا ب  $+$  ا س  $=$  ب د  $+$  د ي  $+$  ا ي  $+$  ا ب  $+$  ا س ولكن د ي  $+$  ا ي  $=$  ا د (ق ٤٧ ك ١) و د ي  $+$  ا ي  $=$  ا د فاذا ا ب  $+$  ا س  $=$  ب د  $+$  ا د

## قضية ب. ن

في كل شكل ذي اضلاع متوازية مجتمع مربعي القطرين يعدل مجتمع  
مربعات الاضلاع

ليكن ا ب س د شكلاً متوازي الأضلاع فمجموع مربعي القطرين ا س ب د  
يعدل مجموع مربعات الاضلاع ا ب  
ب س س د د ا



لكن النقطة ي موضع تقاطع  
القطرين. فمن حيث ان الزاويتين

المتقابلتين ا ي د س ي ب هما متساويتان (ق ١٥ ك ١) وللتبادلتان ي ا د  
ي س ب متساويتان ايضاً (ق ٢٩ ك ١) فلنا في المثلثين ا د ي س ي ب زاويتان  
من الواحد تعدلان زاويتين من الآخر والضلعان اللذان يقابلان الزاويتين المتساويتين  
متساويان اي ا د و ب س (ق ٢٤ ك ١) فالضلعان الآخران متساويان (ق ٢٦ ك ١)  
اي ا ي = ي س و ي د = ي ب

فمن حيث ان ب د قد تنصف في ي لنا (ق ٢ ك ٢) ا ب<sup>٢</sup> + ا د<sup>٢</sup> = ا ب ي<sup>٢</sup>  
+ ا ي ا<sup>٢</sup> وهكذا ايضاً د س<sup>٢</sup> + س ب<sup>٢</sup> = ا ب ي<sup>٢</sup> + ا ي س<sup>٢</sup> = ا ب ي<sup>٢</sup> +  
ا ي ا<sup>٢</sup> لان ي س = ا ي فاذا ا ب<sup>٢</sup> + ا د<sup>٢</sup> + د س<sup>٢</sup> + س ب<sup>٢</sup> = ا ب ي<sup>٢</sup> + ا ي س<sup>٢</sup> +  
ا ي ب<sup>٢</sup> = ي ب د<sup>٢</sup> + ا ي ا<sup>٢</sup> = ا س<sup>٢</sup> (فرع ٢ ق ٨ ك ٢) لان ب د و ا س قد تنصفا  
في ي فاذا ا ب<sup>٢</sup> + ا د<sup>٢</sup> + د س<sup>٢</sup> + س ب<sup>٢</sup> = ا س<sup>٢</sup> + ا س<sup>٢</sup>

فرع. في كل شكل متوازي الاضلاع احد القطرين ينصف الآخر

تعليقة. لو كان الشكل معيناً لكان ا ب ب س متساويين والمثلثان ب ي س  
د ي س متساويين ايضاً لان اضلاع الواحد تعدل اضلاع الآخر اي كل ضلع في  
الواحد يعدل نظيره في الآخر وكما ان الزاويتان ب ي س د ي س متساويتين.  
وفي شكل معين كل واحد من القطرين هو عمود على الآخر



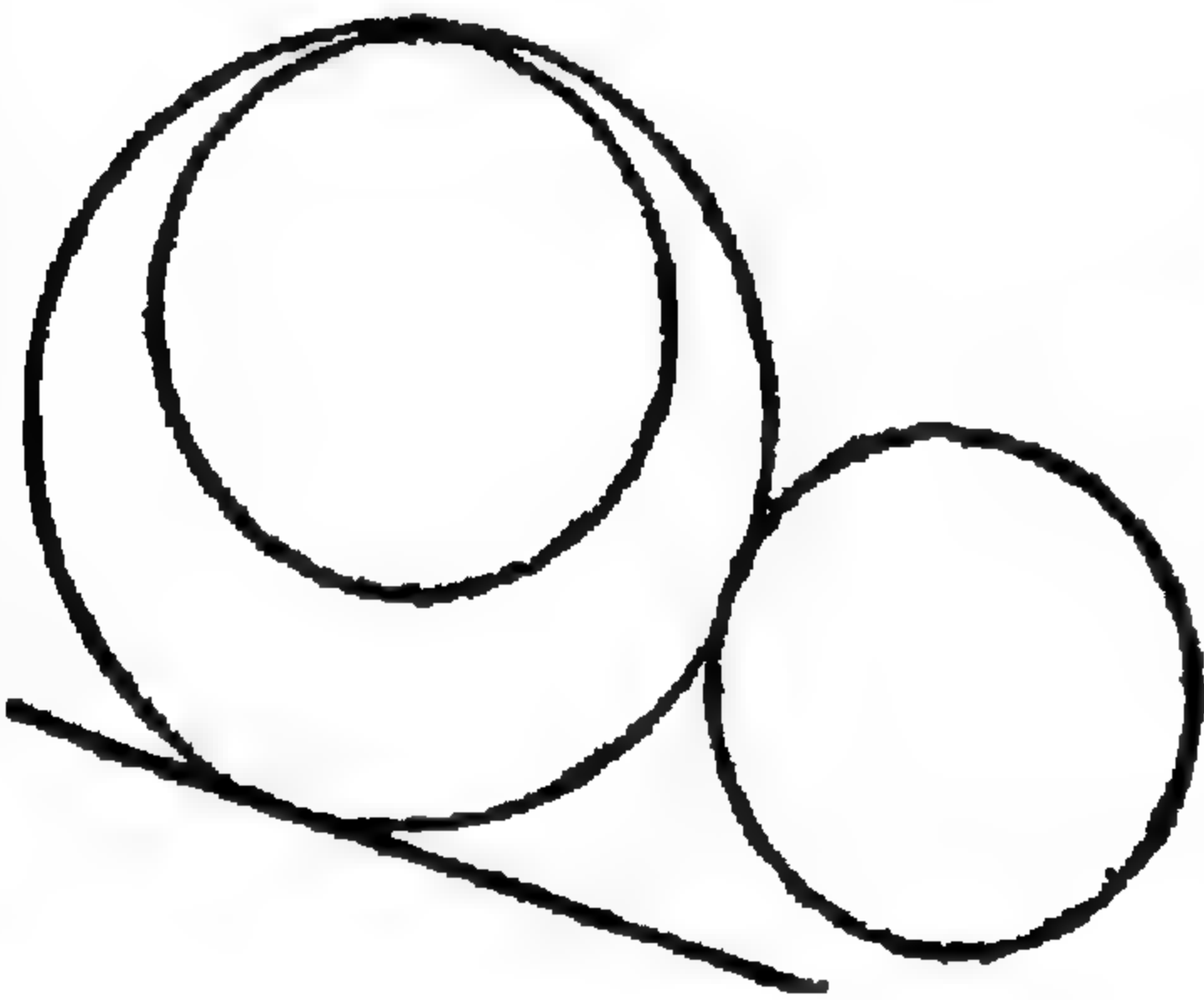
# اصول الهندسة

## الكتاب الثالث

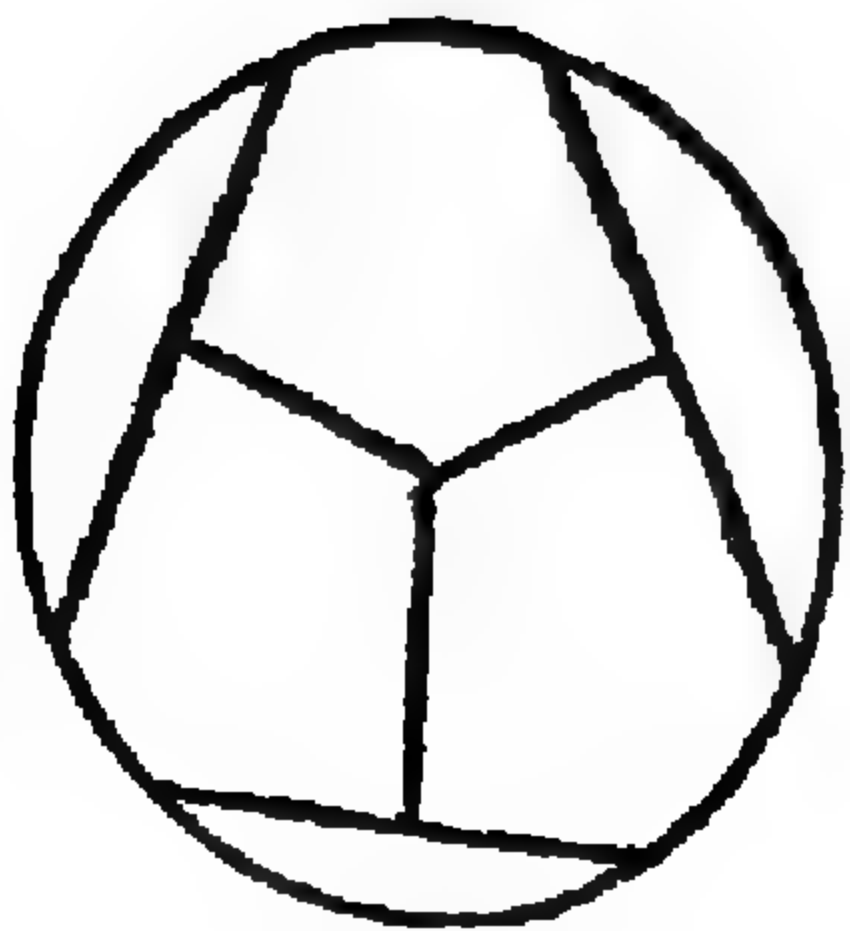
### حدود

١. نصف قطر دائرة هو خط مستقيم مرسوم من المركز الى المحيط

١. مماس دائرة هو خط مستقيم يلاقي المحيط في نقطة واحدة واذا اُخرج فلا يقطعها. وتلك النقطة تسمى نقطة المماس



٢. اذا التقى محيطا دائرتين بدون ان يتقاطعا يقال ان الدائرة الواحدة تمس الاخرى



٣. خطوط مستقيمة على بُعد واحد من مركز دائرة هي التي كانت العموديات منها الى المركز متساوية



٤. والخط المستقيم الذي يقع عليه العمود الاطول هو الابعد عن المركز

ب. القوس هو جزء من محيط دائرة. والخط المستقيم الموصل بين طرفي قوس يسمى وترًا

ج. متى كان طرفا خط مستقيم في محيط دائرة قيل انه مرسوم في الدائرة



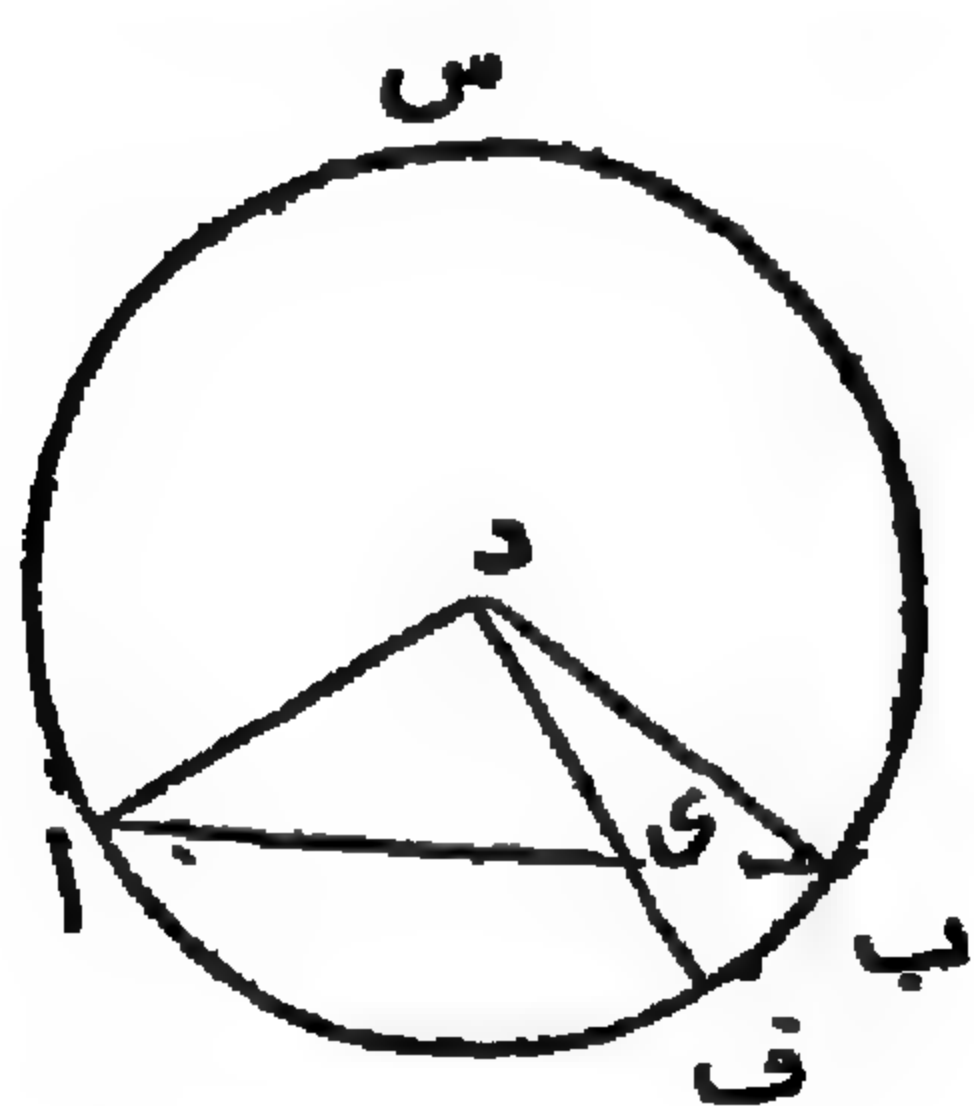


واحد يعدل نظيرة والقاعدة غ ا تعدل القاعدة غ ب لان كل واحدة منهما نصف قطر  
من دائرة واحدة فالزاوية ادغ = غ دب (ق ٨ ك ١) فتكون كل واحدة منهما قائمة  
(جد ٧ ك ١) فاذا غ دب قائمة ولكن ق دب قائمة فاذا غ دب = ق دب اية  
الا صغر يعدل الاكبر وذاك مجال فلا تكون النقطة غ مركز الدائرة وهكذا يبرهن في  
كل نقطة ما عدا النقطة ق فهي اذا مركز الدائرة ا ب س  
فرع. يتضح من هذه القضية انه اذا كان خط عموديا على اخر في دائرة ونصفه  
فالمرکز في الخط المنصف

### القضية الثانية. ن

اذا فرضت نقطتان في محيط دائرة فالخط المستقيم الموصل بينهما واقع  
داخل الدائرة

لتكن ا ب س دائرة ولتفرض في محيطها نقطتان مثل ا وب وليوصل بينهما  
بالخط المستقيم ا ب فهو داخل الدائرة



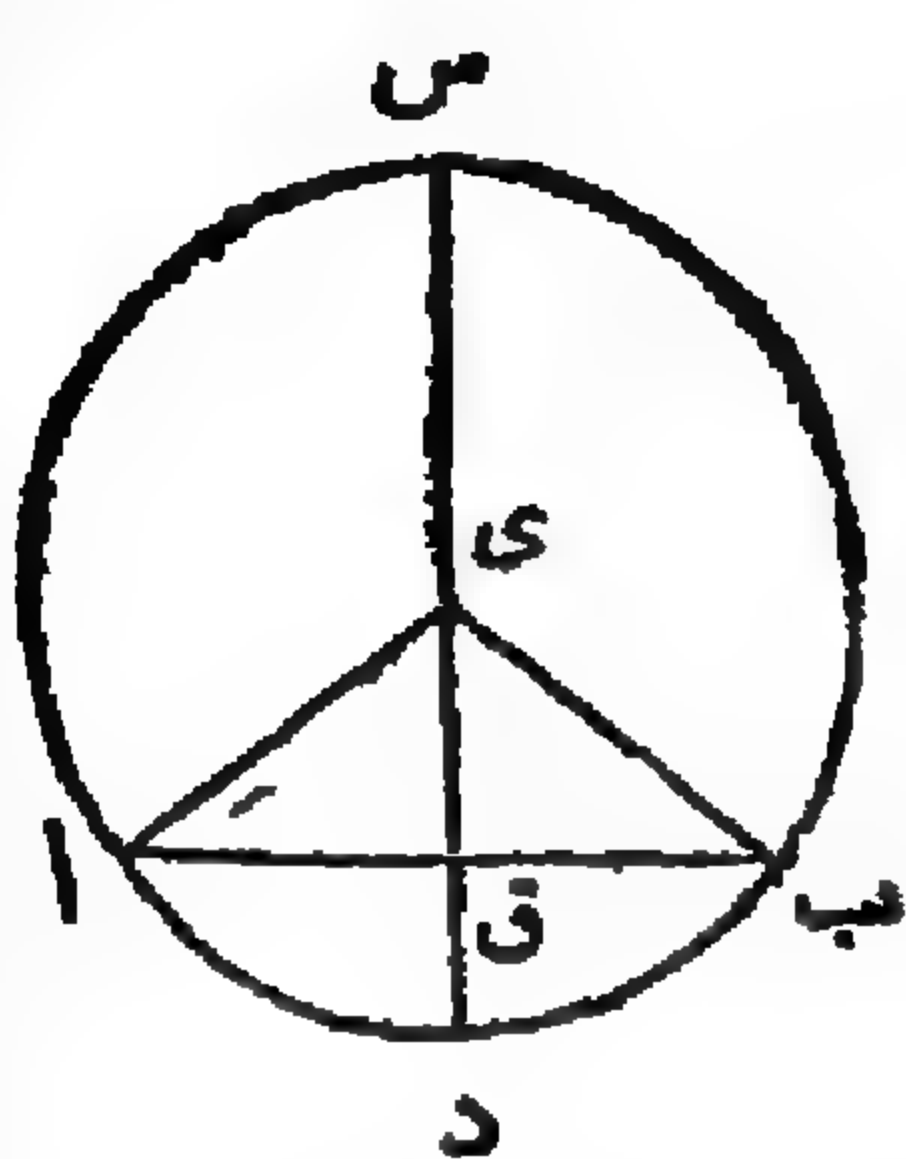
في الخط ا ب افرض اية نقطة كانت مثل ي  
واستعلم د مركز الدائرة ا ب س (ق ١ ك ٢) وارسم  
الخطوط المستقيمة ا د دب دى واخرج دى حتى  
يلاقي المحيط في ف فمن حيث ان دا = دب فالزاوية  
دا ب = الزاوية دب ا (ق ٥ ك ١) ومن حيث

ان اى ضلع من المثلث دى ا وقد اخرج الى ب فالزاوية الخارجة دى ب هي  
اكبر من داى (ق ١٦ ك ١) فهي اكبر من دب ايضا ودب دى والزاوية الكبرى  
يقابلها الضلع الاطول (ق ١٩ ك ١) فاذا دب هو اطول من دى ولكن دب =  
د ف فاذا د ف هو اطول من دى اي النقطة دى هي داخل الدائرة وهكذا يبرهن  
في كل نقطة في الخط ا ب فهو اذا داخل الدائرة  
فرع. كل نقطة في ما يزداد على ا ب خارج الدائرة

القضية الثالثة . ن

كل خط مستقيم ماراً بمركز دائرة اذا نصف خطاً آخر مستقيماً داخل الدائرة غير ماراً بالمركز فانه يحدث معه قائمتين . واذا احدث معه قائمتين ينصفه

لتكن ا ب س دائرة وس د خطاً مستقيماً ماراً بمركزها ولينصف الخط المستقيم ا ب الذي لا يمر بالمركز في النقطة ق فانه يحدث معه قائمتين



استعلم مركز الدائرة ي (ق ١ ك ٢) وارسم ا ي ب ي فمن حيث ان ا ق = ق ب وي ق مشترك بين المثلثين ا ق ي ب ق ي فصلعان من الواحد بعدلان ضلعين من الاخر والقاعدة ا ي تعدل القاعدة ي ب

والزاوية ا ق ي تعدل الزاوية ب ق ي (ق ٨ ك ١) فكل واحدة منها قائمة (حد ٢ ك ١) فالخط المستقيم د س الذي يمر بمركز الدائرة والذي ينصف الغير المار بالمركز ا ب يحدث معه قائمتين

ثم لنفرض ان الخط المستقيم س د يحدث مع ا ب قائمتين فهو ينصفه ايضاً اي ا ق يعدل ق ب . ثم الشكل حسباً تقدم فمن حيث ان ا ي يعدل ي ب فالزاوية ا ق ي تعدل ي ب ق (ق ٥ ك ١) والقائمة ا ق ي تعدل القائمة ب ق ي والضلع ي ق مشترك بين المثلثين ا ق ي ب ق ي وهو يقابل الزاويتين المتساويتين (ق ٢٦ ك ١) فالمثلثان متساويان والضلع الباقي من الواحد يعدل الباقي من الاخر اي ا ق = ق ب

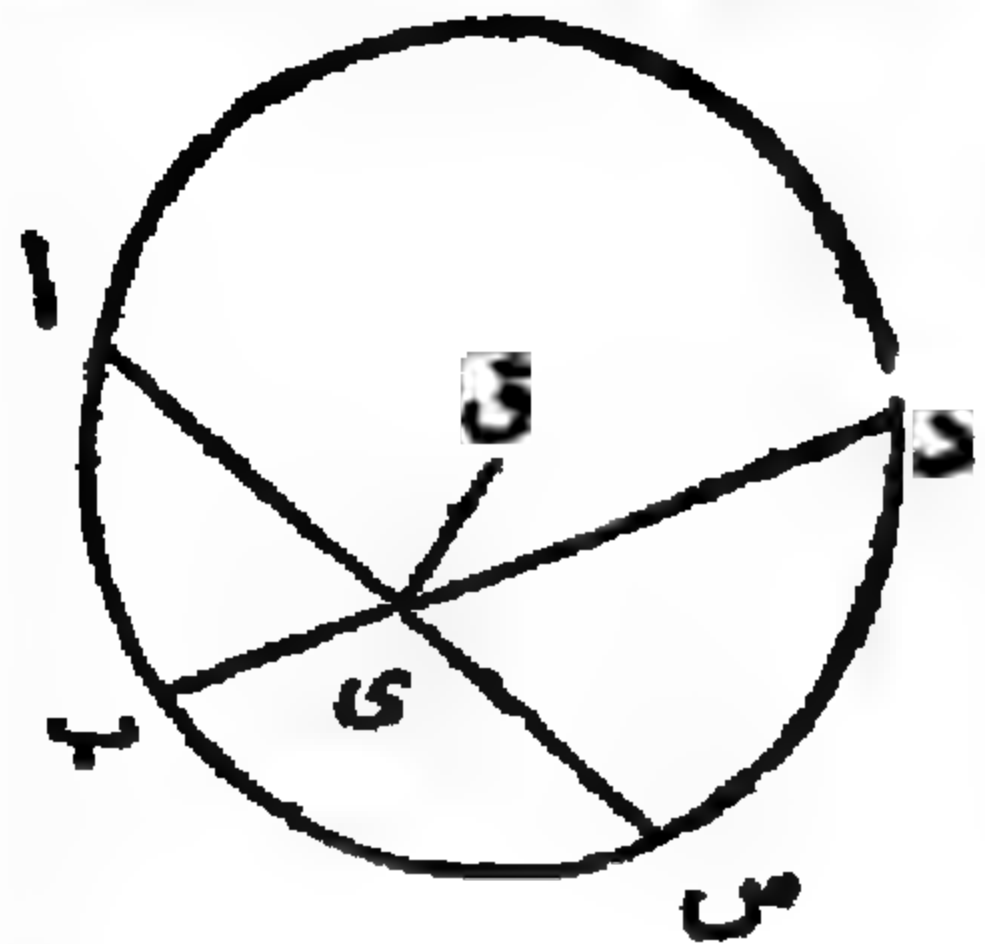
فرع اول . العمود على نصف الوتر يمر بالمركز  
فرع ثان . العمود على نصف الوتر اذا أُخرج حتى يلاقي المحيط من طرفيه فهو قطر . ونقطة اتصافه هي مركز الدائرة



## القضية الرابعة. ن

اذا تقاطع خطان مستقيمان في دائرة ولا يمران بالمركز فلا ينصفان معاً

لكن ا ب س د دائرة واس ب د خطين مستقيمين فيها يتقاطعان في النقطة  
ي ولكن لا يمران بالمركز فلا ينصف بعضهما بعضاً ولا



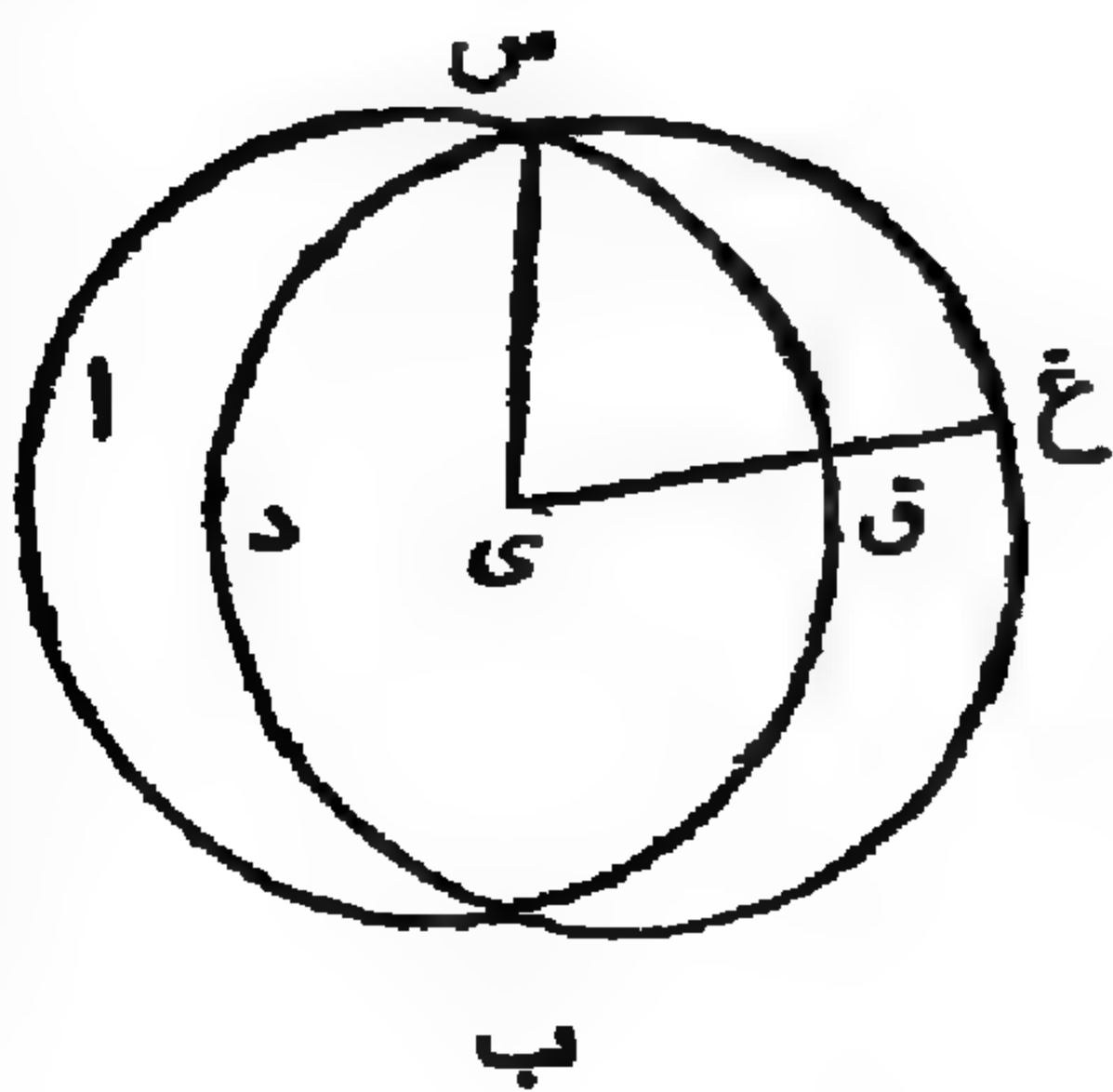
فاذا كان يمكن ليكن ا ي س متساويين وب ي  
ي كذلك. فان مرااحدها بالمركز فالامر واضح انه  
لا ينصف بالآخر الذي لا يمر بالمركز. وان لم يمر  
احدها بالمركز فاستعلم المركز (ق الك ٢) وارسم ق

ي فمن حيث ان الخط المار بالمركز ي ينصف اخر الذي لا يمر بالمركز اس فيحدث  
معاً قائمتين (ق ٢ ك ٢) فتكون ق ي ا قائمة. ومن حيث ان ق ي ينصف ب د  
الذي لا يمر بالمركز فيحدث معاً قائمتين (ق ٢ ك ٢) فتكون ق ي ب قائمة وق ي ا  
تعديل ق ي ب اي الاصغر يعدل الاكبر وذلك محال فاذا اس ب د لا ينصف  
بعضها بعضاً

## القضية الخامسة. ن

اذا تقاطعت دائرتان لا يكون لهما مركز واحد

لكن ا ب س د غ دائرتين ولتقاطعا في س وب فليس لهما مركز واحد  
ولا فلتكن النقطة ي مركزها. ارسم س ي  
وارسم خطاً اخر مثل ي ق غ يلاقي المحيطين في  
ق و غ

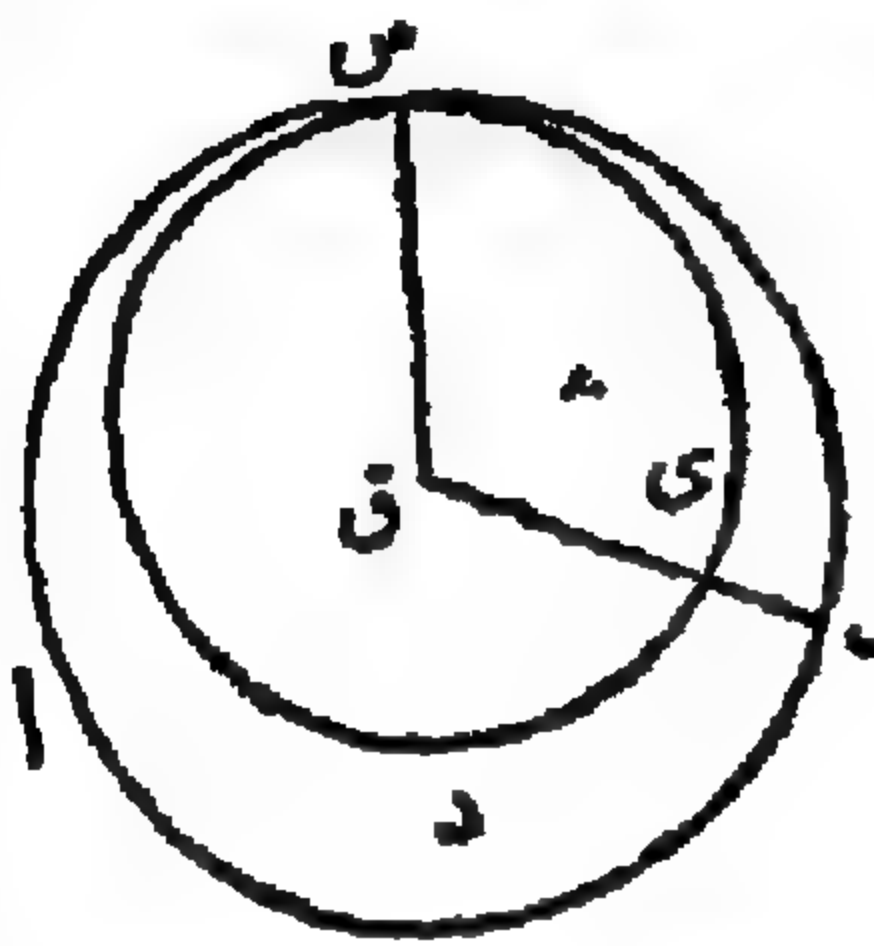


فمن حيث ان ي مركز الدائرة ا ب س  
فنصف القطري س يعدل نصف القطري ق.  
وايضاً من حيث ان ي مركز الدائرة س د غ  
فنصف القطري س يعدل نصف القطري غ. وقد تبهرن ان س ي يعدل ي ق

فإذا ي ق يعدل ي غ اي الجزء يعدل الكل وذلك محال فلا يمكن ان تكون  
النقطة ي مركز الدائرتين

### القضية السادسة . ن

إذا مسّت دائرة دائرة أخرى من داخلها فلا يكون لهما مركز واحد  
لتكن ا ب س د ي س دائرتين ولتمس احدهما الاخرى في س فلا يكون لهما  
مركز واحد



والأ فلتكن النقطة ق مركزها . ارسم ق س  
وارسم خطاً آخر مثل ق ي يلاقي المحيطين في ي  
وب . فمن حيث ان ق مركز الدائرة ا ب س فنصف  
القطر ق س يعدل نصف القطر ق ب . وإيضاً لان

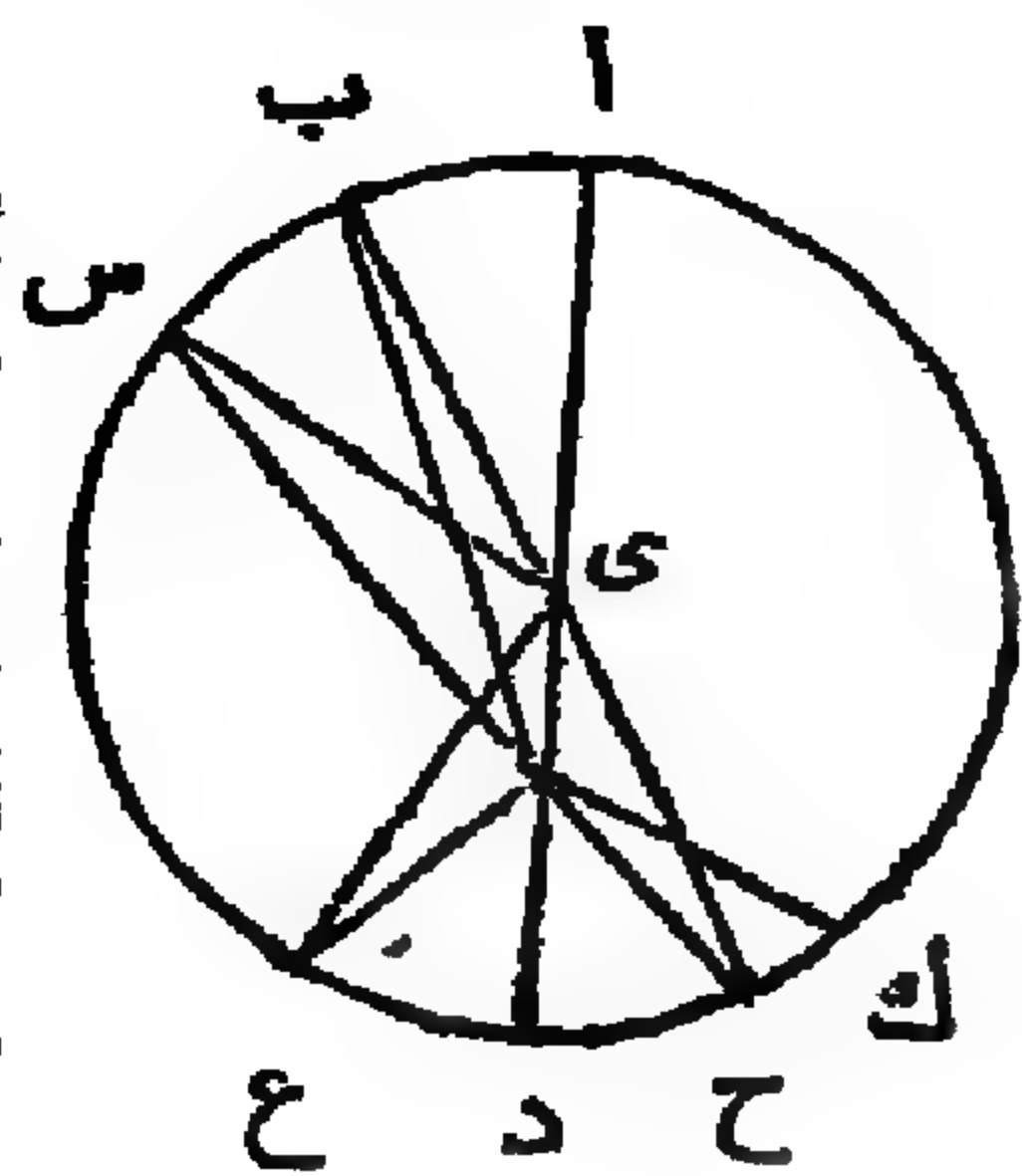
ق مركز الدائرة د ي س فنصف القطر ق س يعدل نصف القطر ق ي . وقد تبهرن  
ان ق س يعدل ق ب فإذا ق ي يعدل ق ب ا ب الجزء يعدل الكل وذلك  
محال فلا تكون النقطة ق مركز الدائرتين

### القضية السابعة . ن

إذا فرضت نقطة في قطر دائرة غير المركز فاطول الخطوط المستقيمة  
التي يمكن رسمها من تلك النقطة الى المحيط هو الذي يقع فيه المركز اي  
قسم من القطر . واقصرها هو القسم الاخر من القطر واما بقية الخطوط  
التي ترسم من تلك النقطة الى المحيط فالاقرب الى القسم من القطر  
الماز بالمركز هو الاطول ولا يرسم من تلك النقطة الى المحيط اكثر من  
خطين متساويين ا ب واحد على الجانب الواحد من القطر  
والاخر على الجانب الآخر منه



لتكن ا ب س ك دائرة وا د قطرها ولنفرض فيه نقطة ف غير المركز ولتكن ي  
المركز فيين كل المخطوط التي يمكن رسمها من ف الى  
المحيط فالخط ف ا هو الاطول وف د هو الاقصر ومن  
البقية فالخط ف ب اطول من ف س وف س اطول  
من ف غ وهلم جرا. ارسم ب ي س ي غ ي فمن  
حيث ان ضلعين من اضلاع مثلث هـا معاً اطول من  
الثالث (ق ٢٠ ك ١) فالضلعان ب ي ي ف هـا



اطول من ب ف و ا ي يعدل ب ي فاذا ا ي ي ف يعني ا ف اطول من ب ف  
وايضاً من حيث ان ب ي يعدل س ي و ي ف مشترك بين المثلثين ب ي ي ف  
س ي ف فالضلعان ب ي ي ف يعدلان س ي ي ف ولكن الزاوية ب ي ي ف  
هي اكبر من س ي ي ف فالقاعدة ب ف هي اطول من القاعدة س ف (ق ٢٤ ك ١)  
ولهذا السبب س ف اطول من ع ف. وايضاً من حيث ان غ ف ف ي هـا معاً  
اطول من غ ي (ق ٢٠ ك ١) و ي غ يعدل ي د فاذا غ ف ف ي هـا معاً اطول  
من د ي اطرح الجزء المشترك ف ي فالبقية غ ف اطول من البقية د ف فاذا ف ا  
هو اطول المخطوط التي يمكن رسمها من ف الى المحيط وف د اقصرها وف ب اطول  
من ف س وف س اطول من ف غ وهلم جرا

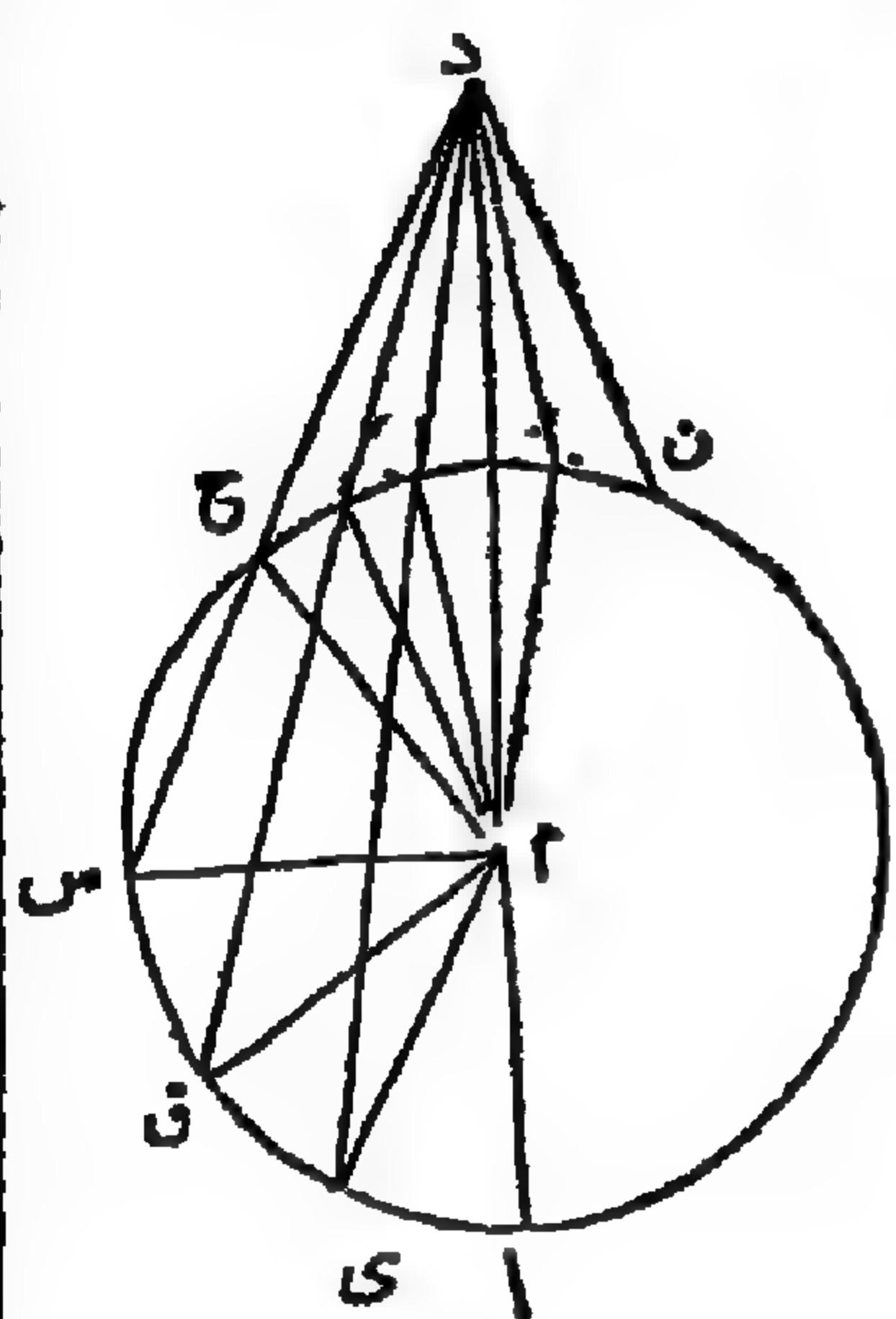
كذلك لا يمكن ان يرسم من ف الى المحيط على جانبي ف د اكثر من خطين  
متساويين. عند ي اجعل الزاوية ف ي ح حتى تعدل غ ي ف وارسم ف ح. فمن  
حيث ان غ ي يعدل ي ح و ي ف مشترك بين المثلثين غ ي ف ح ي ف  
فالضلعان غ ي ي ف معاً يعدلان ح ي ي ف والزاوية غ ي ف تعدل ح ي ف  
فالقاعدة ف غ تعدل القاعدة ف ح (ق ٤ ك ١) ولا يمكن ان يرسم خط اخر غير  
ف ح يعدل ف غ من ف الى المحيط والا فليكن ذلك الخط الاخر ف ك فمن  
حيث ان ف ك يعدل ف غ وف غ يعدل ف ح فاذا ف ك يعدل ف ح اي  
الخط الاقرب الى الذي يمر بالمركز يعدل الا بعد وذلك لا يمكن كما تقدم برهانه

### القضية الثامنة. ن

اذا فرضت نقطة خارج دائرة ورسم منها خطوط مستقيمة الى المحيط

ومرّاحدها بالمركز فاطول الخطوط الواقعة على مقعر الدائرة هو المارّ  
بالمركز ومن البقية فالاقرب الى المار بالمركز هو اطول من الابد عنه  
ومن الخطوط الواقعة على محدّب الدائرة فالاقصر هو المرسوم من  
النقطة المفروضة الى القطر واما البقية فالاقرب الى الاقصر هو  
اقصر من الابد عنه. ولا يرسم اكثر من خطين متساويين من النقطة  
المفروضة الى المحيط وذلك على جانبي الخط الاقصر

لتكن اس ن دائرة ود نقطة مفروضة خارجها ولترسم الخطوط المستقيمة دا



دي دق دس الى المحيط وليمرّ الخط دا  
بالمركز. فمن الخطوط الواقعة على مقعر المحيط  
اعني ي ق س فالاطول هو ا د والاقرب الى  
ا د يعني ي د هو اطول من ق د وق د اطول  
من س د. ومن الخطوط الواقعة على محدّب  
المحيط ح ل ك غ فالاقصر هو د ع بين النقطة  
المفروضة د والقطر ا غ والاقرب الى هذا يعني  
د ك هو اقصر من د ل ود ل اقصر من د ح  
وهلمّ جرّاً

استعلم مركز الدائرة (ق ا ك ٢) وارسم م ي م ق م س م ح م ل م ك. فمن  
حيث ان م ا يعدل م ي فاذا اُضيف م د الى كل واحد منها لما دا يعدل د م مع  
م ي ود م م ي ها معاً اطول من د ي (ق ٢٠ ك ١) فاذا دا هو ايضاً اطول من  
د ي. ومن حيث ان م ي يعدل م ق وم د مشترك بين المثلثين د م ي د م ق  
فالضلعان د م م ي يعدلان الضلعين د م م ق ولكن الزاوية د م ي انما هي اكبر  
من الزاوية د م ق فالقاعدة د ي اطول من القاعدة د ق (ق ٢٤ ك ١) وهكذا ايضاً  
يبرهن ان د ق اطول من د س. فاذا دا هو اطول هذه الخطوط ود ي هو اطول  
من د ق ود ق اطول من د س. ثم من حيث ان م ك ك د ها معاً اطول من م د  
(ق ٢٠ ك ١) وم غ يعدل م ك فالبقية ك د هي اطول من البقية غ د (اولية ٥)



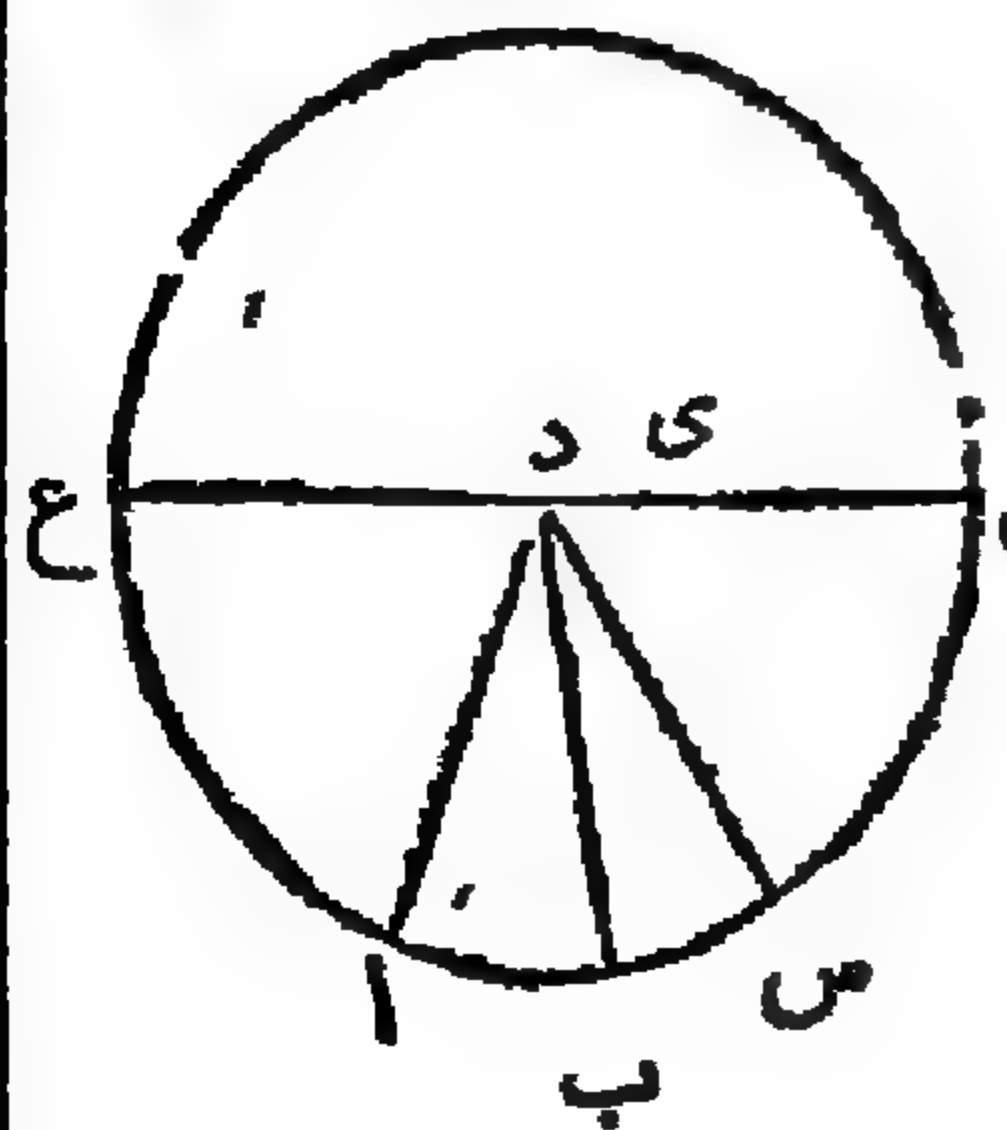
اعني دغ هو اقصر من دك ومن حيث ان م ك دك قد رُسم الى النقطة ك داخل  
المثلث م ل د وذلك من م ود طرفي قاعدتي م د فالحيطان م ك د م عاها اقصر  
من م ل د م عا (ق ١ ك ١) وم ك يعدل م ل فالبقية ك د هي اقصر من البقية  
ل د وهكذا يبرهن ان د ل هو اقصر من د ح فاذا دغ هو اقصر هذه الخطوط  
ودك اقصر من د ل ود ل اقصر من د ح وهلم جرا

كذلك لا يرسم الاخطان متساويان من د الى المحيط وذلك على جانبي الاقصر  
فعند النقطة م من الخط م د اجعل الزاوية د م ب حتى تعدل د م ك وارسم د ب  
فلنا في المثلثين ك د م ب د م الضلعان المتساويان ب م ك م والضلع المشترك د م  
والزاوية ب م د تعدل الزاوية ك م د فالضلع الاخر د ك يعدل الاخر د ب (ق ٤  
ك ١) ولا يرسم خط اخر غير د ب حتى يعدل د ك اعني من د الى المحيط  
وان كان ممكناً فليكن د ن ذلك الخط فمن حيث ان د ن يعدل د ك ود ك  
يعدل د ب فاذا د ن يعدل د ب يعني الاقرب الى دغ يعدل الابدع عنه وقد  
تبرهن ان ذاك غير ممكن

### القضية التاسعة. ن

اذا فُرِضَتْ داخل دائرة نقطة يُرسم منها الى المحيط اكثر من خطين  
مستقيمين متساويين فتلك النقطة هي مركز الدائرة

لنُفرض النقطة د في الدائرة ا ب س التي منها يقع على المحيط اكثر من خطين  
مستقيمين متساويين د ا د ب د س فبالنقطة د



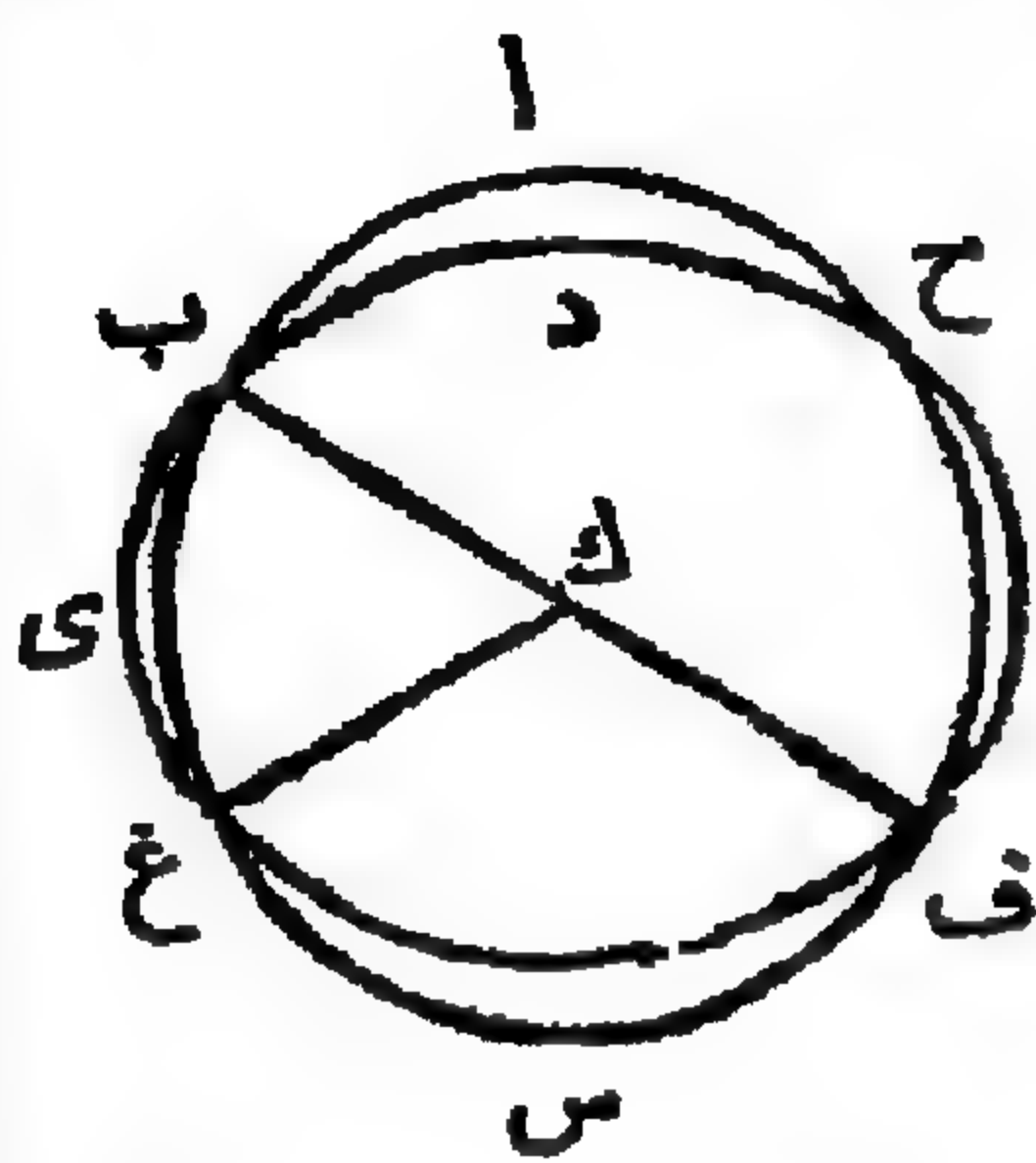
هي مركز الدائرة، والا فلتكن النقطة ي المركز. ارسم  
د ي واخرجه الى المحيط في ف و غ فيكون الخط  
ف غ قطراً ومن حيث انه قد تعين في القطر  
نقطة اعني د التي ليست هي مركز الدائرة فالحيط د  
ف هو اطول الخطوط التي يمكن رسمها من تلك

النقطة الى المحيط (ق ٧ ك ٢) ود س هو اطول من د ب ود ب اطول من د ا

وقد فرضت مساويتها فذاك محال فاذا لا يمكن ان تكون ي المركز وهكذا يبرهن في كل نقطة غير د، فهي المركز

### القضية العاشرة ن

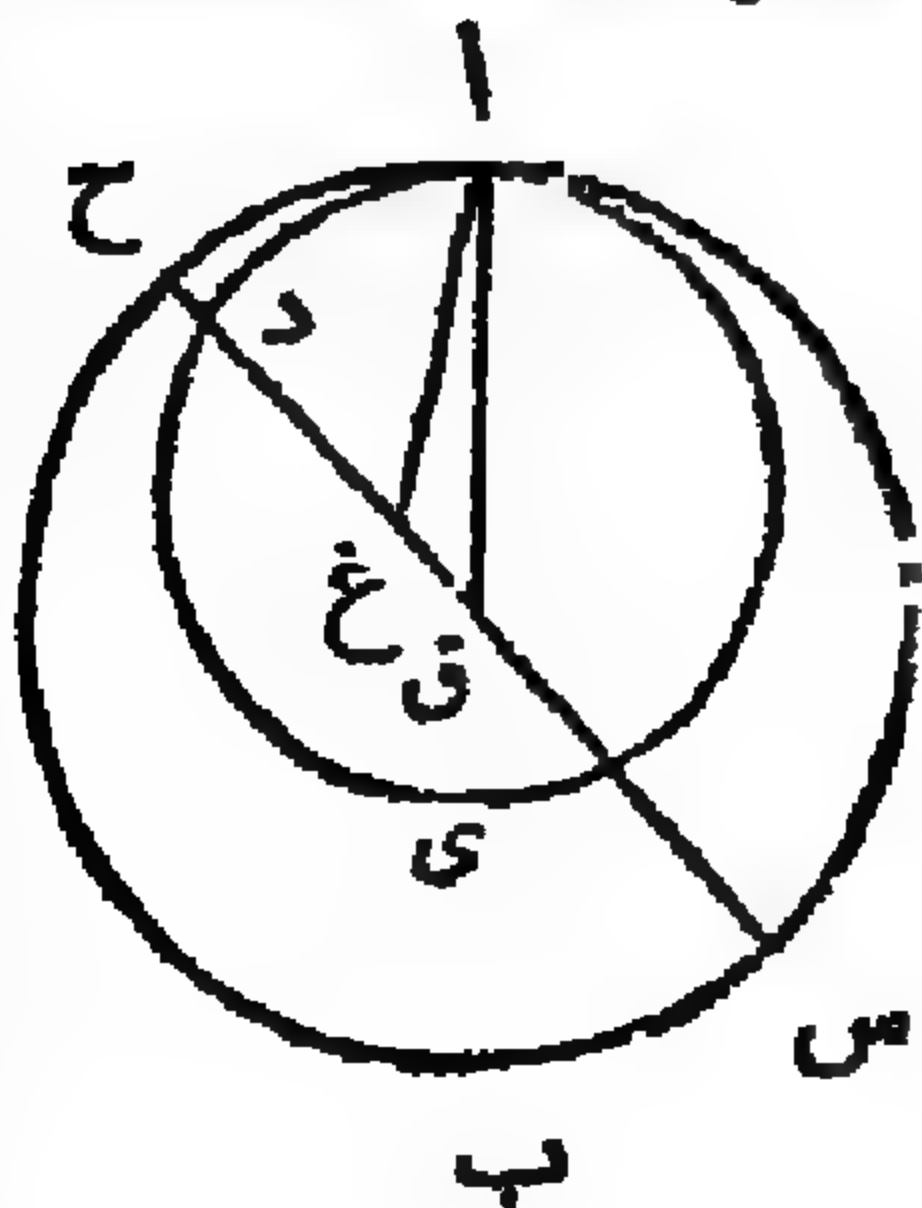
لا يمكن ان تقطع دائرة دائرة اخرى في اكثر من نقطتين  
ان كان ممكنا لينقطع المحيط ف اب المحيط د ي ف في اكثر من نقطتين اعني



في ب و غ وف، استعلم ك مركز الدائرة اب س وارسم  
ك ب ك غ ك ف، فمن حيث انه قد تعينت النقطة ك  
داخل الدائرة د ي ف ووقع منها على المحيط اكثر  
من خطين مستقيمين متساويين اعني ك ب ك غ  
ك ف فهي اعني ك مركز الدائرة د ي ف (ق ٩ ك ٢)  
وهي ايضا مركز اب س اي دائرة تقطع دائرة اخرى  
ولها مركز واحد وذاك لا يمكن (ق ٥ ك ٢) فلا يمكن ان تقطع دائرة دائرة اخرى  
في اكثر من نقطتين

### القضية الحادية عشرة ن

اذا مست دائرة دائرة اخرى من داخلها فالخط المستقيم الموصل بين  
مركزيهما اذا اخرج يمر بنقطة المماس



لكن اب س ادى دائرتين ولتمس احدهما الاخرى في النقطة ا وليكن ق  
مركز الدائرة اب س و غ مركز الدائرة ادى فالخط  
الموصل بين ق و غ اذا اخرج يمر بنقطة المماس ا  
ولا فليقع على نقطة اخرى ان كان ممكنا مثل  
الخط ق غ د ح، ثم ارسم اغ ا ق، فمن حيث ان  
الضلعين اغ غ ق هما متساويان من ا ق (ق ٢٠ ك ١)  
او ق ح لان ق ح ا نصف قطر لدائرة واحدة فاذا



طرح الجزء المشترك ق غ فالباقي غ ا يعدل الباقي غ ج ولكن ا غ يعدل غ د فاذا  
غ د يعدل غ ح اعني الجزء يعدل الكل وذاك محال . فالخط الموصل بين المركزين  
لا يمكن وقوعه مثل الخط ق غ د ح وهكذا يبرهن في كل خط ما عدا الذي يقع  
على النقطة ا

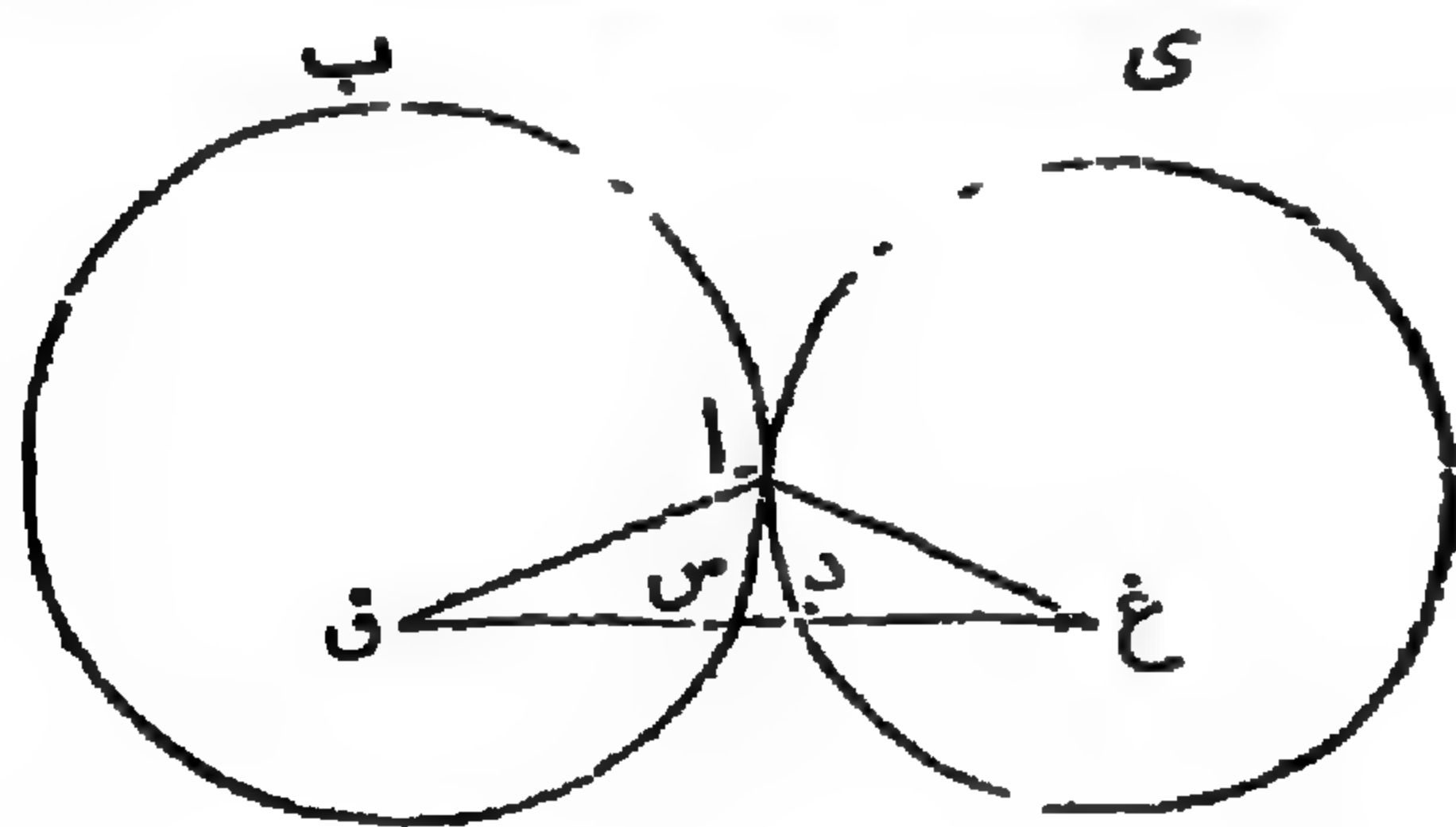
فرع اول . اذا مست دائرة دائرة اخرى من داخلها فالبعد بين مركزيها  
يعدل فضلة نصفي قطريها لان المحيطين يمران بنقطة واحدة في الخط الموصل  
بين المركزين

فرع ثان . بالقلب اذا عدل البعد بين المركزين فضلة نصفي القطرين فالدائرة  
الواحدة تمس الاخرى من داخلها

### القضية الثانية عشرة . ن

اذا مست دائرة دائرة اخرى من خارجها فالخط المستقيم الموصل  
بين مركزيها يمر بنقطة المماس

لكن ا ب س ا دى دائرتين ولتمس احدهما الاخرى في ا وليكن ق مركز  
الدائرة ا ب س وليكن غ مركز  
الدائرة ا دى فالخط المستقيم  
الموصل بين ق و غ يمر بنقطة  
المماس  
والا فليقع على غير نقطة



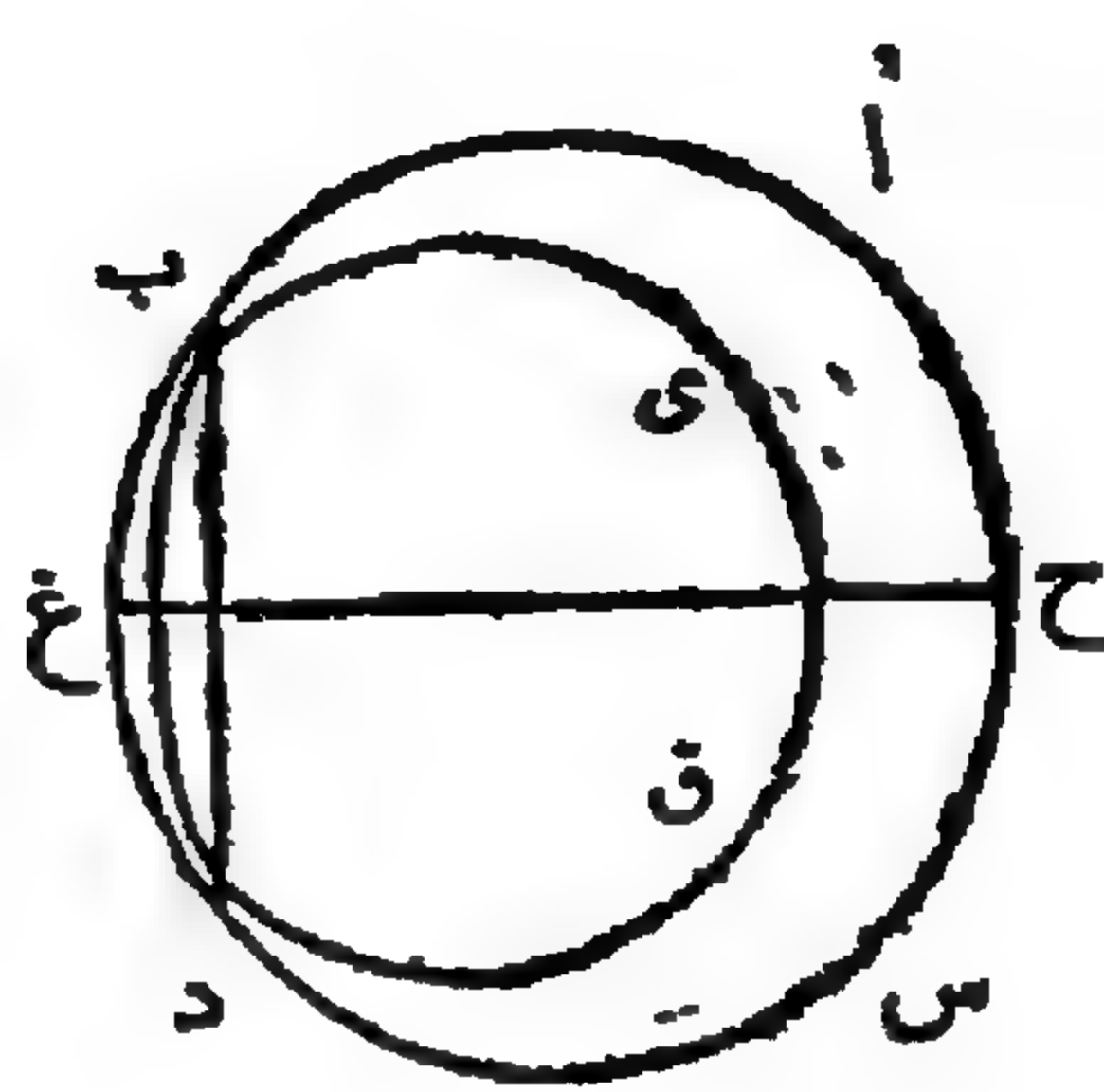
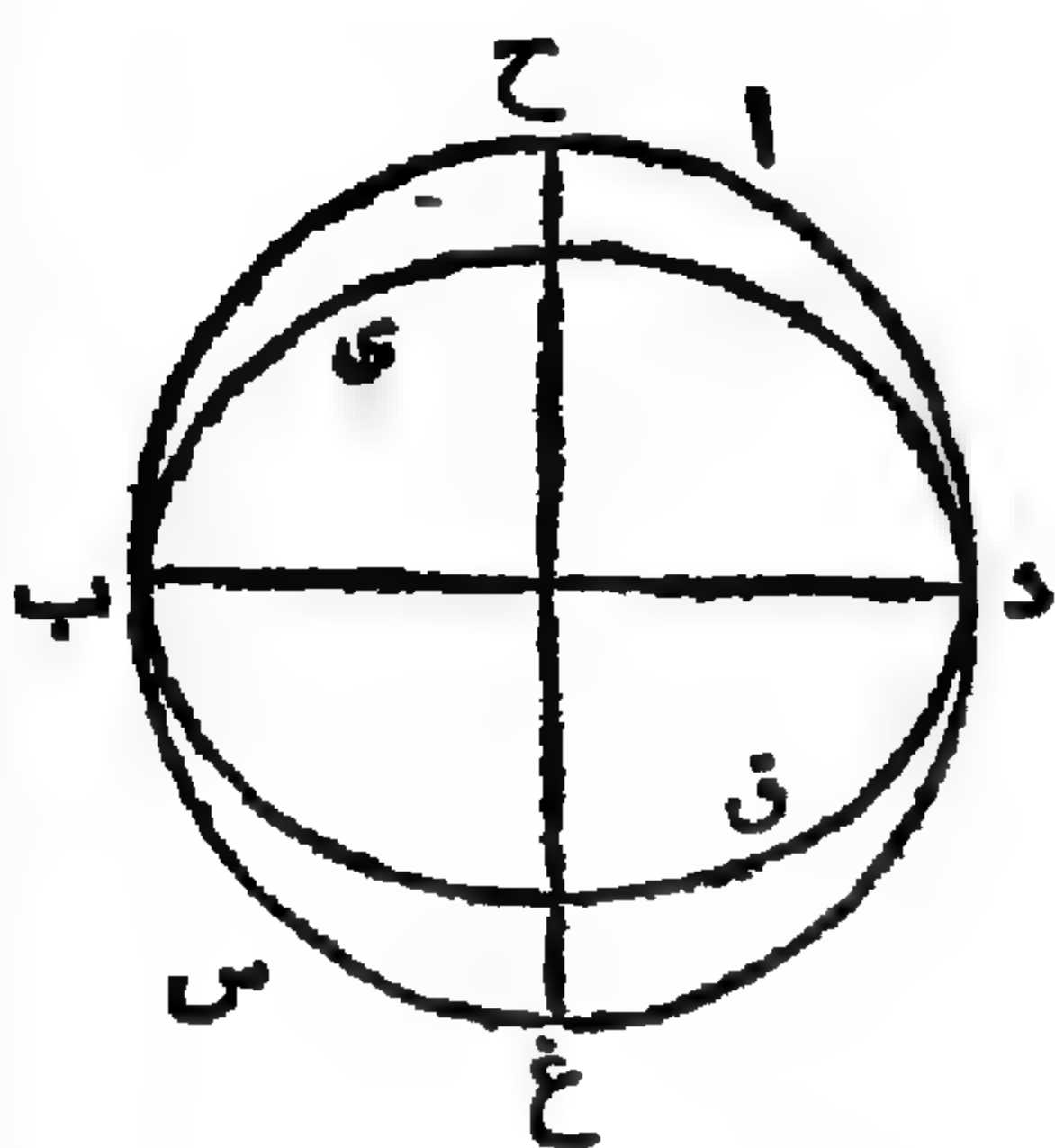
المماس مثل الخط ق س د غ ا رسم ق ا غ ا . فمن حيث ان ق مركز الدائرة ا ب س  
فالخط ق س يعدل ق ا و غ مركز ا دى فالخط غ د يعدل غ ا فاذا غ ا ق معا  
يعدلان ق س غ د معا فالكل ق غ ا طول من ق ا غ معا وذلك لا يمكن (ق ٢٠  
ك ا) وهكذا يبرهن في كل خط غير الذي يمر بنقطة المماس

فرع . اذا مست دائرة دائرة اخرى من خارجها فالبعد بين مركزيها يعدل  
مجمع نصفي قطريها وبالقلب اذا عدل بعد مركزيها مجتمع قطريها فالواحدة تمس  
الاخرى من خارجها

القضية الثالثة عشرة. ن

دائرة لا تمس أخرى في أكثر من نقطة واحدة ان كان من داخل او  
من خارج

ان كان يمكن لمس الدائرتين ب ق الدائرة ا ب س في أكثر من نقطة واحدة ولولا



من داخل في  
ب ود ا رسم  
المخط ب د  
وا رسم ح غ  
عموداً عليه  
(ق ٢ وق ١ ا  
ك ١) ولينصفه

ايضاً. فمن حيث ان ب ود هما في محيط كل واحدة من الدائرتين فالمخط المستقيم ب  
د واقع داخل كل واحدة منهما (ق ٢ ك ٢) ومركزها في المخط العمودي عليه المنصفه  
(فرع ق ١ ك ٢) فاذا غ ح يمر بنقطة الماسة (ق ١ ا ك ٢) وهو لا يمر بهما لان ب ود  
خارجتان عن المخط المستقيم غ ح فلا يمكن ان تمس الدائرة الاخرى في أكثر من  
نقطة واحدة من داخل ولا يمكن ذلك من خارج. فان كان يمكن فلتمس الدائرة



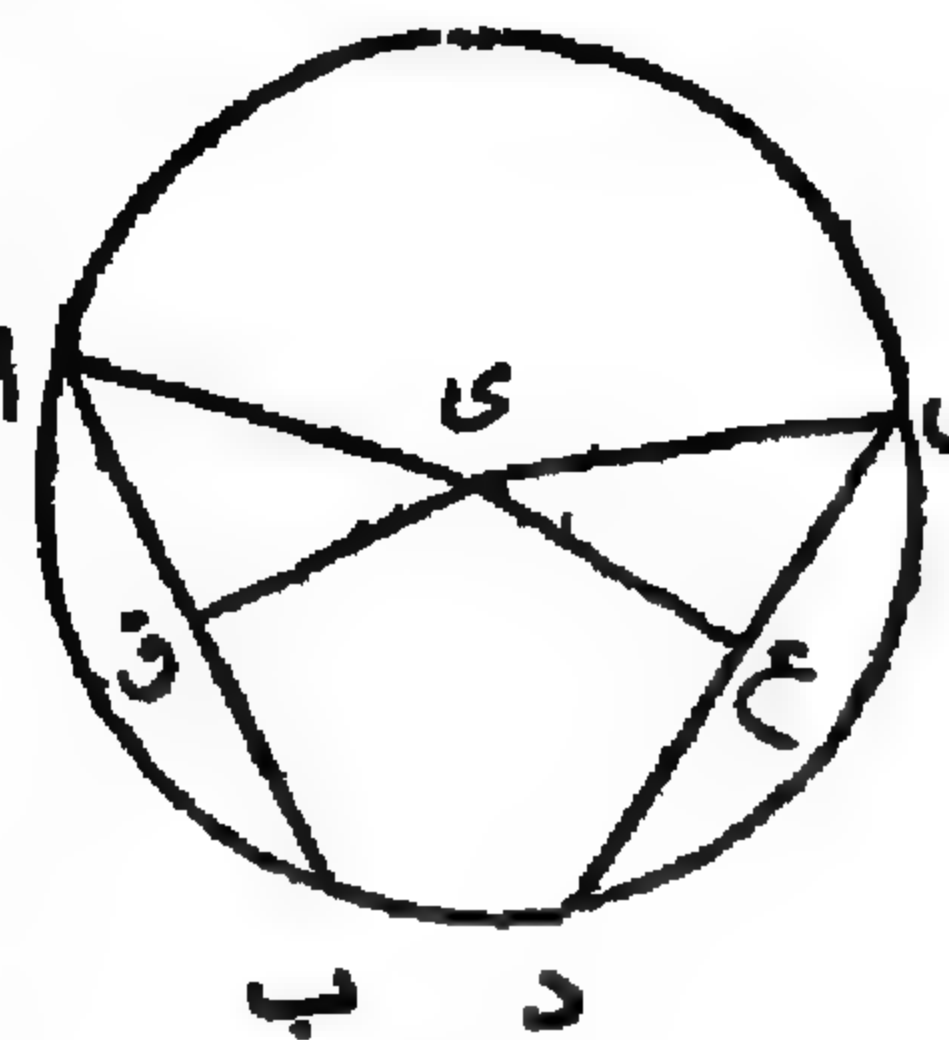
اش د الدائرة اش ب في ا وش ا رسم اش فالتقطتان  
ا وش هما في محيط الدائرة اش د فيكون المخط اش كله  
داخل اش د واش د خارج اش ب فيكون اش  
خارج اش ب ايضاً ومن حيث ا وش هما في محيط اش  
ب فالمخط اش هو داخل اش ب (ق ٢ ك ٢) وقد  
نبرهن انه خارجها وذاك محال فلا تمس دائرة دائرة  
اخرى من خارج في أكثر من نقطة واحدة



### القضية الرابعة عشرة. ن

خطوط مستقيمة متساوية في دائرة هي على بعد واحد من المركز.  
وخطوط مستقيمة على بعد واحد من المركز هي متساوية

ليكن  $AB$  و  $CD$  خطين مستقيمين متساويين في الدائرة  $AB$  و  $CD$  هما على  
بعد واحد من المركز. استعمل المركز  $O$  (ق ١ ك ٢)



ولرسم  $OY$  عمودين على  $AB$  و  $OS$  و  $OR$   
ايضا  $AY$  و  $OS$ . فمن حيث ان الخط المستقيم المار  
بالمركز  $OY$  يجعل مع  $AB$  الذي لا يمر بالمركز  
زاوية قائمة فهو ينصفه ايضا (ق ٢ ك ٢) فاذا  $AO$

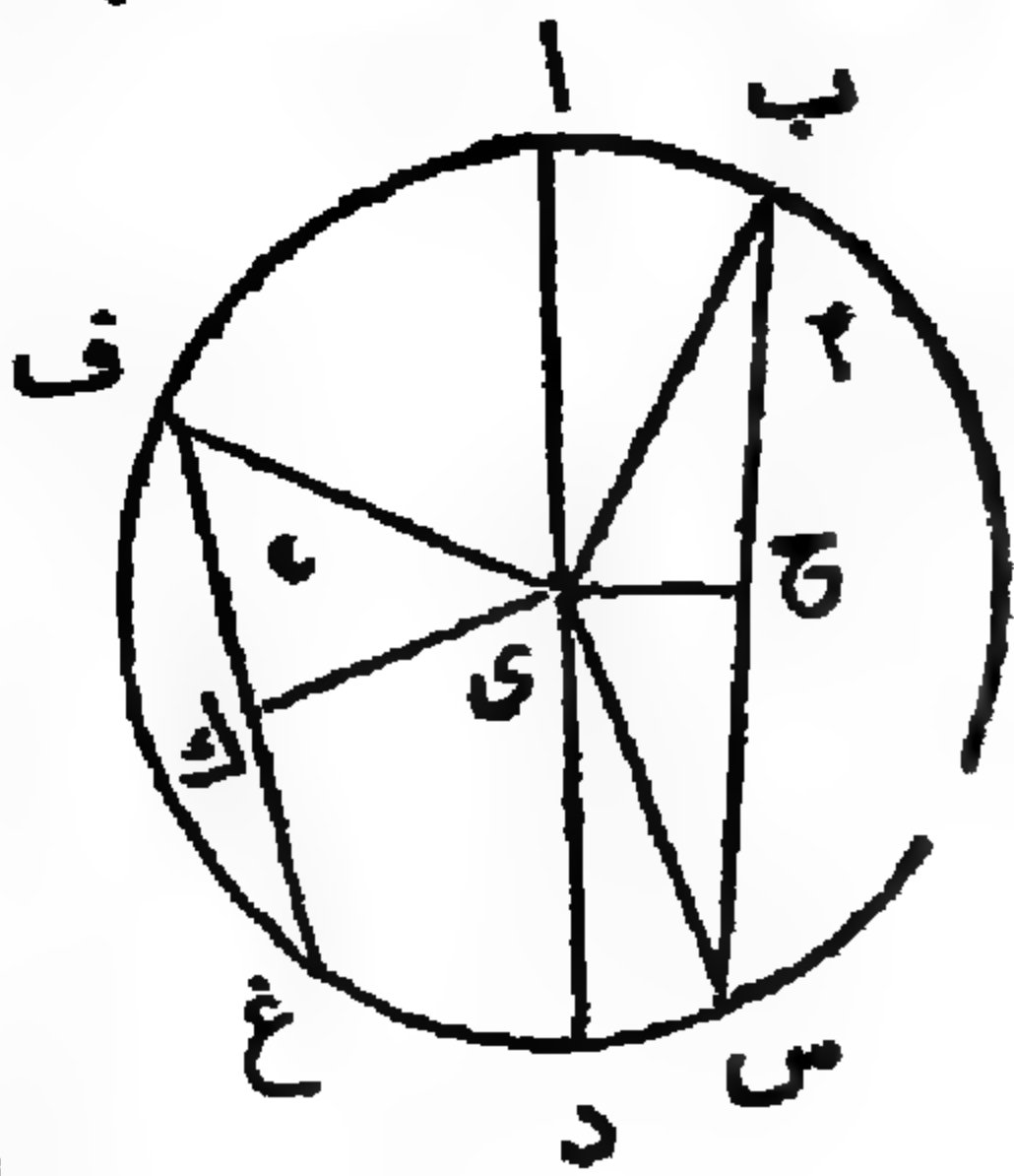
يعدل  $CO$  ب  $AO$  اعني  $AB$  هو مضاعف  $AO$ . وهكذا ايضا يبرهن ان  $OS$  د مضاعف  
س  $G$ . و  $AB$  يعدل  $OS$  د فاذا  $AO$  يعدل  $OS$   $G$ . ومن حيث ان  $AY$  يعدل  $OY$  س  
فمربع  $AY$  يعدل مربع  $OY$  س ومجتمع مربعي  $AO$  و  $OY$  يعدل مربع  $AY$  (ق ٤٧ ك ١)  
لان  $AO$  و  $OY$  قائمة وهكذا ايضا مجتمع مربعي  $OS$  و  $OY$  يعدل مربع  $OS$ . فمربع  $AO$   
و  $OY$  يعدلان مربعي  $OS$  و  $OY$  و مربع  $OS$  يعدل مربع  $AO$  لان  $OS$  و  $OY$  يعدل  $AO$   
فاذا مربع الباقي  $OY$  يعدل مربع الباقي  $OY$  اعني  $OY$  يعدل  $OY$  فاذا  $AB$   
و  $CD$  هما على بعد واحد من المركز (حد ٢ ك ٢)

ثم اذا فرض انها على بعد واحد من المركز اعني ان  $OY$  يعدل  $OY$  فها  
متساويان لانه يبرهن على ذات الاسلوب السابق ان  $AB$  مضاعف  $AO$  و  $OS$  د  
مضاعف  $OS$   $G$  وان مجتمع مربعي  $AO$  و  $OY$  يعدل مجتمع مربعي  $OS$  و  $OY$  و مربع  
و  $OY$  يعدل مربع  $OY$  فمربع الباقي  $AO$  يعدل مربع الباقي  $OS$  و  $AO$  يعدل  $OS$   
و  $AB$  مضاعف  $AO$  و  $CD$  مضاعف  $OS$  فاذا  $AB$  يعدل  $CD$

### القضية الخامسة عشرة. ن

القطر هو اطول الخطوط التي ترسم في دائرة اما البقية فالاقرب الى  
المركز اطول من الابد عنه والاطول هو اقرب الى المركز من الاقصر

لتكن ا ب س د دائرة واد قطرها وي مركزها وليكن ب س خطاً فيها  
وليكن اقرب الى المركز من الخط ف غ فالتظراد  
اطول من اي خط آخر رسم في الدائرة وب س  
اطول من ف غ



ارسم ي ح عموداً على ب س وي ك عموداً  
على ف غ وارسم ي ف ي ب ي س . فمن حيث  
ان اي يعدل ب ي وي د يعدل ي س فالكل

اد يعدل ب ي مع ي س وب ي مع ي س اطول من ب س (ق ٢٠ ك ١)  
فاذا ا د اطول من ب س

ومن حيث ان ب س اقرب الى المركز من ف غ فالعمود ي ح اقصر من  
العمود ي ك (حد ٤ ك ٢) وب س هو مضاعف ب ح (ق ١٤ ك ٢) وف غ مضاعف  
ف ك ومجتمع مربعي ب ح ح ي يعدل مجتمع مربعي ف ك ك ي ومربع ي ح اصغر  
من مربع ي ك فيكون مربع ح ب اكبر من مربع ك ف فاذا ب ح اطول من ك ف  
وب س ايضاً اطول من ف غ

ثم ليُفرض ان ب س اطول من ف غ فهو ايضاً اقرب الى المركز من ف غ  
ان ب س اطول من ف غ فاذا ب ح اطول من ف ك ومجتمع مربعي ف ك ك ي  
يعدل مجتمع مربعي ب ح ح ي ومربع ب ح اكبر من ف ك فيكون مربع ي ح  
اصغر من مربع ي ك اعني ي ح اقصر من ي ك فاذا (حد ٤ ك ٢) ب س اقرب  
الى المركز من ف غ

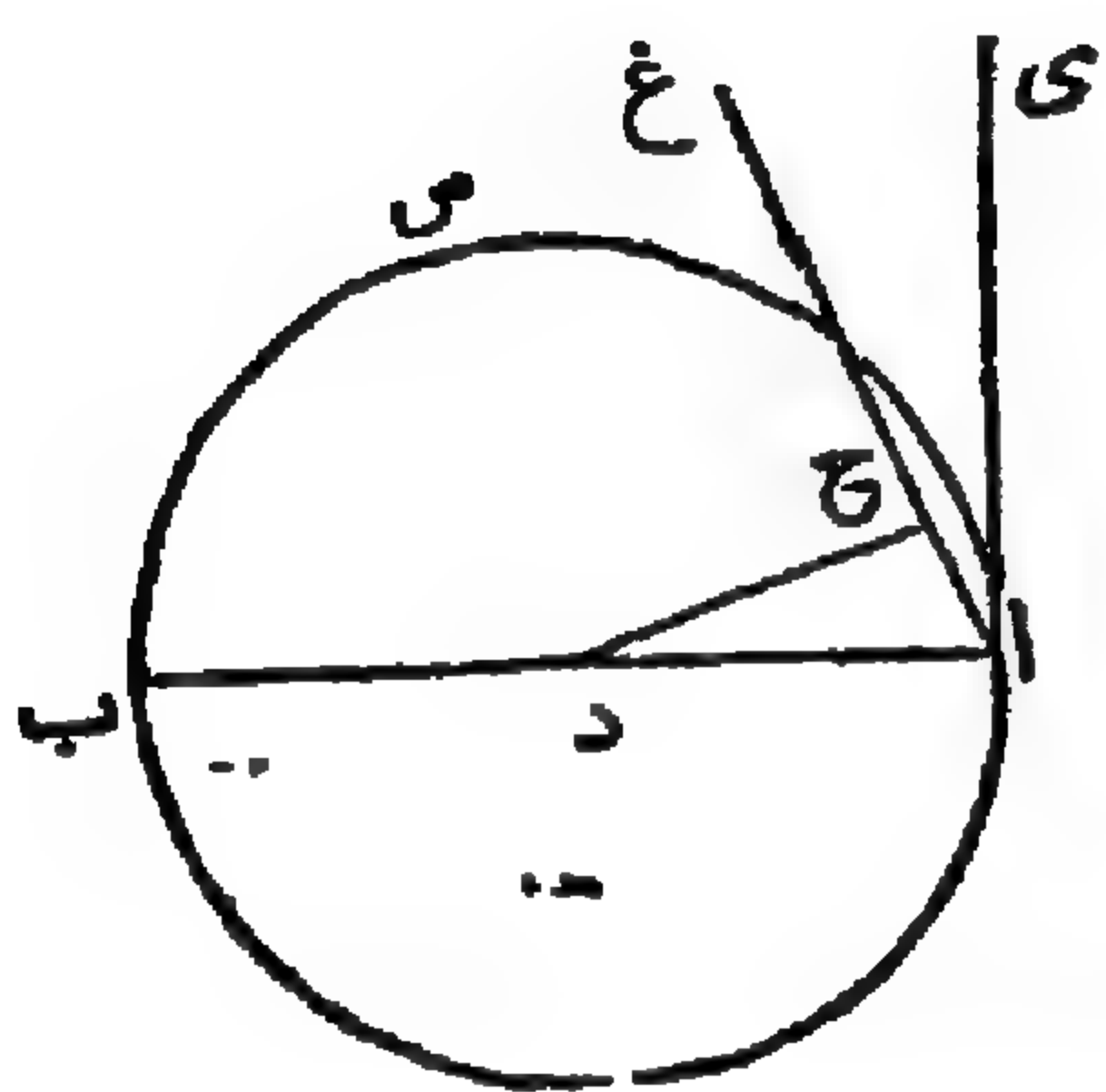
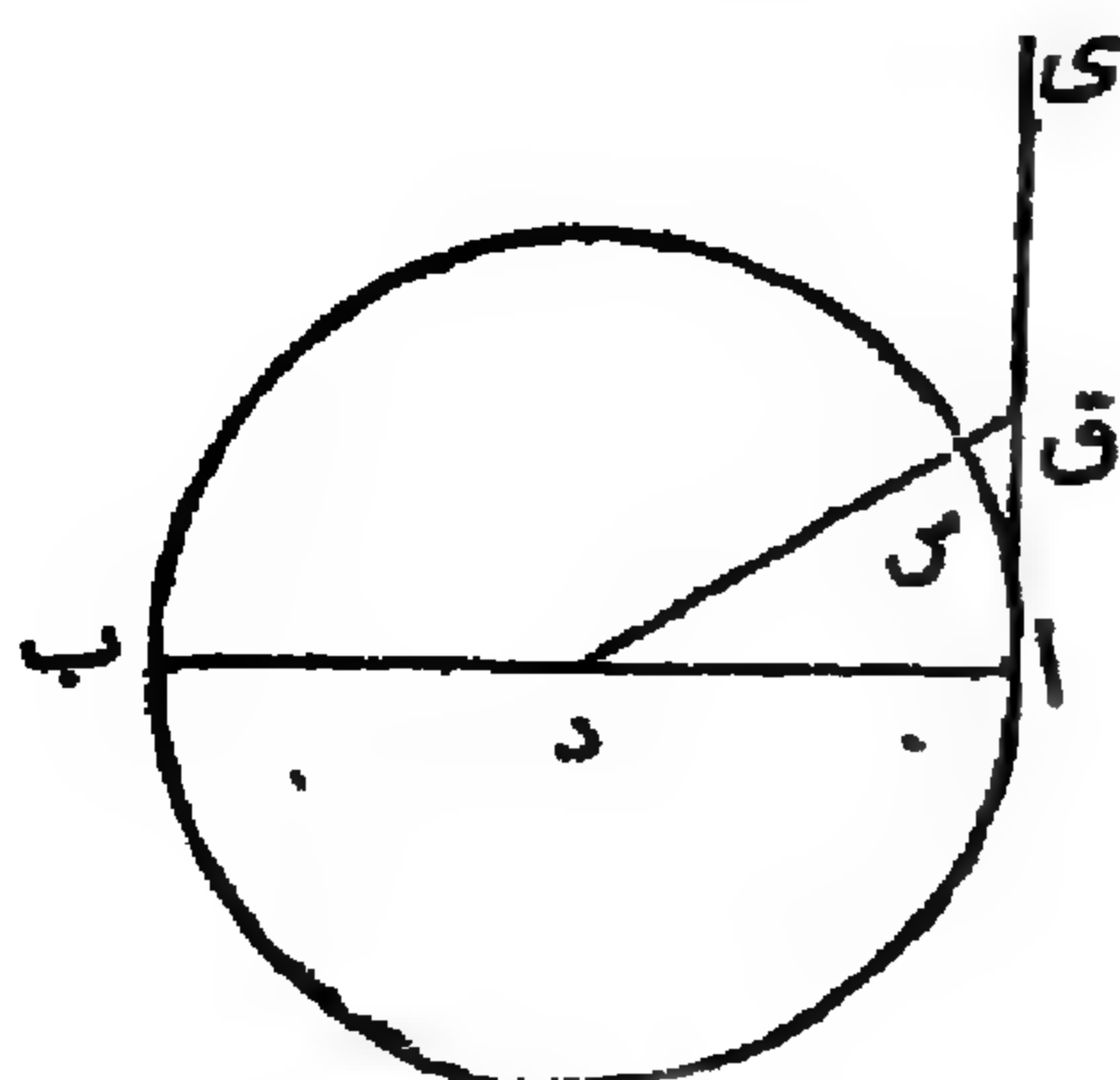
فرغ . الوتر الاقصر هو الابدع عن المركز وبالفلب الوتر الابدع عن المركز هو  
الاقصر

### القضية السادسة عشرة . ن

الخط المستقيم العمودي على طرف قطر دائرة هو واقع خارج الدائرة  
ولا يرسم خطاً مستقيماً من طرف القطر بين ذلك العمود ومحيط الدائرة  
بدون ان يقطع المحيط



لتكن  $AB$  س دائرة و  $D$  مركزها و  $AB$  قطرها و  $Y$  عموداً على  $AB$  من  
النقطة  $A$  فهو واقع خارج الدائرة



فرع اول. المخط العمودي على طرف قطر دائرة هو ممس الدائرة ويمسها في نقطة واحدة فقط لانه لو لاقاها في نقطتين لوقع داخل الدائرة (ق ٢ ك ٣) ولا يكون اكثر من ممس واحد في نقطة واحدة من الدائرة

فرع ثانٍ. العمود على طرف القطر هو مماس للدائرة وبالقرب المماس هو عمودي على طرف القطر

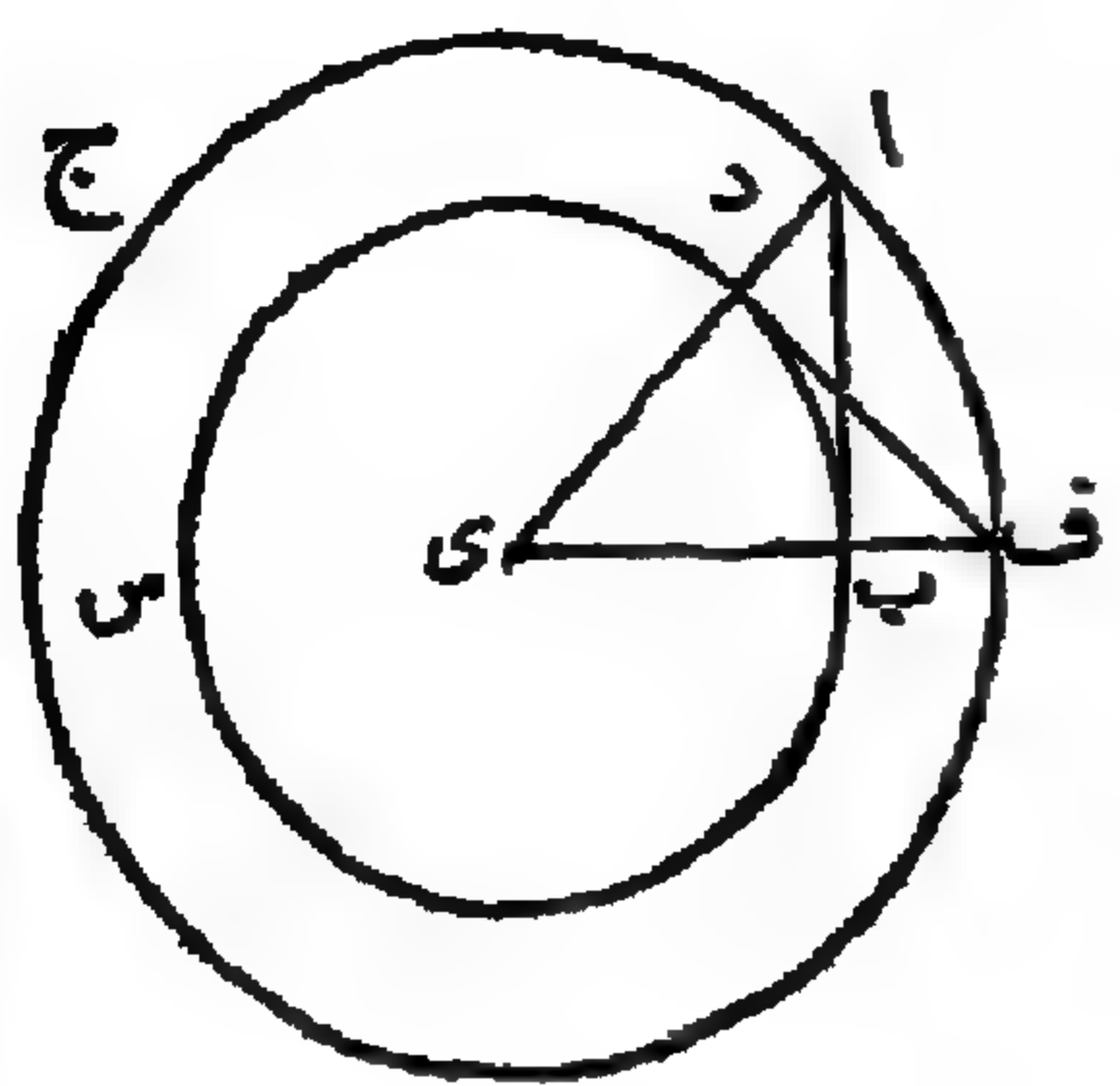
فرع ثالث. مماسان من طرفي القطرهما متوازيان (فرع ق ٢٨ ك ١) وبالقلم  
مماسان متوازيان هما عموديان على طرفي القطر

## القضية السابعة عشرة:ع

علينا ان نرسم خطاً مستقيماً من نقطة مفروضة في محيط دائرة او خارج المحيط حتى يماس دائرة مفروضة

اولاً تكن النقطة المفروضة خارج الدائرة ب س د فعلينا ان نرسم منها خطاً مستقيماً يماس الدائرة

استعلم المركزى (ق ١ ك ٢) وارسم اى واجعل ي مركزاً وى ا نصف قطر وارسم الدائرة ا ف ج ومن دارسم د ف عموداً على ا (ق ١١ ك ١) وارسم بى ب ف وايضاً ا ب فالخط ا ب يماس الدائرة



لان ي مركز الدائرتين ب س د ا ف ج فنصف القطرى ا ب عدل ي ف وى د يعدل ي ب فالضلعان اى ي ب يعدلان الضلعين ف ي ي د ولها الزاوية عند ي المشتركة بين المثلثين اى ب ف ي د فالقاعدة ا ب تعدل

القاعدة د ف والمثلث اى ب يعدل المثلث ف ي د وبقيّة زوايا الواحد تعدل بقيّة زوايا الآخر (ق ٤ ك ١) فالزاوية ي ب ا تعدل ي د ف ولكن ي د ف قائمة فاذاً ي ب ا قائمة ايضاً والخط ي ب قد رُسم من المركز و ا ب عمود عليه فهو اذاً مماس (فرع ٢ ق ١٦ ك ٢) وقد رُسم من النقطة المفروضة

ثم اذا كانت النقطة المفروضة في محيط الدائرة مثل د فارسم دى الى المركزى وارسم د ف عموداً على طرفه فهو مماس (فرع اول ق ١٦ ك ٢)

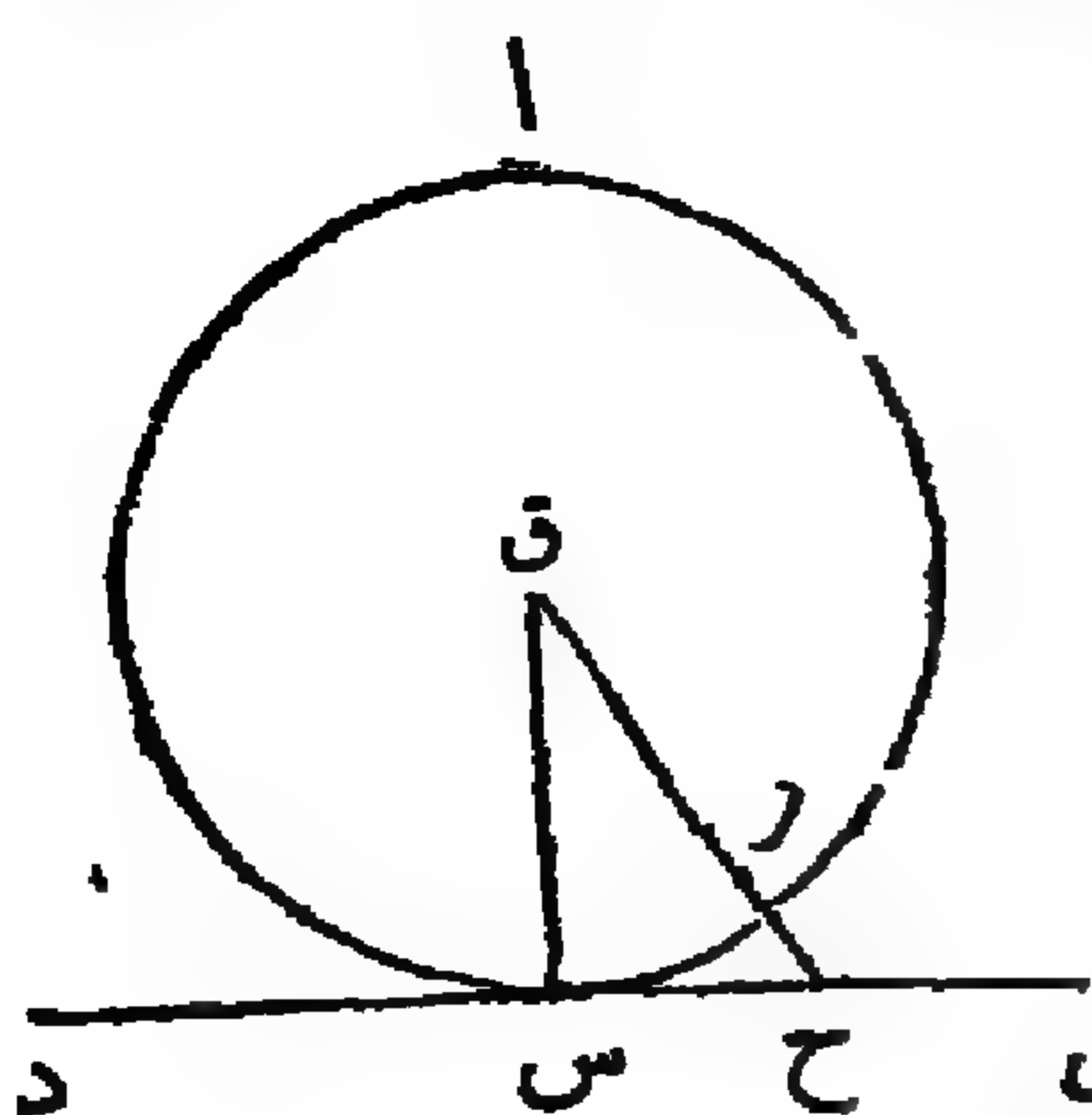
تعليقة. متى كانت النقطة ا خارج المحيط يُرسم مماسان متساويان منها لانه اذا اُخرج المماس ف د حتى يلاقي المحيط ا ج ثم اذا رُسم خط من المركز الى نقطة الملاقاة وآخر من ا الى موضع تقاطع الخط الاول والمحيط ب د س يحدث مثلث ذو قائمة يعدل ا ب ي

### القضية الثامنة عشرة. ن

اذا مس خط مستقيم دائرة فالخط المستقيم المرسوم من المركز الى نقطة المماس هو عمود على الخط المماس

لتكن ا س ب دائرة وليمسها الخط المستقيم دى في س. استعلم المركزى وارسم



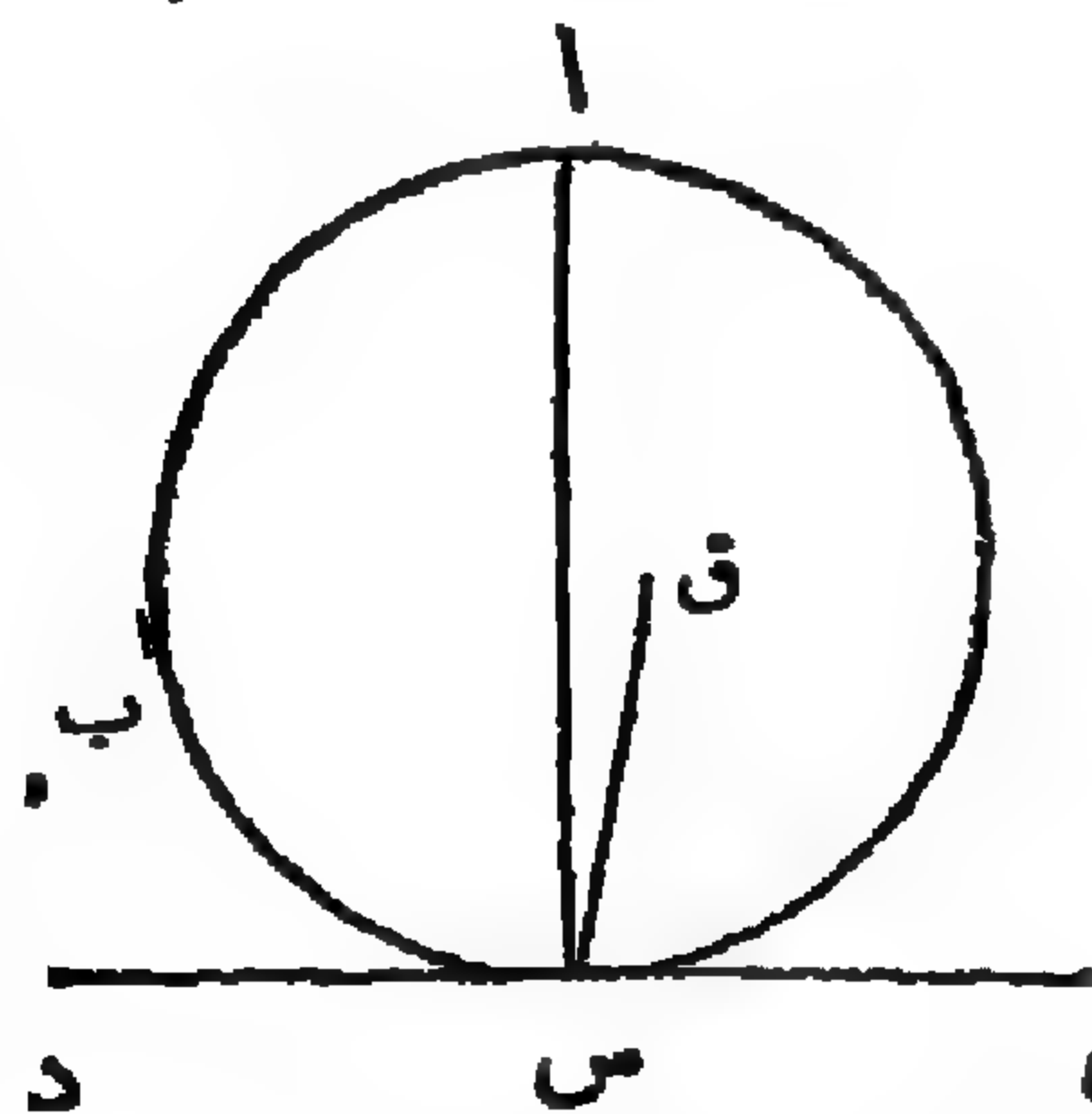


ق س فالخط المستقيم ق س انما هو عمود على  
دي والا فمن ق ارسم ق ب ج عمودا على  
دي فتكون ق ج س قائمة فتكون ج س ق  
حادة (ت ١٧ ك ١) والضلع الاطول يقابل  
الزاوية الكبرى (ق ١٩ ك ١) فالضلع ق س  
اطول من الضلع ق ج ولكن ق س بدل  
ق ب فاذا ق ب اطول من ق ج اعني الجزء اعظم من كله وذاك محال فلا يمكن  
ان يكون ق ج عمودا على دي وهكذا يبرهن في كل خط ما عدا ق س فهو عمود  
على دي

### القضية التاسعة عشرة . ن

اذا مس خط مستقيم دائرة ورسم من نقطة الماسة خط مستقيم عمودا  
على الماس فمركز الدائرة واقع في ذلك الخط العمودي

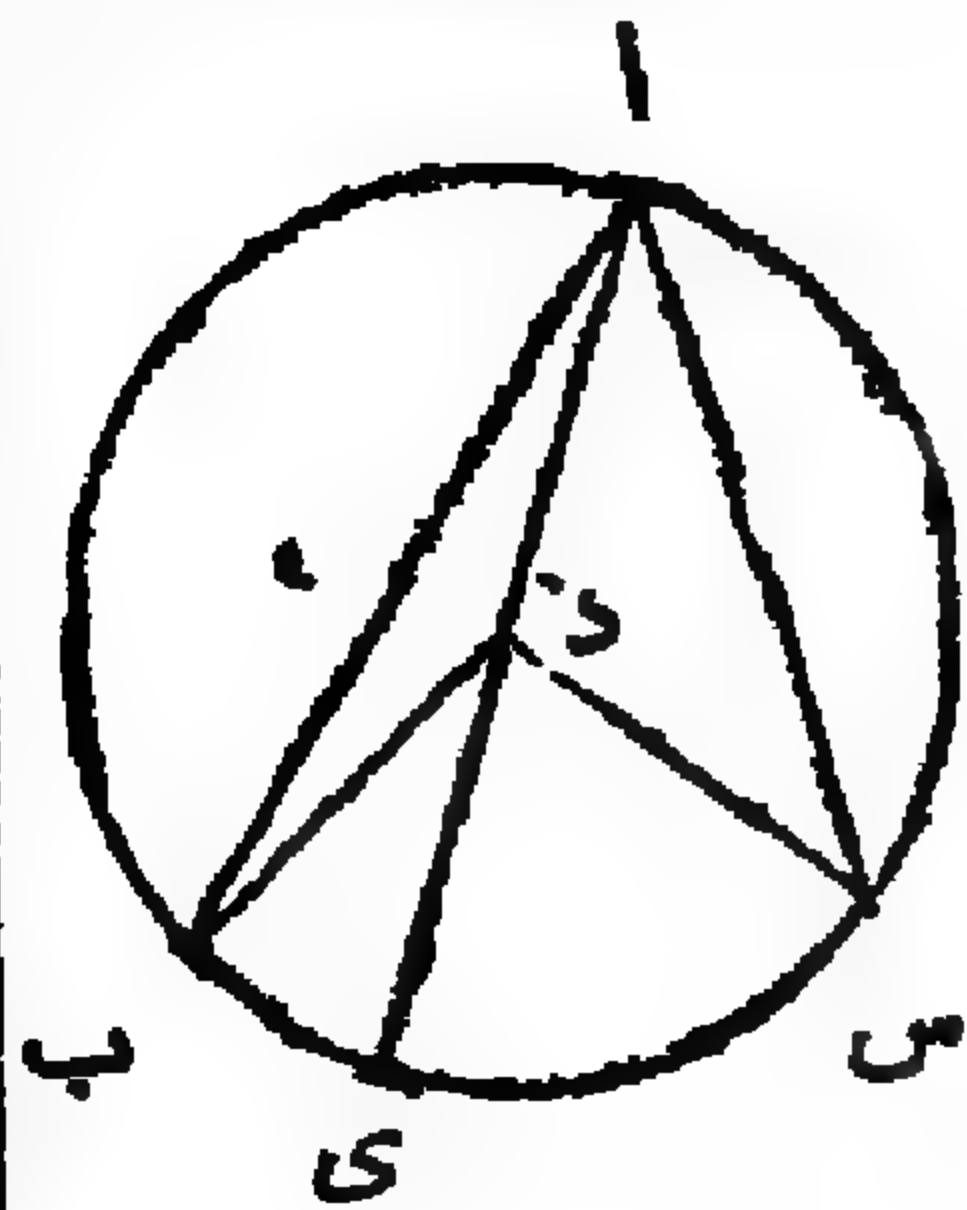
ليكن الخط المستقيم دي مماسا للدائرة اب س ومن نقطة الماسة س يرسم س ا  
عمودا على دي فمركز الدائرة واقع في الخط س ا  
والا فلنكن ق المركز ارسم ق س فحسب  
القضية السابقة ق س هو عمود على دي وق  
س ي قائمة ولكن اس ي ايضا قائمة فاذا  
اس ي تعدل ق س ي اعني الشكل يعدل  
جزءه وذاك محال فلا يمكن ان تكون ق المركز ي  
وهكذا يبرهن في كل نقطة لا تقع في الخط س ا فالمركز واقع في الخط س ا



### القضية العشرون . ن

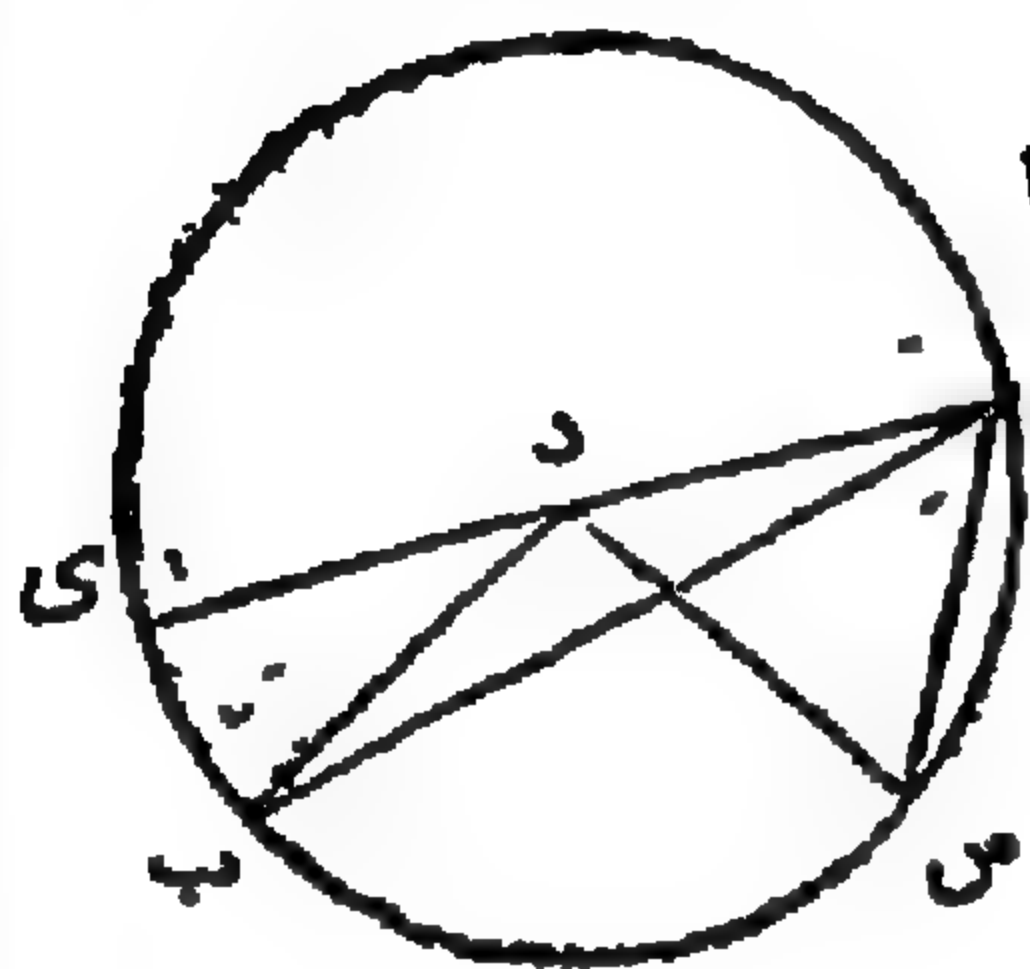
الزاوية عند مركز دائرة هي مضاعف الزاوية عند المحيط اذا كانتا على  
قاعدة واحدة اعني على جزء واحد من المحيط

لتكن  $ا ب س$  دائرة وب  $د س$  الزاوية عند المركز وب  $ا س$  الزاوية عند المحيط  
وكلتاها على جزء واحد من المحيط  $ب س$  فالزاوية  
 $ب د س$  انما هي مضاعف  $ب ا س$



اولاً ليكن  $د$  مركز الدائرة داخل الزاوية  $ب ا س$   
ارسم  $ا د$  واخرج  $ا$  الى  $ي$  فن حيث ان  $د ا$  يعدل  
 $د ب$  فالزاوية  $د ا ب$  تعدل الزاوية  $د ب ا$  (ق ٥  
ك ١) فالزاويتان  $د ب ا$   $د ا ب$  هما مضاعف

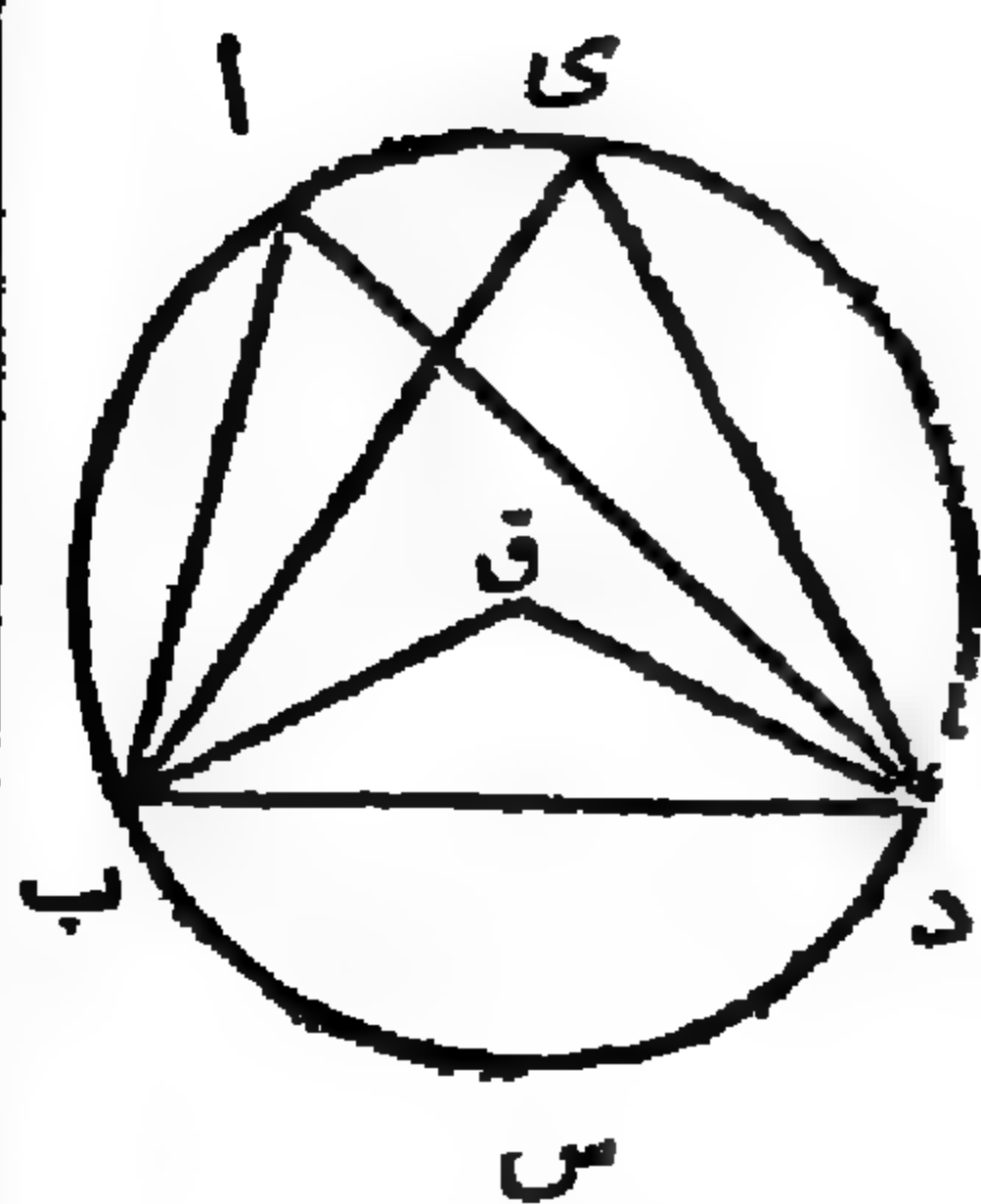
$د ا ب$  والزاوية  $ب د ي$  تعدل  $د ا ب$   $د ب ا$  معاً (ق ٢٢ ك ١) فاذا  $ب د ي$  هي  
مضاعف  $د ا ب$  وهكذا يبرهن ان  $ي د س$  مضاعف  $د ا س$  فالكل  $ب د س$   
مضاعف الكل  $ب ا س$



ثم ليكن المركز خارج الزاوية  $ب ا س$  ارسم  
 $ا د$  واخرج  $ا$  الى  $ي$  فيبرهن كما تقدم ان الزاوية  
 $ي د س$  هي مضاعف  $د ا س$  وان  $ي د ب$  جزءا  
من الاولى مضاعف  $د ا ب$  جزء من الثانية فالباقية  
 $ب د س$  مضاعف الباقية  $ب ا س$

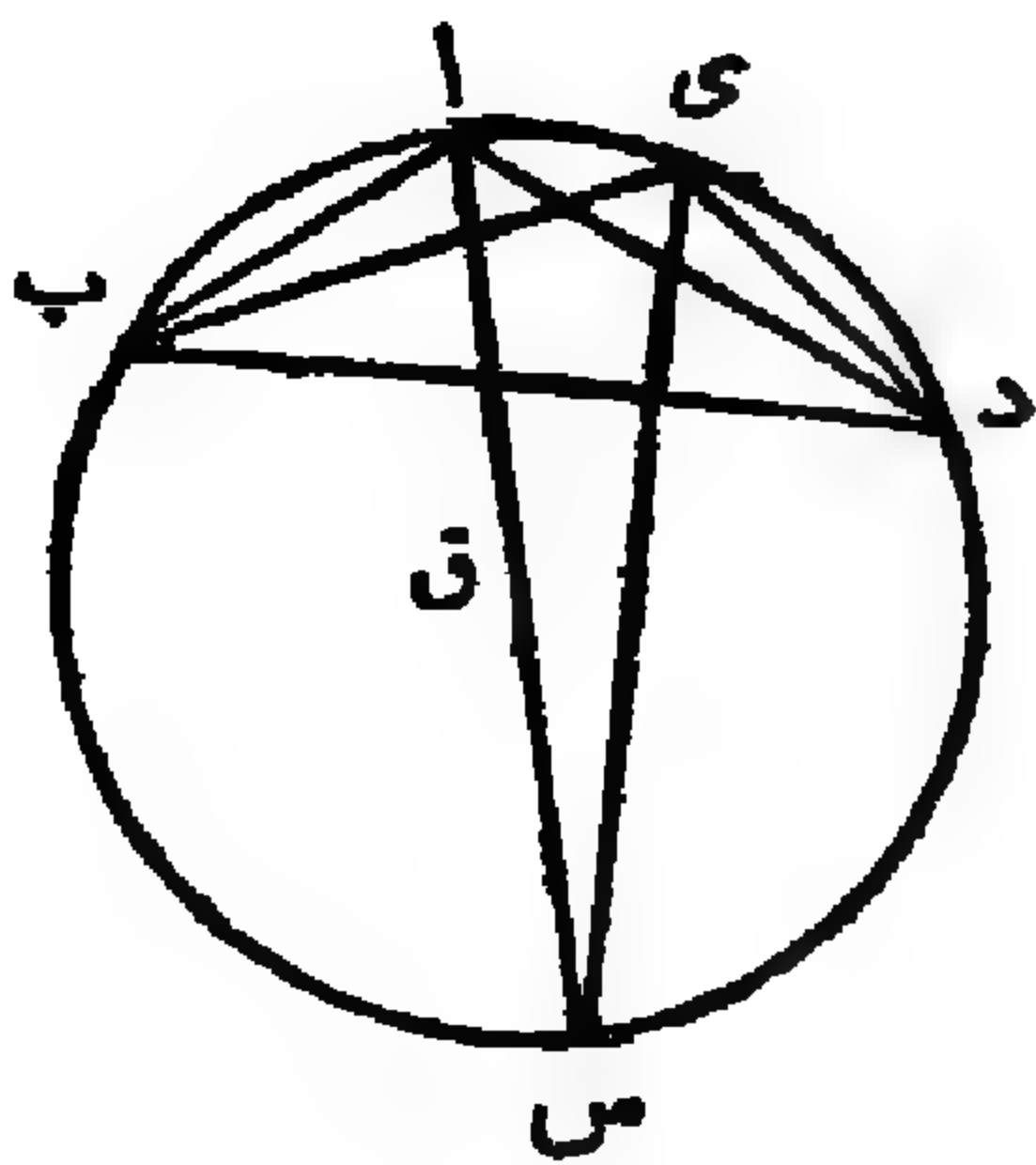
## القضية الحادية والعشرون

الزوايا في قطعة واحدة من دائرة هي متساوية



لتكن  $ا ب س$  دائرة وب  $ا د ب ي د$   
زاويتين في قطعة واحدة منها  $ب ا ي$   $د ب ا$  متساويتان  
استعلم  $ق$  مركز الدائرة واولاً لتكن القطعة  
 $ب ا ي$   $د ا ب$  من نصف دائرة ارسم  $ب ق$   $ق د$   
فالزاوية  $ب ق د$  عند المركز هي مضاعف الزاوية  
 $ب ا د$  عند المحيط لانهما على قاعدة واحدة  $ب س د$   
(ق ٢٠ ك ٢) وب  $ق د$  ايضاً مضاعف  $ب ي د$  فاذا  $ب ا د$   $ب ي د$

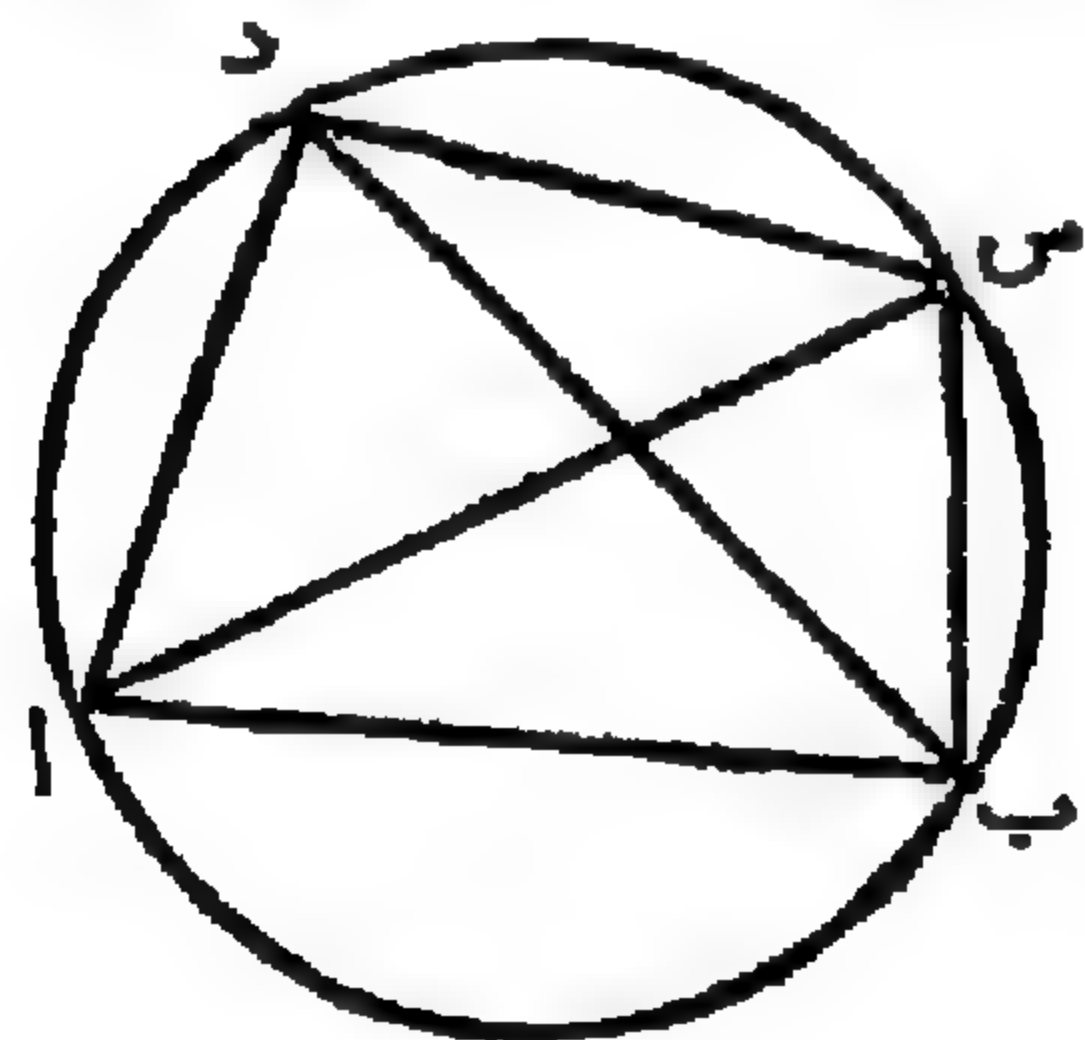




ثم اذا كانت القطعة ب ا ي د اصغر من نصف  
دائرة. ارسم ا ق الى المركز واخرجهُ الى س وارسم  
س ي فالقطعة ب ا د س هي اكبر من نصف دائرة  
والزاويتان فيها ب ا س ب ي س متساويتان  
حسباً تقدم وس ي د ايضاً اكبر من نصف دائرة  
والزاويتان فيها س ا د س ي د متساويتان ايضاً  
فالكل ب ا د يعدل الكل ب ي د

### القضية الثانية والعشرون

اذا رُسم في دائرة شكل ذو اربعة اضلاع فالزاويتان المتقابلتان منه  
يعدلان معاً قائمتين

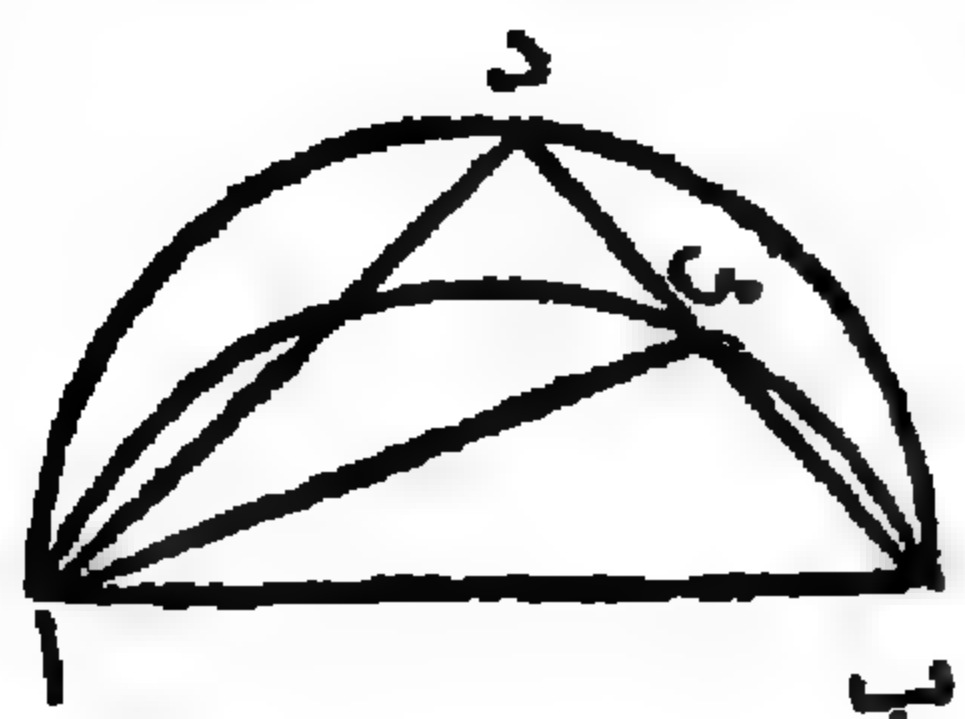


ليكن ا د س ب ذا اربعة اضلاع في دائرة فكل اثنتين متقابلتين من زواياه  
تعدلان معاً قائمتين. ارسم ا س و د ب فالزاوية  
س ا ب تعدل س د ب (ق ٢١ ك ٢) والزاوية  
ا س ب تعدل ا د ب فالكل ا د س يعدل  
الزاويتين س ا ب ا س ب. اضف الى كل واحدة  
منها ا ب س فلنا ا ب س مع ا د س تعدل ا ب س  
مع س ا ب مع ب س ا وهذه الثلاث تعدل قائمتين (ق ٢٢ ك ١) فاذا ا ب س  
ا د س معاً تعدلان قائمتين. وهكذا يبرهن ان د ا ب د س ب تعدلان قائمتين  
فرع اول. اذا اُخرج ضلعٌ من شكل ذي اربعة اضلاع مرسوم في دائرة  
فالزاوية الخارجة تعدل الداخلة المتقابلة  
فرع ثا. شكل ذو اربعة اضلاع كل زاويتين متقابلتين منه لا تعدلان  
قائمتين لا يرسم في دائرة

## القضية الثالثة والعشرون

لا تكون قطعتان متشابهتان على جانب واحد من خطٍ مستقيم بدون  
ان تطابقا

ان كان ممكنا لتكن ا س ب ا د ب قطعتين متشابهتين على جانب واحد من



الخط المستقيم ا ب وغير متطابقتين. فمن حيث ان

الدائرتين ا د ب ا س ب تتقاطعان في ا و ب

فلا يمكن ان تتقاطعا في نقطة اخرى (ق ١٠ ك ٢)

وبالضرورة تقع احدى القطعتين داخل الاخرى

فلتقع ا س ب داخل ا د ب وارسم الخط ب س د وايضا س ا و د ا. فمن حيث ان

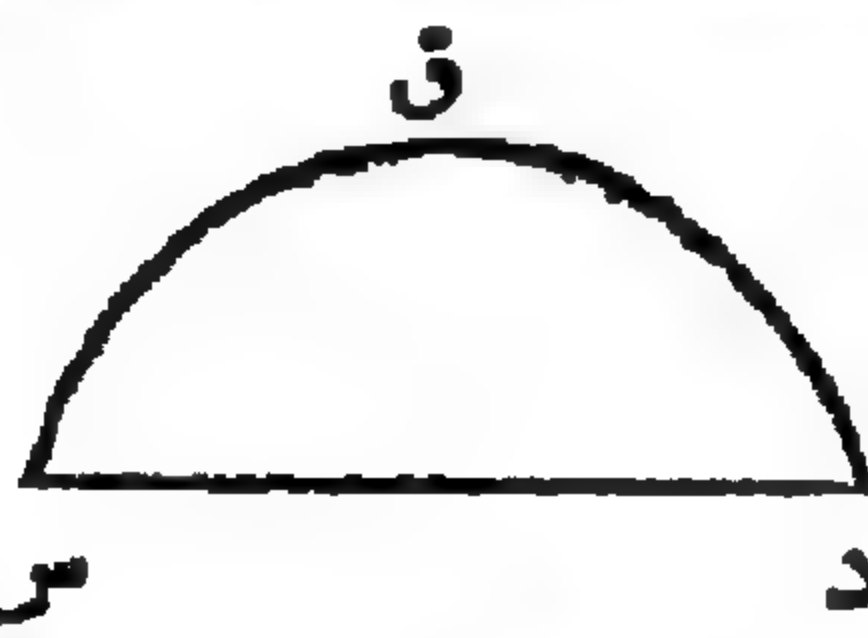
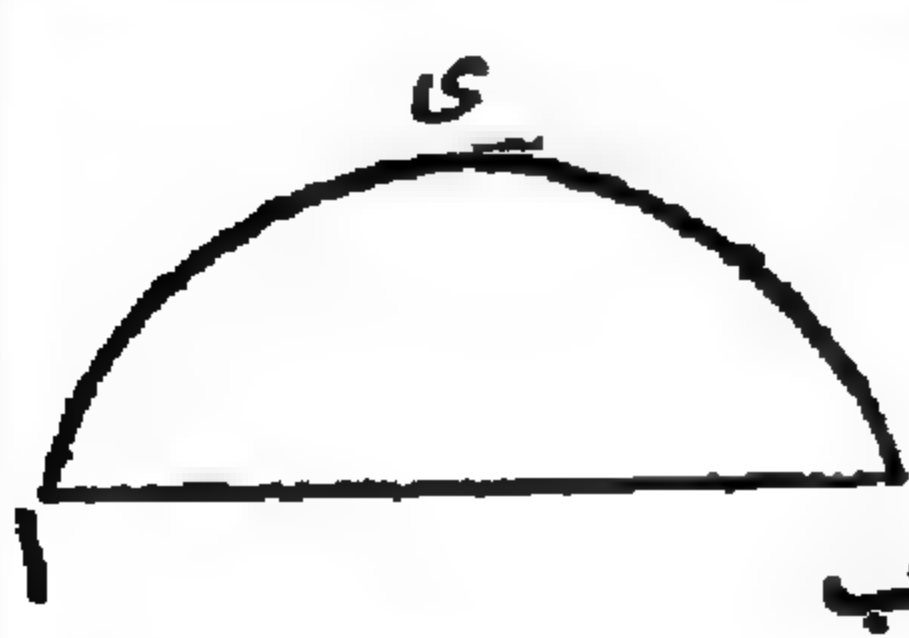
القطعتين متشابهتان اعني تحويان زوايا متساوية (حد ٩ ك ٢) فالزاوية الخارجة

ا س ب تعدل الداخلة المقابلة ا د ب وذاك لا يمكن (ق ١٦ ك ١)

## القضية الرابعة والعشرون

قِطْعٌ متشابهة على خطوطٍ مستقيمة متساوية هي متساوية

لتكن اى ب س ق د قطعتين متشابهتين على خطين مستقيمين متساويين



ا ب و س د فهما متساويتان

لانه اذا وضعت القطعة

اى ب على القطعة س ق د

بحيث تقع النقطة ا على النقطة س والخط ا ب على الخط س د فالنقطة ب تقع

على النقطة د لان ا ب يعدل س د فبالضرورة تطبق القطعة اى ب على القطعة

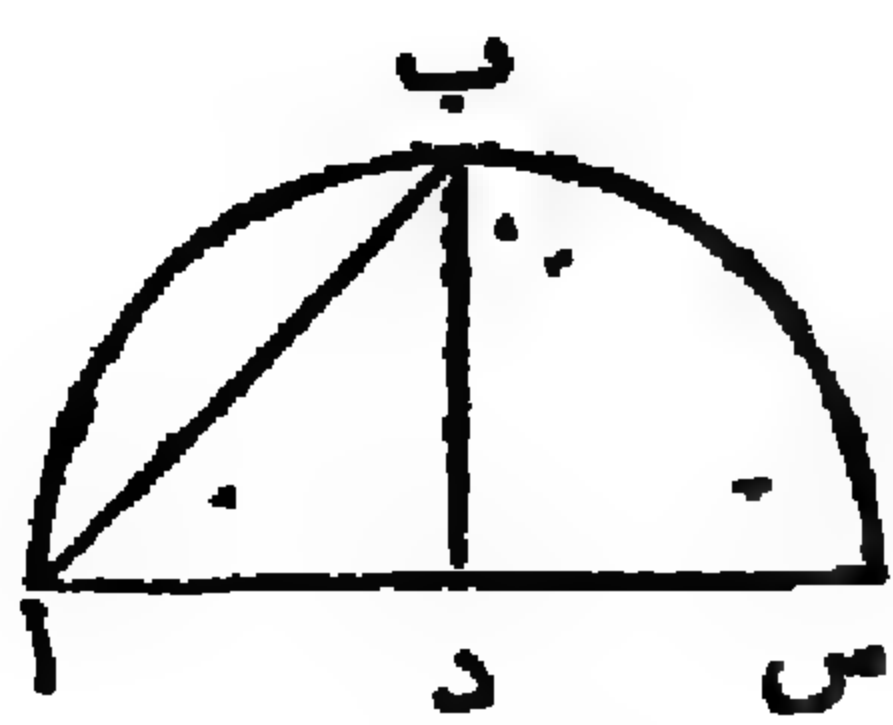
س ق د (ق ٢٢ ك ٢) فتعدلا

## القضية الخامسة والعشرون

اذا فرضت قطعة من دائرة فعلينا ان نتممها

لتكن ا ب س قطعة دائرة فعلينا ان نتم الدائرة

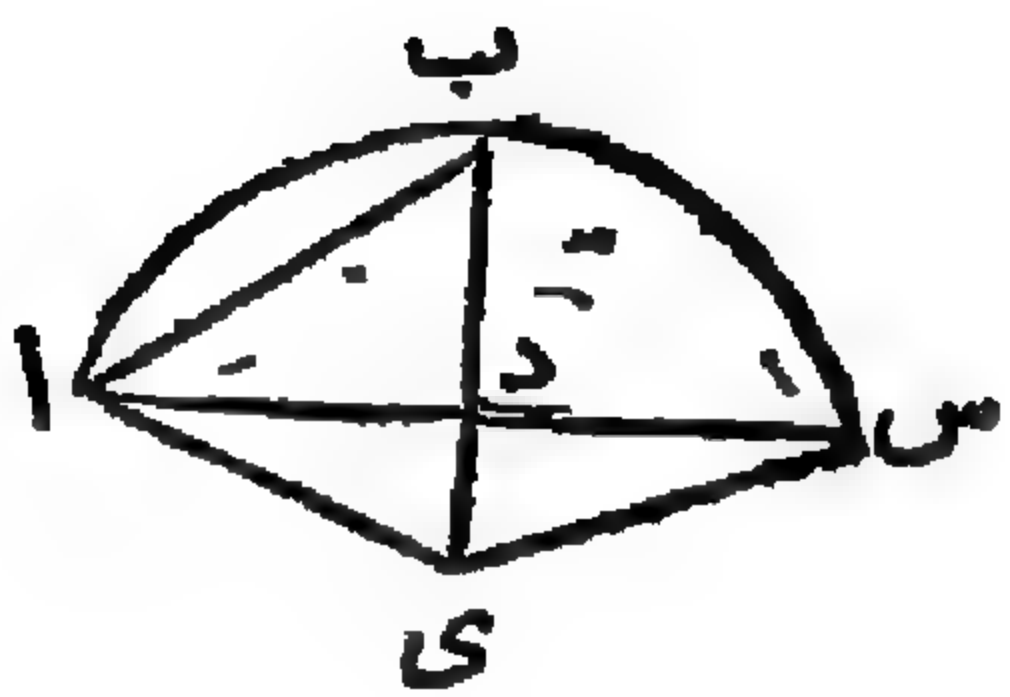




نصف اس في د (ق ١٠ ك ١) ومن دارسم دب  
عموداً على اس (ق ١١ ك ١) وارسم اب

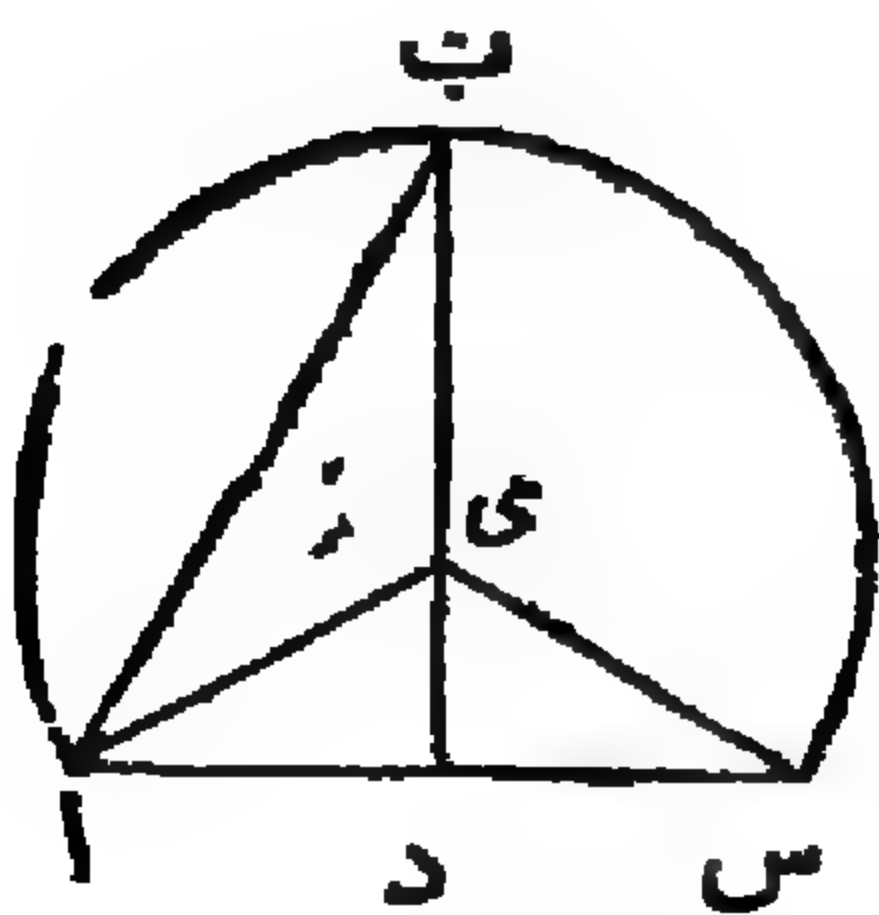
ثم اولا لتكن الزاويتان اب دب ا د متساويتين  
فالخطا د يعدل ب د (ق ٦ ك ١) ويعدل د س ايضاً

فالخطوط الثلاثة ا د دب د س هي متساوية فتكون د مركز الدائرة (ق ١ ك ٢)  
واذا جعلت د مركزاً واحداً من هذه الخطوط الثلاثة نصف قطر تم الدائرة التي  
كانت اب س قطعة منها. ومن حيث ان المركز واقع في اس فالقطعة اب س  
انما هي نصف دائرة



ثم لتكن الزاويتان اب دب ا د غير متساويتين  
ارسم الزاوية ب ا ي حتى تعدل اب د (ق ٢٢ ك ١)  
ولن لنم فالخرج ب د الى ي وارسم ي س. فمن حيث  
ان ب ا ي تعدل اب ي فالخط ا ي يعدل ب ي

(ق ٦ ك ١) ومن حيث ان ا د يعدل د س ودي مشترك بين المثلثين ا د ي س  
دي فالضلعان ا د دي يعدلان الضلعين س د دي اعني كل واحد يعدل  
نظيرة والزاوية ا د ي تعدل س د ي لانها قائمتان فالقاعدة ا ي تعدل القاعدة  
ي س (ق ٤ ك ١) و ا ي يعدل ب ي حسباً تقدم فالخطوط الثلاثة ا ي ب ي س  
ي متساوية وي مركز الدائرة (ق ١ ك ٢) التي كانت اب س قطعة منها واذا كانت  
الزاوية اب د اكبر من ب ا د فالامر واضح ان المركز واقع خارج القطعة اب س  
اعني انها اصغر من نصف دائرة

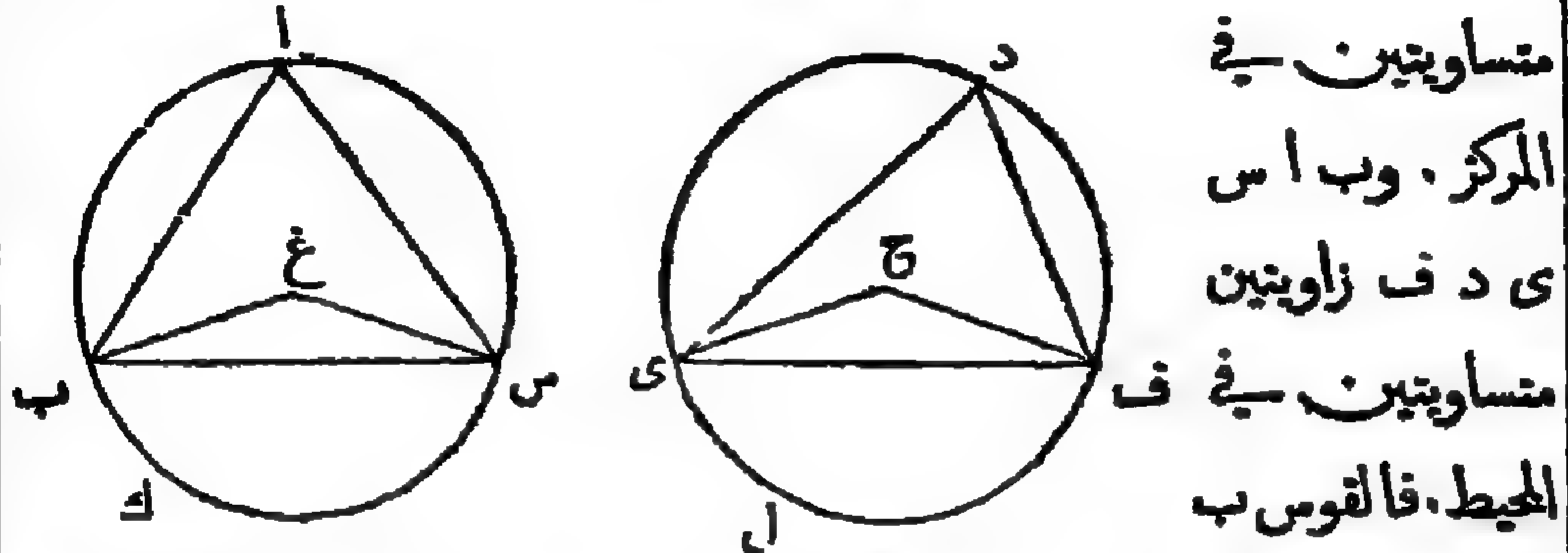


واذا كانت اب د اصغر من ب ا د فالمركز واقع  
داخل القطعة اعني هي اكبر من نصف دائرة وهكذا تم  
الدائرة اذا فرضت قطعة منها

## القضية السادسة والعشرون

زوايا متساوية في دوائر متساوية هي على اقواس متساوية ان كانت تلك  
الزوايا في المركز او في المحيط

لكن ا ب س د ي ف دائرتين متساويتين وب غ س ي ح ف زاويتين



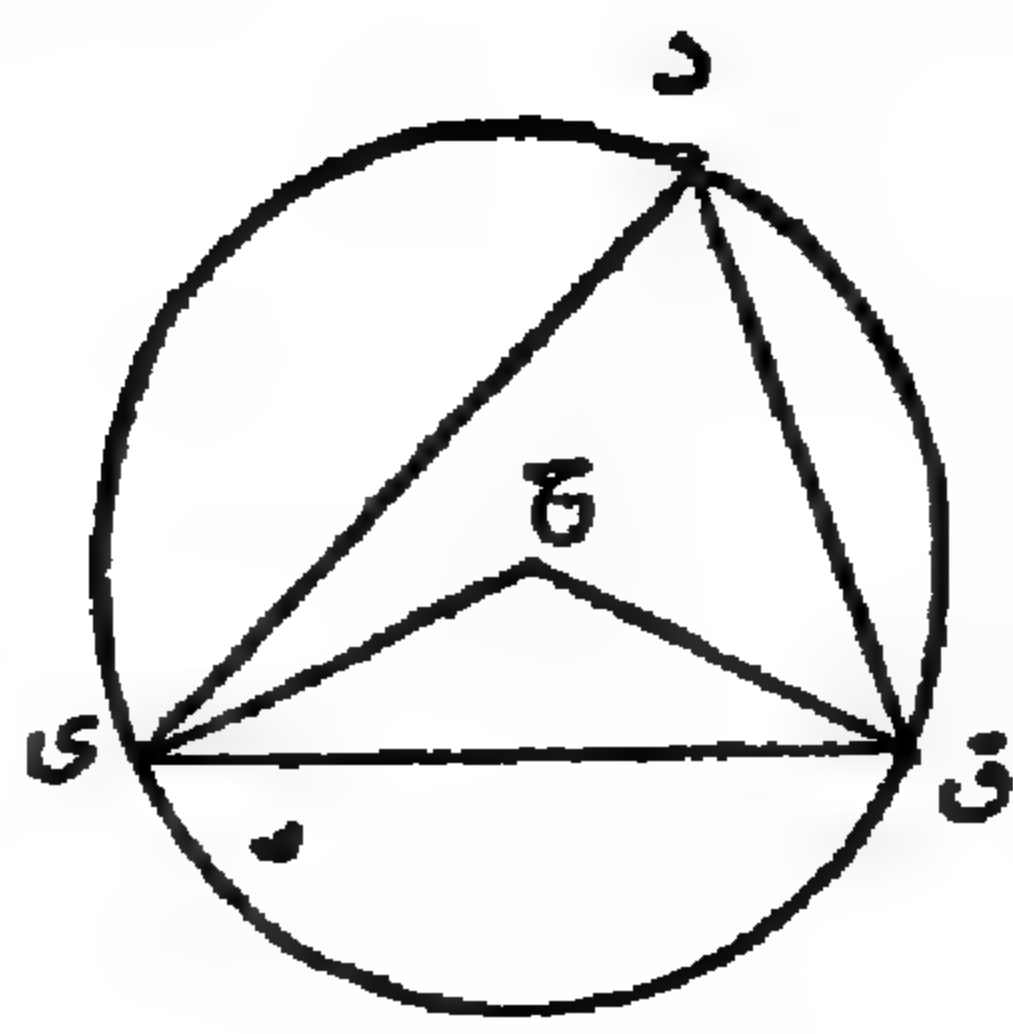
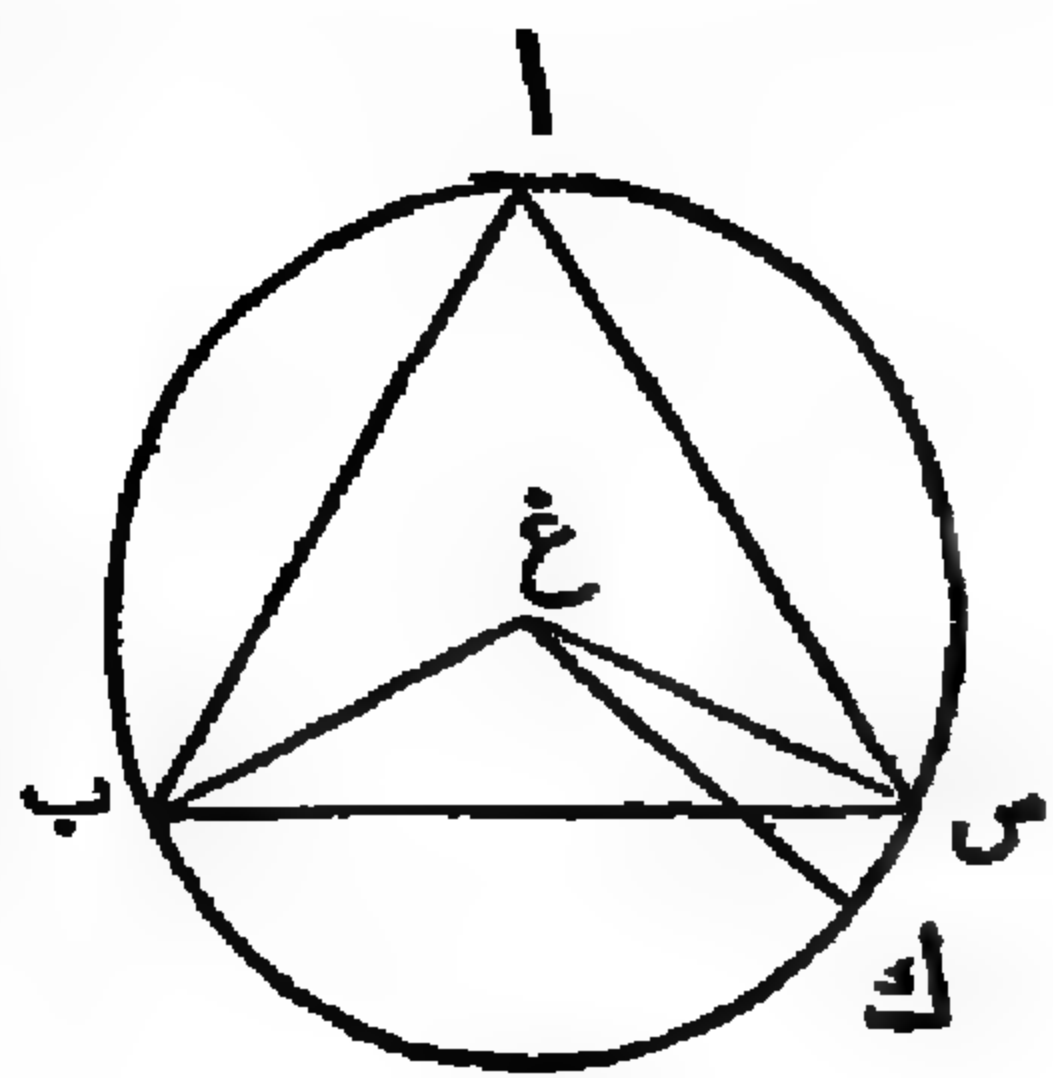
كس يعدل القوس ي ل ف ا رسم الوترين ب س ي ف. فمن حيث ان الدائرتين  
متساويتان فالخطوط المستقيمة المرسومة من مركزها متساوية. فالخطان ت غ غ س  
يعدلان ي ح ح ف والزوايا ب غ س تعدل ي ح ف فالقاعدة ب س تعدل  
القاعدة ي ف (ق ٤ ك ١) ومن حيث ان الزاوية عند ا تعدل الزاوية عند د فالقطعة  
ب ا س تشابه القطعة ي د ف (حد ٩ ك ٣) وهما على الخطين المتساويين ب س  
ي ف والقطع المتشابهة على خطوط متساوية هي متساوية (ق ٤ ك ٢) فالقطعة  
ب ا س تعدل القطعة ي د ف. ولكن كل الدائرة ب ا س تعدل الكل ي د ف  
فالبقية ب ك س تعدل البقية ي ل ف

## القضية السابعة والعشرون

زوايا واقعة على اقواس متساوية في دوائر متساوية هي متساوية ان  
كانت في المركز او في المحيط

في الدائرتين المتساويتين ا ب س د ي ق لكن الراويان في المركز ب غ س





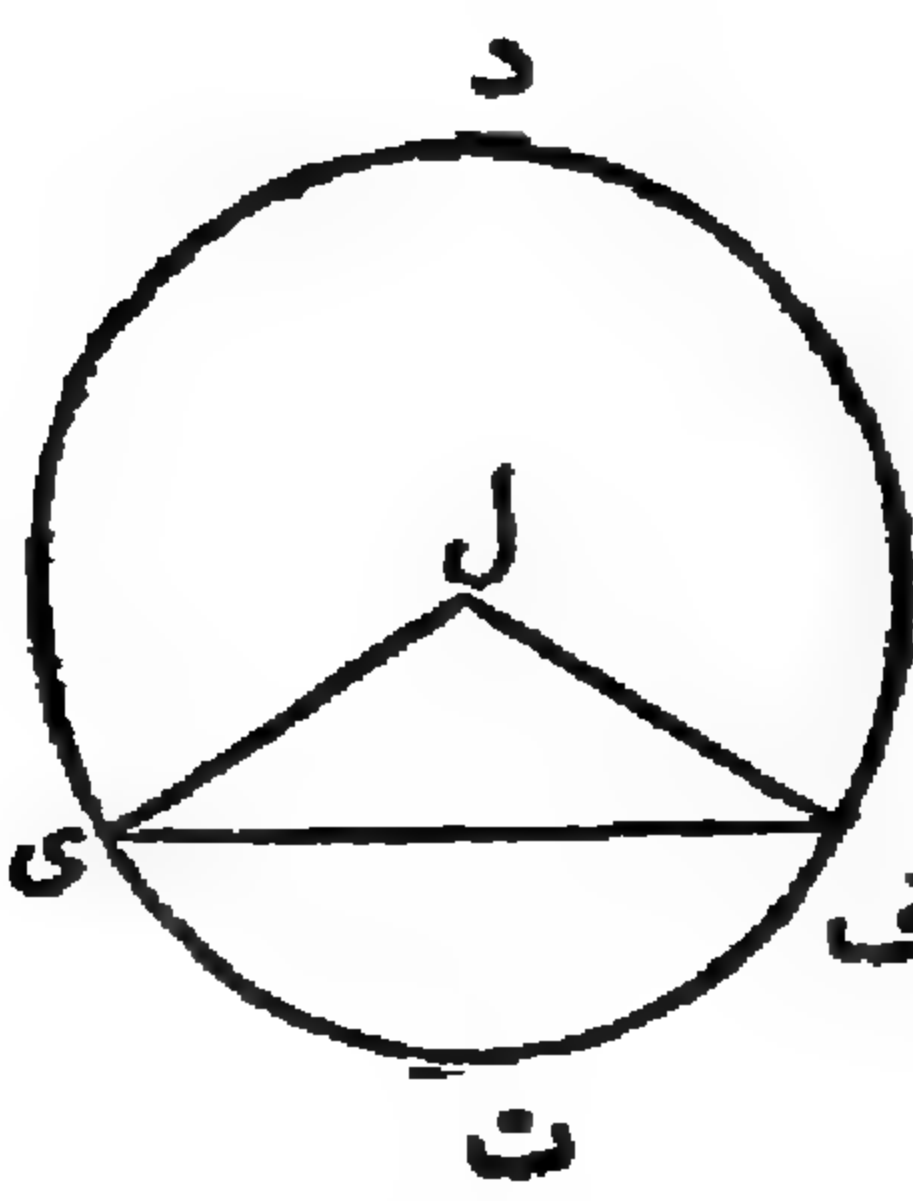
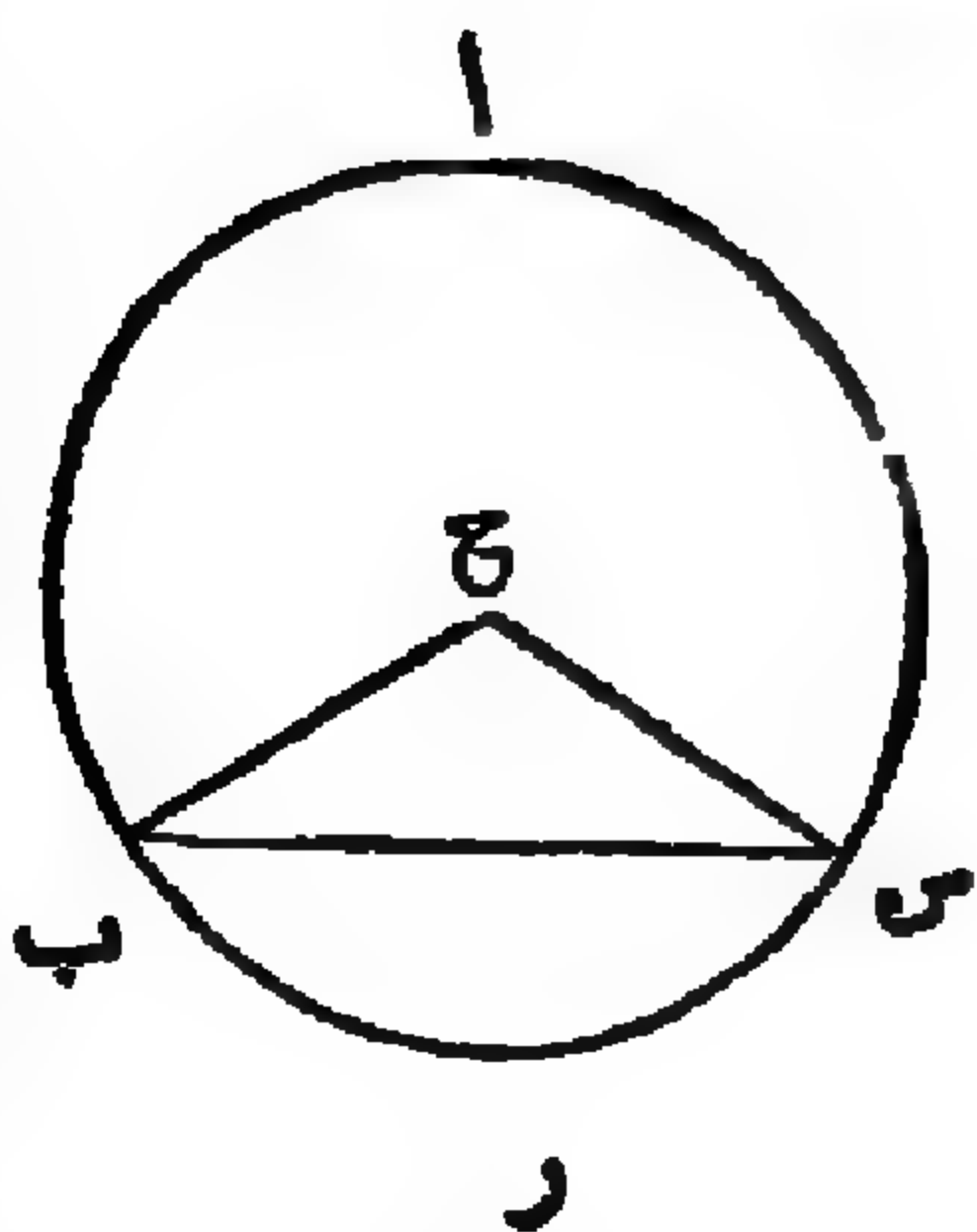
ي ح ق والزوايتان  
في المحيط ب ا س  
ي د ق على القوسين  
المساويين ب س ي  
ق فالزاوية ب غ س

تعديل ي ح ق وب ا س تعديل ي د ق

الزاوية ب غ س اذا عدلت ي ح ق فالامر واضح (ق ٢٠ ك ٣) ان ب ا س  
تعديل ي د ق ولا فتكون احدها اكبر من الاخرى. لتكن ب غ س اكبرها وعلى  
النقطة غ من الخط المستقيم ب غ ارسم الزاوية ب غ ك حتى تعديل ي ح ق (ق ٢٢  
ك ١). فمن حيث ان الزوايا المتساوية عند المراكزي على اقواس متساوية (ق ٢٦  
ك ٣) فالقوس ب ك يعدل القوس ي ق. وقد فرض ان ي ق يعدل ب س  
فالقوس ب ك يعدل ب س ايضا اي الاصغر يعدل الاكبر وذاك محال. فلا يمكن  
ان تكون ب غ س ي ح ق غير متساويتين ايها متساويتان. والزاوية عند ا هي  
نصف الزاوية ب غ س والزاوية عند د هي نصف ي ح ق فالزاوية عند ا تعديل  
الزاوية عند د

### القضية الثامنة والعشرون

خطوط مستقيمة متساوية في دوائر متساوية تقطع اجزاء متساوية الاكبر  
يعديل الاكبر والاصغر يعدل الاصغر



ليكن ب س  
ي ف خطين مستقيمين  
متساويين في دائرتين  
متساويتين ا ب س  
د ي ف وليقطعا  
القوسين الاكبرين

ب ا س ي د ف والاصغرين ب ر س ي ت ف فالقوس ب ا س تعديل ي د ف

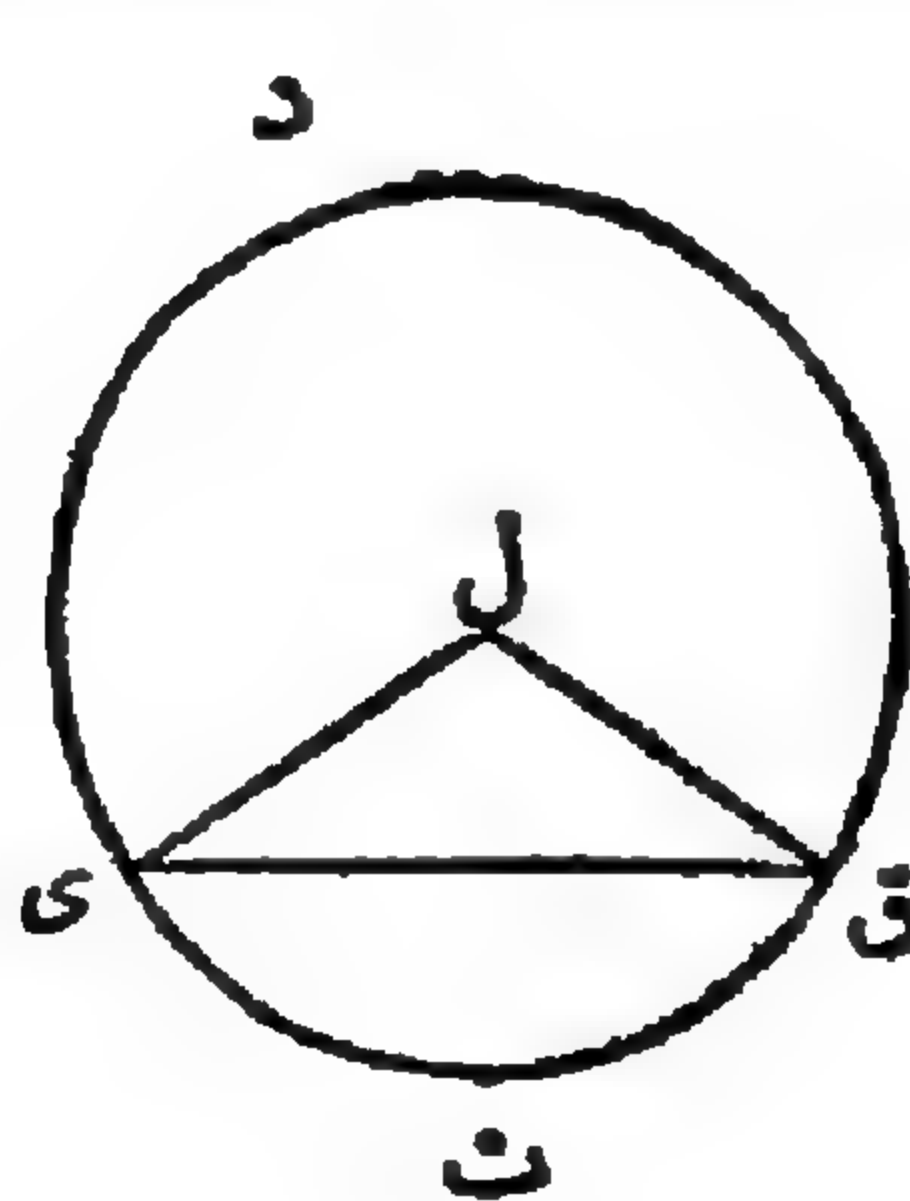
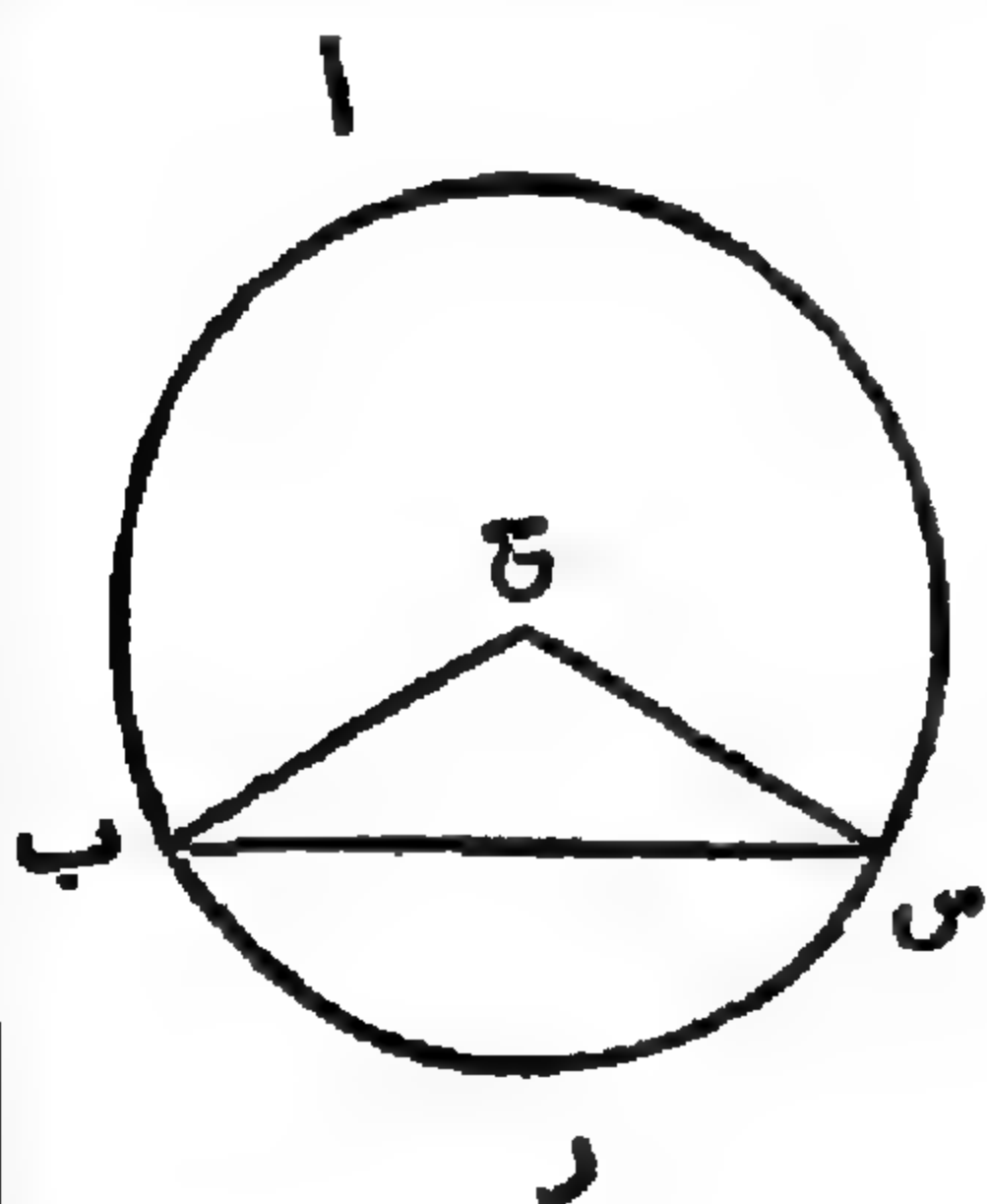
وب رس يعدل ي ت ف

استعلم المركزين ح ول (ق ١ ك ٢) وارسم ح ب ح س ل ي ل ف. فمن حيث ان الدائرتين متساويتان فالخطوط المستقيمة المرسومة من مركبيهما هي متساوية فالخطان ب ح ح س يعدلان ي ل ل ف. وقد فرض ان القاعدة ب س تعدل القاعدة ي ف فالزاوية ب ح س تعدل الزاوية ي ل ف (ق ٨ ك ١) والزاوية المتساوية عند المركز هي على اقواس متساوية (ق ٢٦ ك ٢) فالقوس ب رس يعدل القوس ي ت ف والدائرة ا ب س تعدل الدائرة د ي ف فالباقي ب ا س يعدل الباقي ي د ف

### القضية التاسعة والعشرون

اقواس متساوية في دوائر متساوية تقابلها خطوط مستقيمة متساوية

لتكن ا ب س د ي ق دائرتين متساويتين والقوسان ب رس ي ت ق



متساويتين فالخطان  
المستقيمان المقابلان لهما  
ب س ي ق ايضاً  
متساويان  
استعلم المركزين  
ح ول (ق ١ ك ٢)

وارسم ح ب ح س ل ي ل ق. فمن حيث ان القوس ب رس يعدل القوس ي ت ق والزاوية ب ح س تعدل الزاوية ي ل ق (ق ٢٧ ك ٢) وح ب ح س يعدلان ل ي ل ق لانها أنصاف اقطار دائرتين متساويتين فالقاعدة ب س تعدل القاعدة ي ق (ق ٤ ك ١)

### القضية الثلاثون

علينا ان نتصف قوساً مفروضاً اي ان نقسمه الى قسمين متماثلين

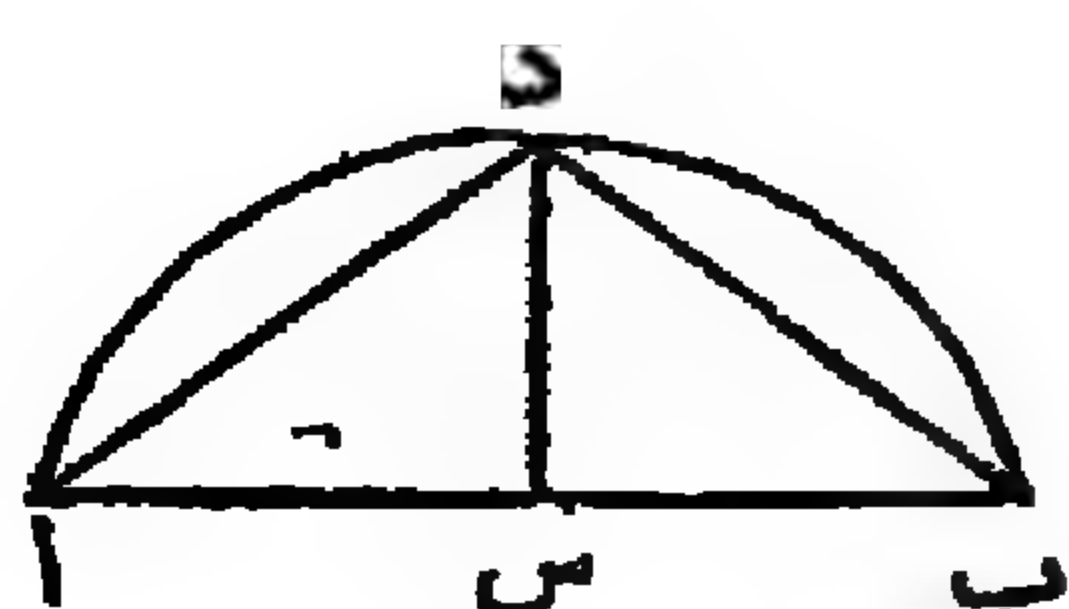


ليكن ا د ب القوس المفروض . فعلينا ان نصفه

ارسم ا ب ونصفه في س (ق ١٠ ك ١) وارسم

س د عموداً على ا ب وارسم ا د ب فقد تنصف

القوس ا د ب في النقطة د



لان اس يعدل س ب وس د مشتركين المثلثين اس د ب س د والزاوية

اس د تعدل الزاوية ب س د لأن كل واحدة منهما قائمة فالقاعدة ا د تعدل القاعدة

ب د (ق ٤ ك ١) والمحاط المستقيمة المتساوية تقطع اقواساً متساوية (ق ٢٨ ك ٢)

والأكبر يعدل الأكبر والأصغر يعدل الأصغر وكل واحد من ا د ب د أصغر من

نصف دائرة لأن د س يمر بالمركز (فرع ق ١ ك ٢) فالقوس ا د يعدل القوس د ب

فقد تنصف ا د ب في د

تعليقة . وعلى هذه الكمية كل واحد من النصفين ا د ب يتنصف ايضاً

فيقسم قوس مفروض الى اربعة او ثمانية اجزاء او الى ستة عشر جزءاً متساوية وهام جداً

### القضية السادسة والثلاثون . ن

الزاوية المرسومة في نصف دائرة هي قائمة والمرسومة في قطعة أكبر من

نصف دائرة هي أصغر من قائمة والمرسومة في قطعة أصغر من نصف

دائرة هي أكبر من قائمة

ليكن ا ب س د دائرة وب س قطرها وي مركزها . ارسم س ا الذي يقسم

الدائرة الى قطعتين ا ب س ا د س وارسم ب ا

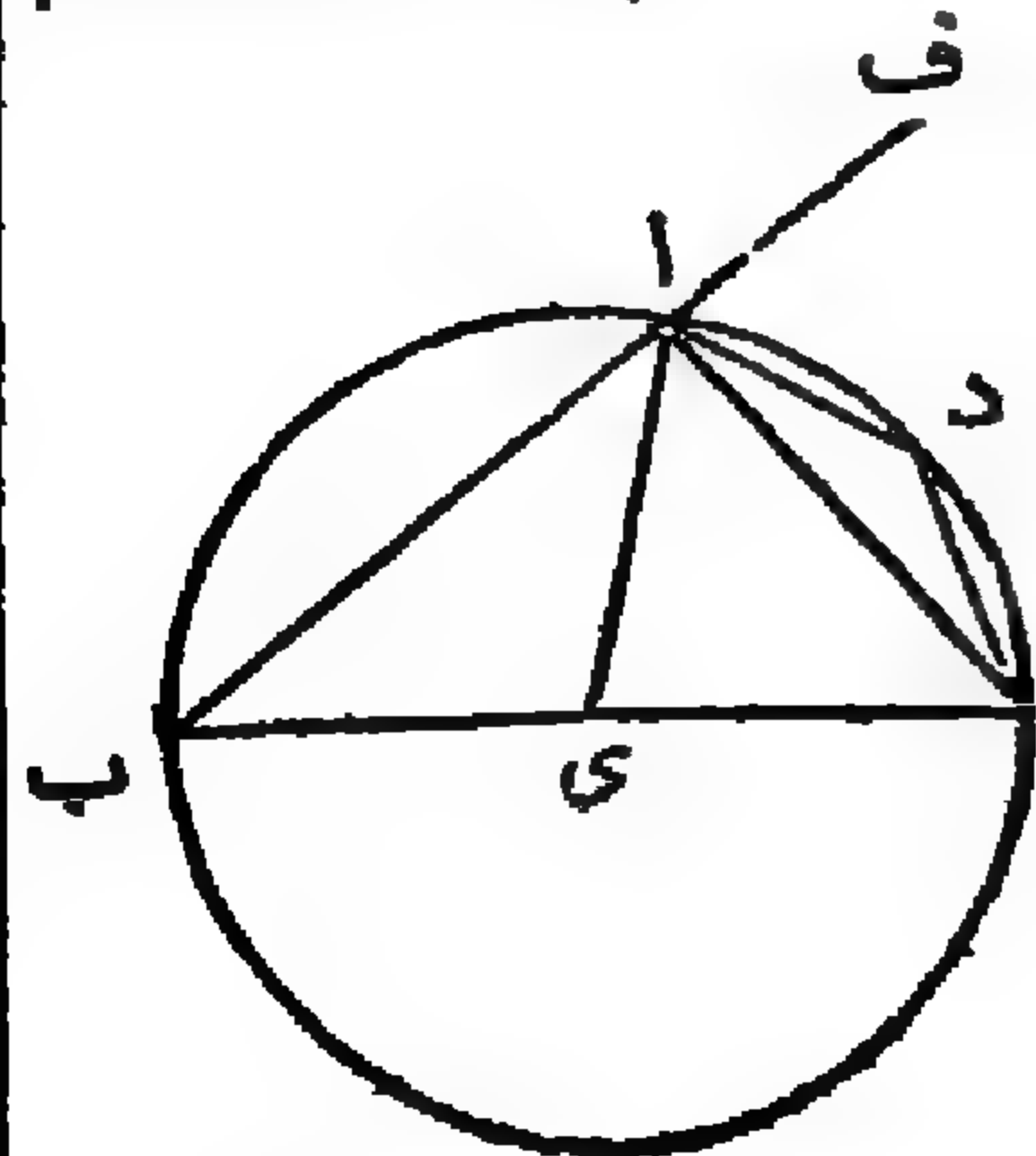
ا د د س . فالزاوية في نصف الدائرة ب ا س هي

قائمة والزاوية في القطعة ا ب س التي هي أكبر من

نصف الدائرة فأصغر من قائمة والزاوية في القطعة س

ا د س التي هي أصغر من نصف الدائرة فأكبر من قائمة

ارسم ا ي واخرج ب ا الى ف . فمن حيث



ا ب ب ي يعدل ا ي فالزاوية ا ب ي ا (ق ٥ ك ١) ولأن س ي



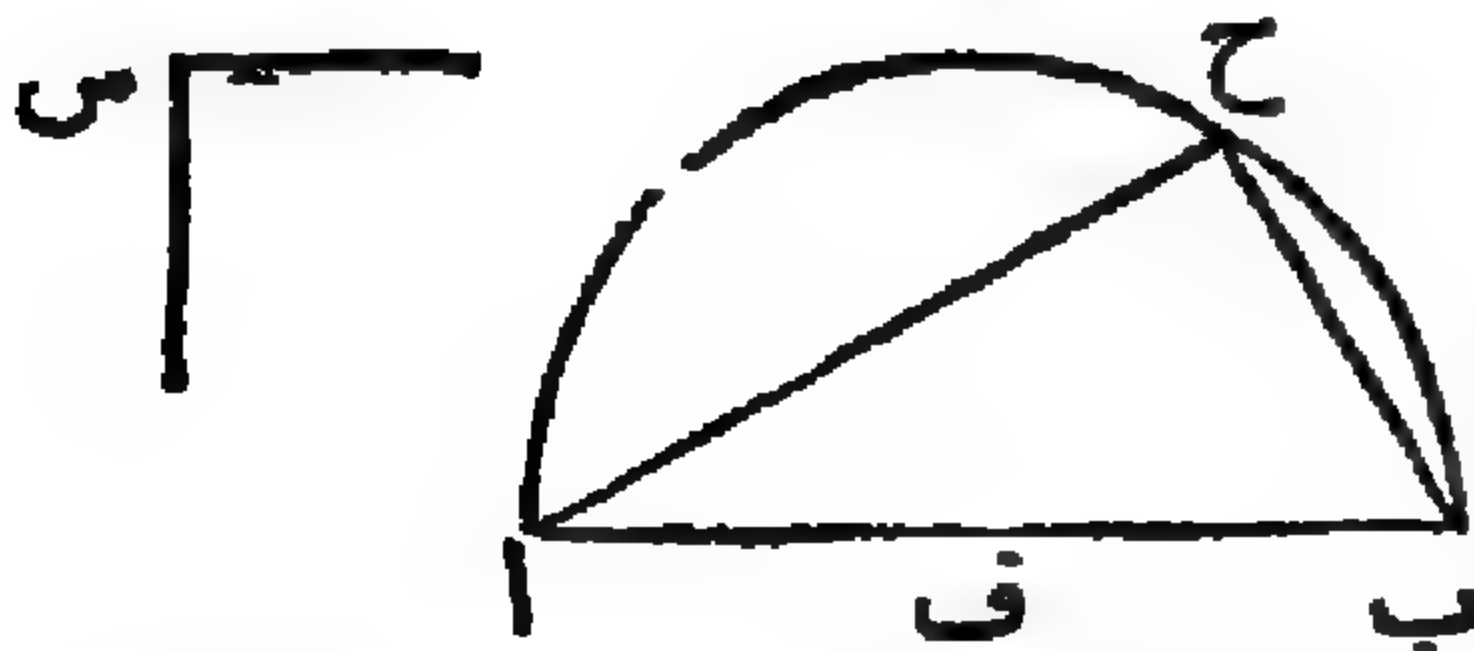


نقطة شئت كالنقطة س وارسم الخطوط المستقيمة ا د د س س ب . فمن حيث ان  
الخط المستقيم ي ف يمس الدائرة ا ب س د في النقطة ب وقد رُسم ب ا عموداً على  
المماس من نقطة المماس فمركز الدائرة في الخط ب ا (ق ١٩ ك ٢) والزاوية ا د ب هي  
في نصف دائرة وهي قائمة (ق ٢١ ك ٢) والزاويتان الاخرتان د ا ب ا ب د تعدلان  
قائمة (ق ٢٢ ك ١) والزاوية ا ب ف قائمة فتعدل الزاويتين ب ا د ا ب د . اطرح  
الزاوية المشتركة ا ب د فالباقية د ب ف تعدل الباقية ب ا د في القطعة المتبادلة  
من الدائرة . ومن حيث ان الشكل ا ب س د ذو اربعة اضلاع في دائرة فالزاويتان  
المتقابلتان ب ا د ب س د متعادلتان قائمتين (ق ٢٢ ك ٢) ولذلك تعدلان  
ايضاً د ب ف د ب ي (ق ١٢ ك ١) وقد تبرهن ان د ب ف تعدل ب ا د فالباقية  
د ب ي تعدل الباقية ب س د في القطعة المتبادلة من الدائرة

### القضية الثالثة والثلاثون . ع

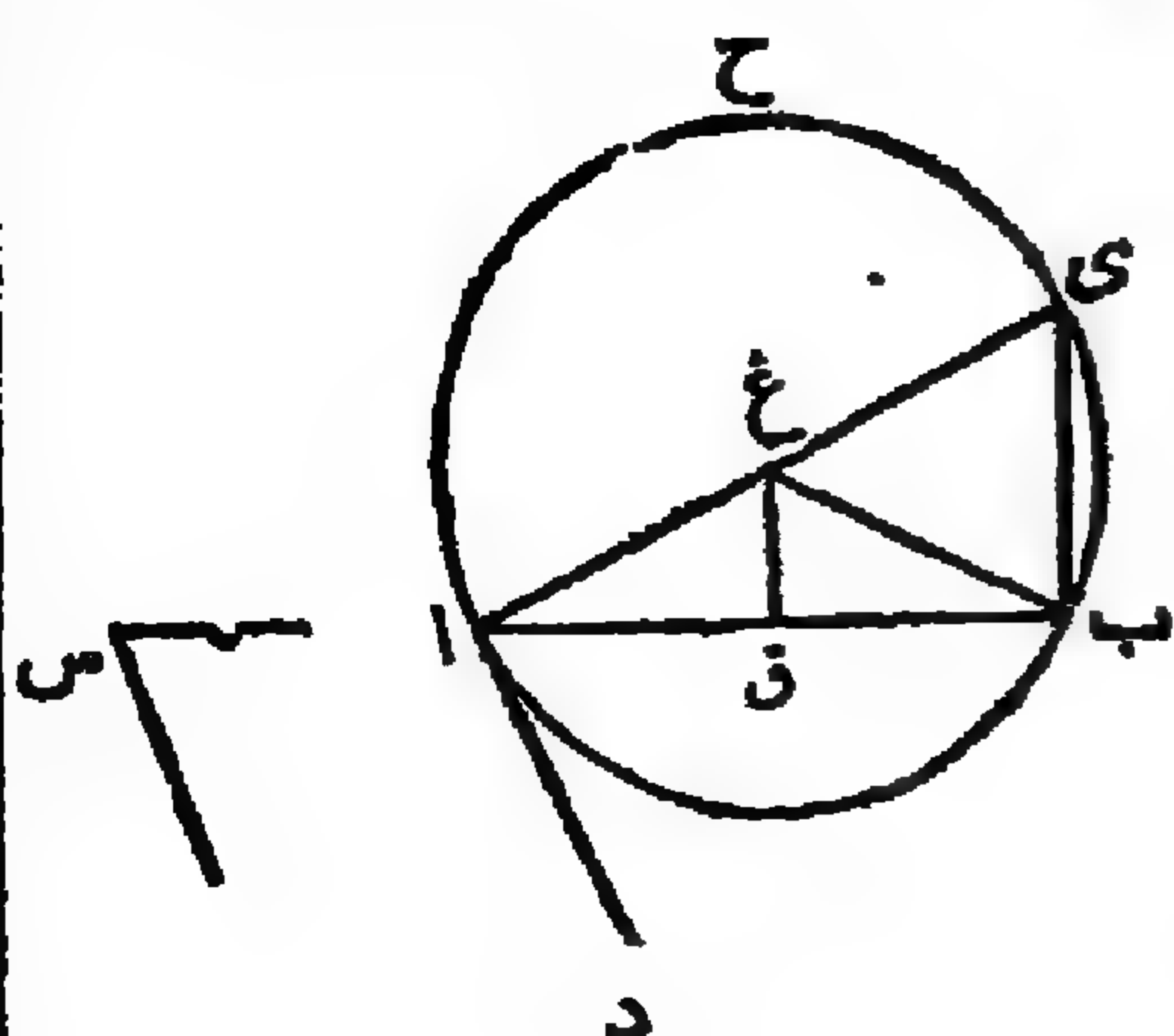
علينا ان نرسم على خطٍ مستقيم مفروض قطعةً دائريةً فيها زاوية تعدل  
زاوية بسيطة مفروضة

ليكن ا ب الخط المستقيم المفروض وس الزاوية المفروضة . علينا ان نرسم على ا ب  
قطعة دائرة فيها زاوية تعدل الزاوية عند س  
اولاً لتكن الزاوية عند س قائمة .



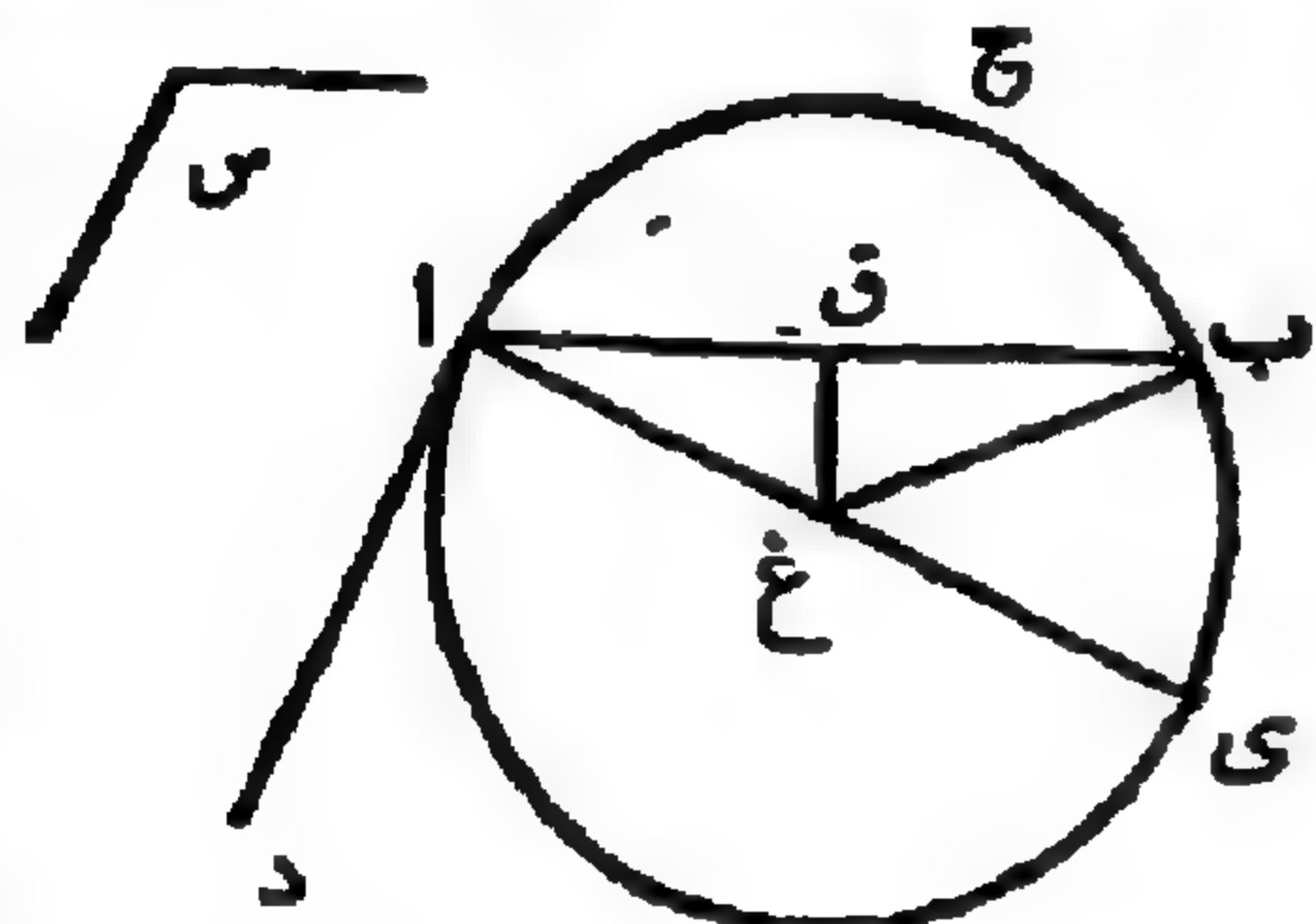
نصِّف ا ب في ف (ق ١٠ ك ١) ثم اجعل  
ف مركزاً وف ب بعداً وارسم الدائرة ا ح ب فالزاوية ا ح ب انما هي قائمة لانها في  
صف دائرة (ق ٢١ ك ٢) وهي تعدل الزاوية القائمة عند س

ثانياً ان لم تكن الزاوية س قائمة فعند النقطة ا من الخط ا ب اجعل الزاوية  
ب ا د تعدل س (ق ٢٢ ك ١) ومن النقطة ا رسم ا ي عموداً على ا د (ق ١١ ك ١)



نصفت ا ب في ق (ق ١٠ ك ١) ومن  
ق ا رسم ق غ عموداً على ا ب (ق ١١  
ك ١) وارسم غ ب. فمن حيث ان  
ا ق يعدل ق ب وق ع مشترك بين  
المثلثين ا ق غ ب ق غ فالضلعان  
ا ق ق غ يعدلان الضلعين ب ق  
ق غ والزاوية ا ق غ تعدل ب ق ع

فالقاعدة ا غ تعدل القاعدة غ ب (ق ٤ ك ١) والدائرة المرسومة على المركز ع وعلى



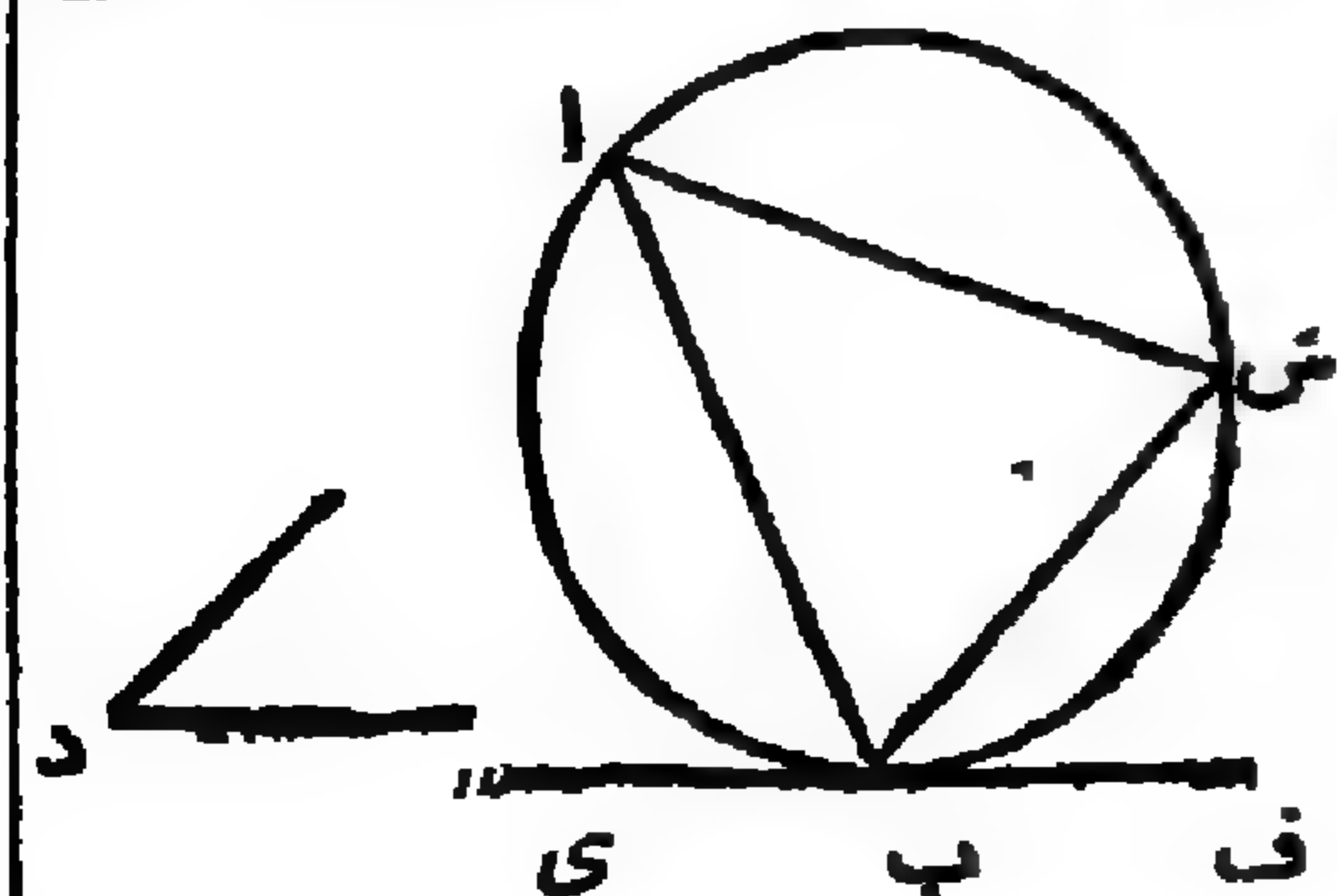
البعد غ ا تمر في النقطة ب. فلتكن ا ح ب  
هذه الدائرة فمن حيث انه قد رُسم ا د عموداً  
من طرف القطر ا ي فهو مماس للدائرة  
(فرع اول ق ١٦ ك ٢) ومن حيث انه قد  
رُسم القاطع ا ب من نقطة الماسة فالزاوية

د ا ب تعدل الزاوية في القطعة ا ح ب المتبادلة (ق ٢٢ ك ٢) والزاوية د ا ب تعدل  
الزاوية ع د س فالزاوية عند س تعدل الزاوية في القطعة ا ح ب. فقد رُسم على  
الخط المستقيم المفروض ا ب قطعة دائرة فيها زاوية تعدل الزاوية المفروضة عند س

### القضية الرابعة والثلاثون ع

علينا ان تقطع من دائرة مفروضة قطعة فيها زاوية تعدل زاوية بسيطة  
مفروضة

لتكن ا ب س الدائرة المفروضة ود الزاوية البسيطة المفروضة. علينا ان تقطع



من الدائرة ا ب س قطعة فيها زاوية  
تعدل الزاوية عند د. ارسم المماس ي ف  
(ق ١٧ ك ٢) حتى يمس الدائرة في النقطة  
ب ومن النقطة ب في الخط ي ف  
اجعل الزاوية ف ب س تعدل د ف

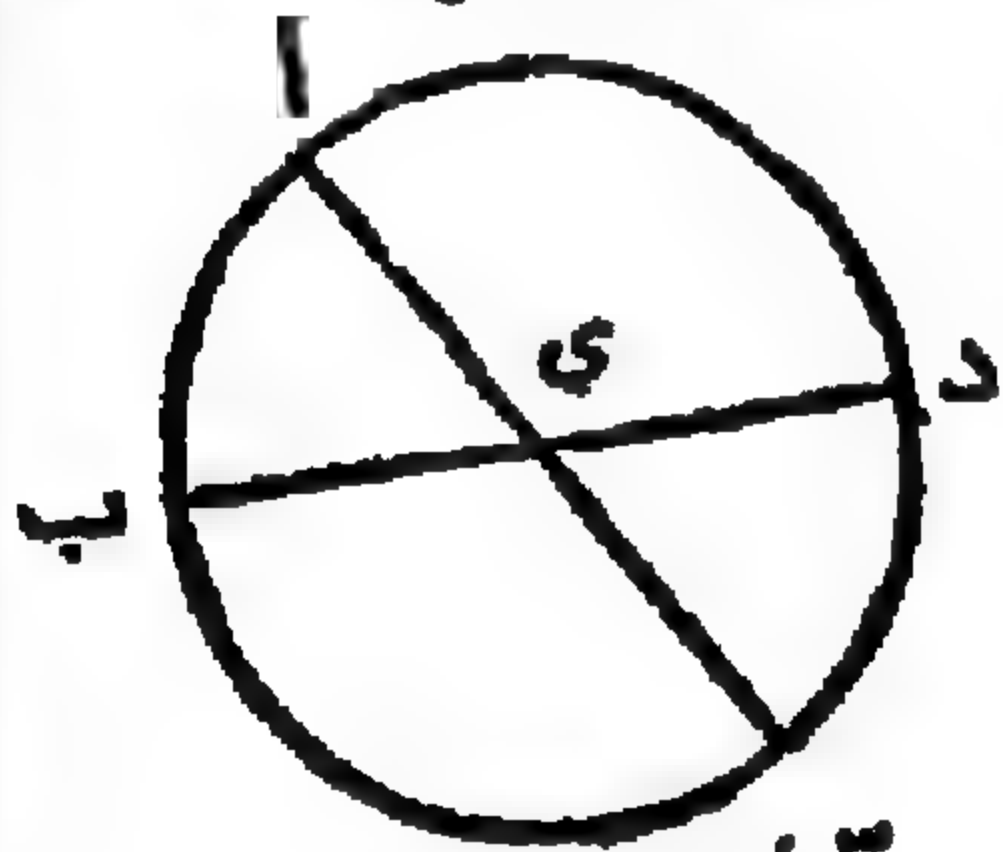


(ق ٢٣ ك ١). فمن حيث أن الخط المستقيم  $ف ي$  يمس الدائرة  $ا ب س$  وقد رُسم من نقطة الماسة الخط  $ب س$  قاطعاً فالزاوية  $ف ب س$  تعدل الزاوية في القطعة  $ب ا س$  المتبادلة (ق ٢٢ ك ٢) والزاوية  $ف ب س$  تعدل الزاوية عند  $د$  فالزاوية في القطعة  $ب ا س$  تعدل الزاوية عند  $د$  فقد قُطعت من الدائرة  $ا ب س$  القطعة  $ب ا س$  فيها زاوية تعدل الزاوية المفروضة عند  $د$

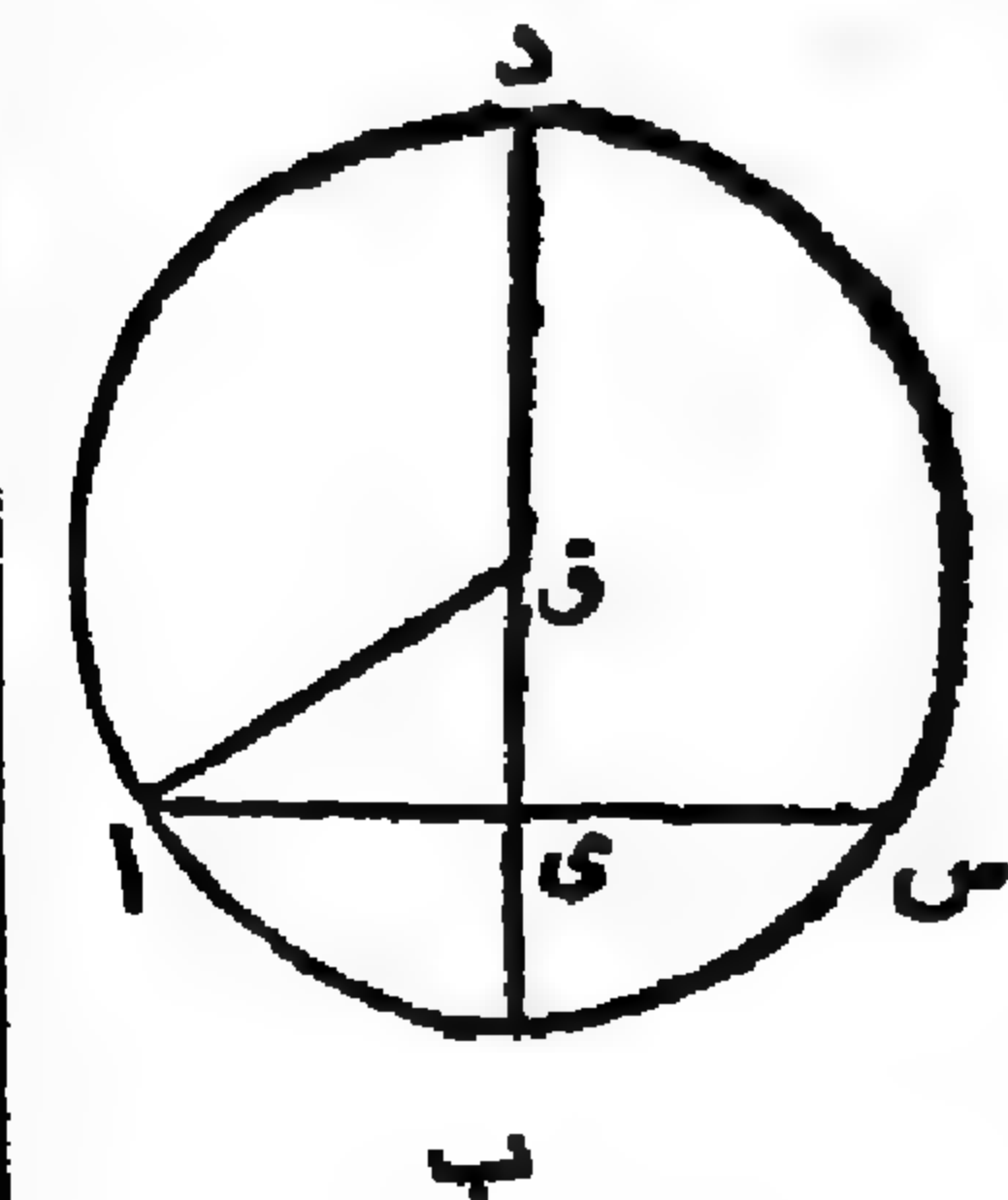
### القضية الخامسة والثلاثون

إذا تقاطع خطان مستقيمان في دائرة فالقائم الزوايا مسطح قسمي أحدها يعدل القائم الزوايا مسطح قسمي الآخر

لنقاط الخطان المستقيمان  $ا س$   $ب د$  في الدائرة  $ا ب س$  وفي النقطة  $ي$  فالقائم الزوايا  $ا ي في ي$   $س$  يعدل القائم الزوايا  $ب ي في ي$   $د$



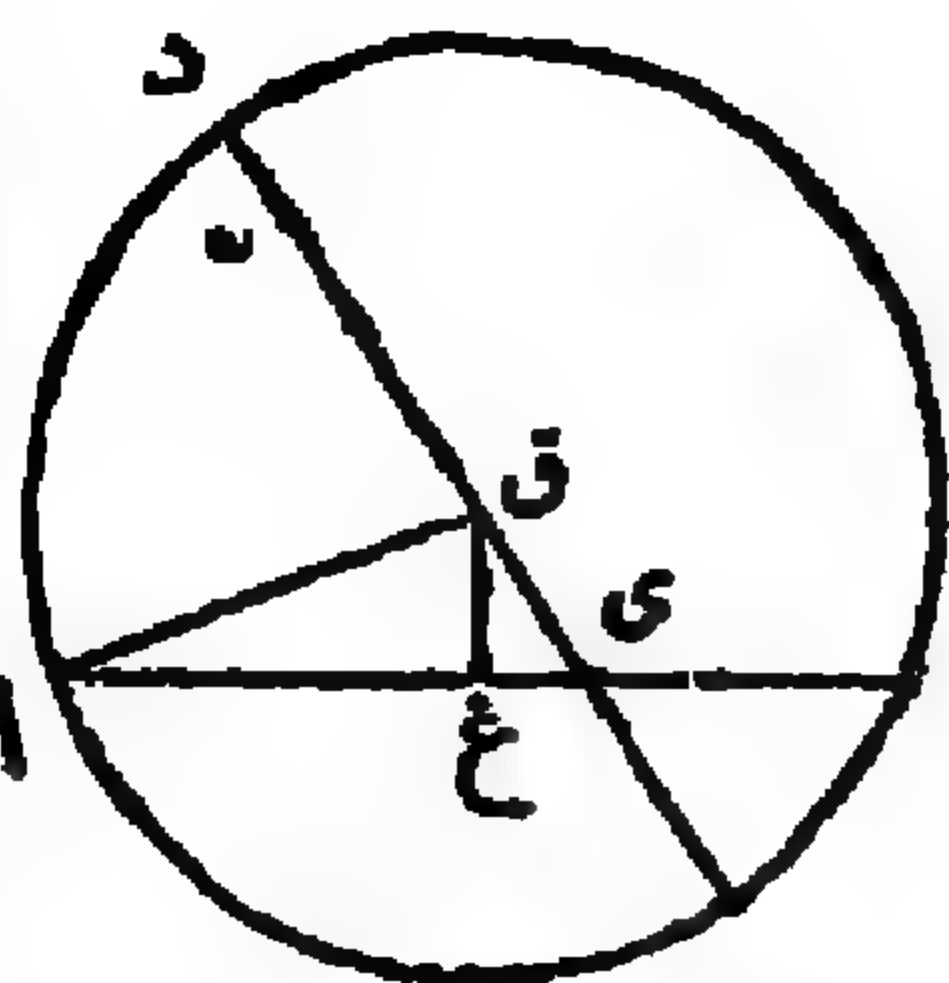
إذا مر كل واحد منهما في المركز وكان ذلك المركز  $ي$  فالامر واضح أن الخطوط  $ا ي$   $س ي$   $ب ي$   $ي د$  متساوية والقائم الزوايا  $ا ي في ي$   $س$  يعدل القائم الزوايا  $ب ي في ي$   $د$



ثم لنفرض مرور أحدهما  $ب د$  في المركز وليكن عموداً على الآخر  $ا س$  الذي لا يمر بالمركز وليقطع في النقطة  $ي$ . فإذا تنصف  $ب د$  في  $ق$  فالنقطة  $ق$  هي مركز الدائرة (فرع ١ ك ٢) ارسم  $ا ق$ . فمن حيث أن الخط  $ب د$  المار بالمركز هو عمود على  $ا س$  الذي لا يمر بالمركز ويقطعه في  $ي$  فالقسمان  $ا ي$   $ي س$  متساويان (ق ٢ ك ٢) ومن حيث أن الخط المستقيم  $ب د$  قد انقسم إلى قسمين متساويين في  $ق$

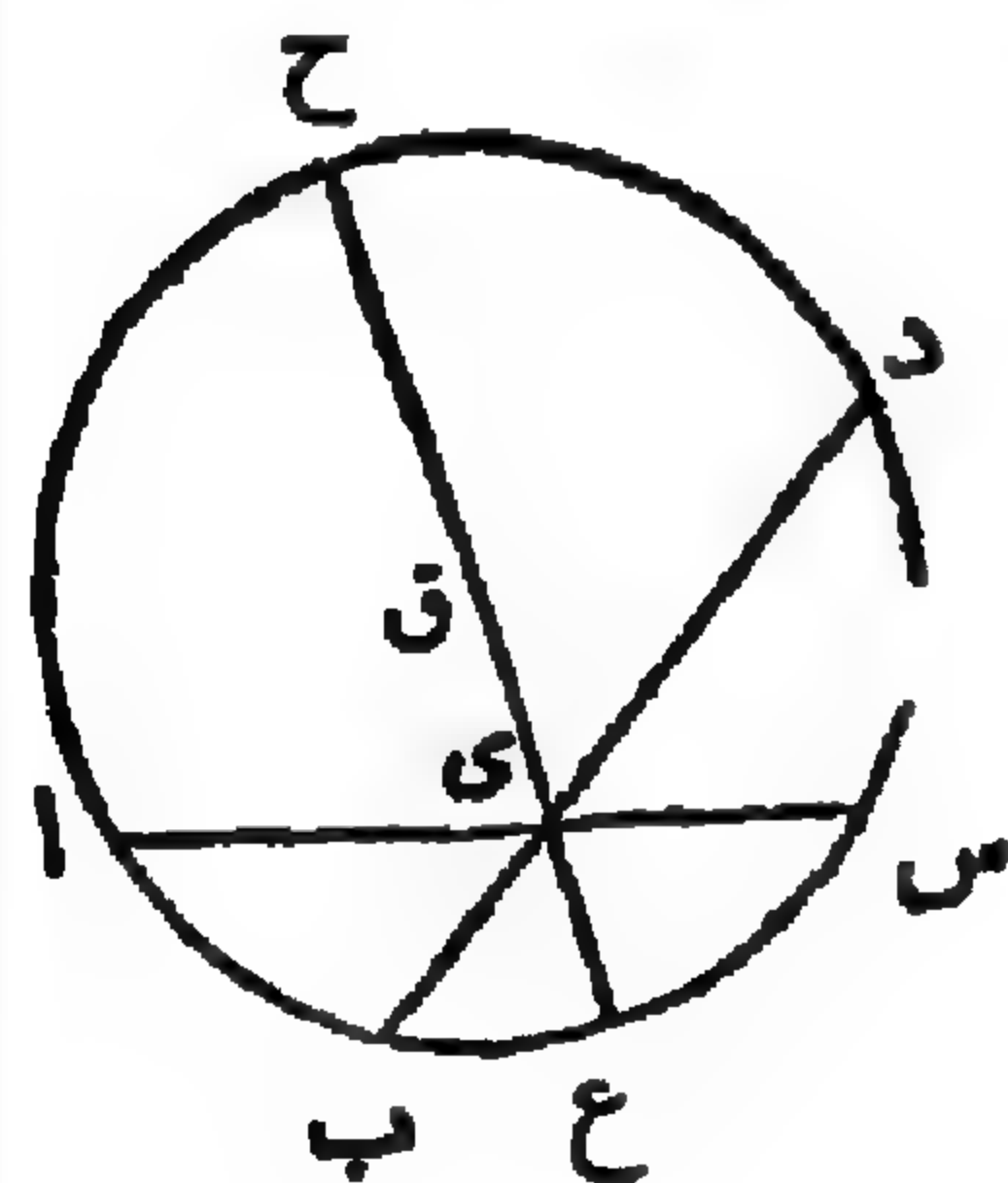
وغير متساويين في  $ي$  (ق ٥ ك ٢) فالقائم الزوايا  $ب ي × ي د + ي ق = ق ي = ق ب = ا ق$  ولكن  $ا ق = ا ي + ي ق$  (ق ٤٧ ك ١) فالقائم الزوايا  $ب ي × ي د +$

ي ق = ا ي + ي ق . اطرح ي ق من الجانبين فالباقي ب ي  $\times$  ي د = ا ي  
 = ا ي  $\times$  ي س



ثم لنفرض ان ب د الذي يمر بالمركز يقطع اس  
 الذي لا يمر بالمركز في النقطة ي ولكنه ليس عموداً  
 عليه . فاذا تنصف ب د في ق فالنقطة ق هي مركز  
 الدائرة . ارسم ا ق ومن ق ارسم ق غ عموداً على اس  
 (ق ١ ك ١) فالتسماع يعدل القسم غ س (ق ٢ ك ٢)

فالتائم الزوايا ا ي  $\times$  ي س + ي ع = ا غ . اضف اليها غ ق فالتائم الزوايا ا ي  
 $\times$  ي س + ي ع + ي غ ق = ا غ + غ ق + غ ق = ا ق + و ي غ + غ ق  
 = ي ق فالتائم الزوايا ا ي  $\times$  ي س + ي ق = ا ق = ق ب . وق ب = ب ي  
 $\times$  ي د + ي ق (ق ٥ ك ٢) فالتائم الزوايا ا ي  $\times$  ي س + ي ق = ب ي  $\times$  ي د  
 ي د + ي ق . اطرح ي ق من الجانبين فالباقي ا ي  $\times$  ي س = ب ي  $\times$  ي د

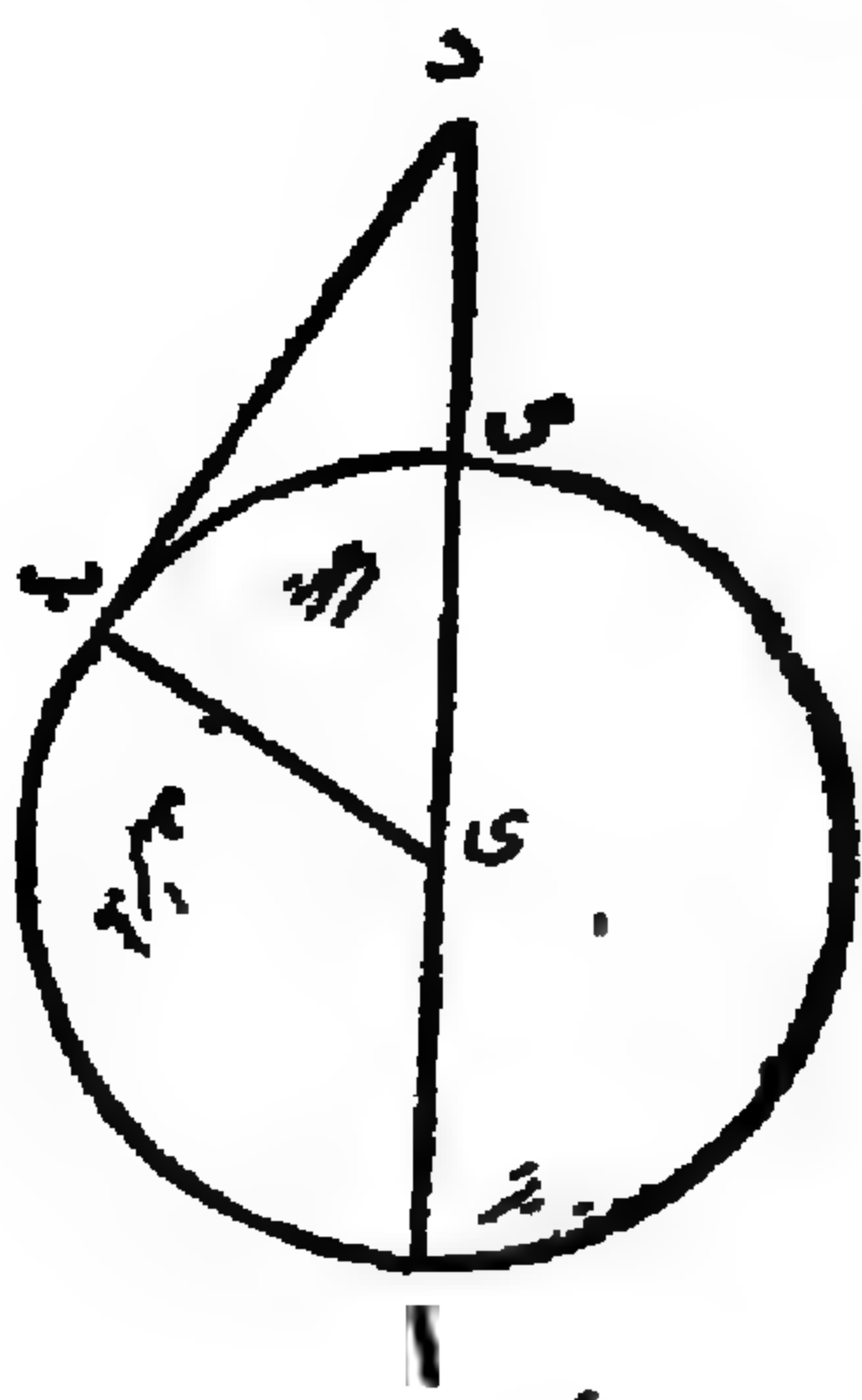


اخيراً ان لم يمر احد الخطين المستقيمين اس  
 ب د في المركز فاستعلم المركز ق ومن ي نقطة  
 تقاطع الخطين اس ب د ارسم النطر غ ي ق ح  
 فكما تقدم ا ي  $\times$  ي س = ع ي  $\times$  ي ح وب ي  
 $\times$  ي د = ع ي  $\times$  ي ح فحسب الاولية الاولى ا ي  
 $\times$  ي س = ب ي  $\times$  ي د

### القضية السادسة والثلاثون . ن

اذا رسم من نقطة خارج دائرة خطان مستقيمان احدهما يقطع الدائرة  
 والاخر يمسها فالتائم الزوايا مسطح كل الخط القاطع في القسم منه الواقع  
 خارج الدائرة يعدل مربع الخط المماس



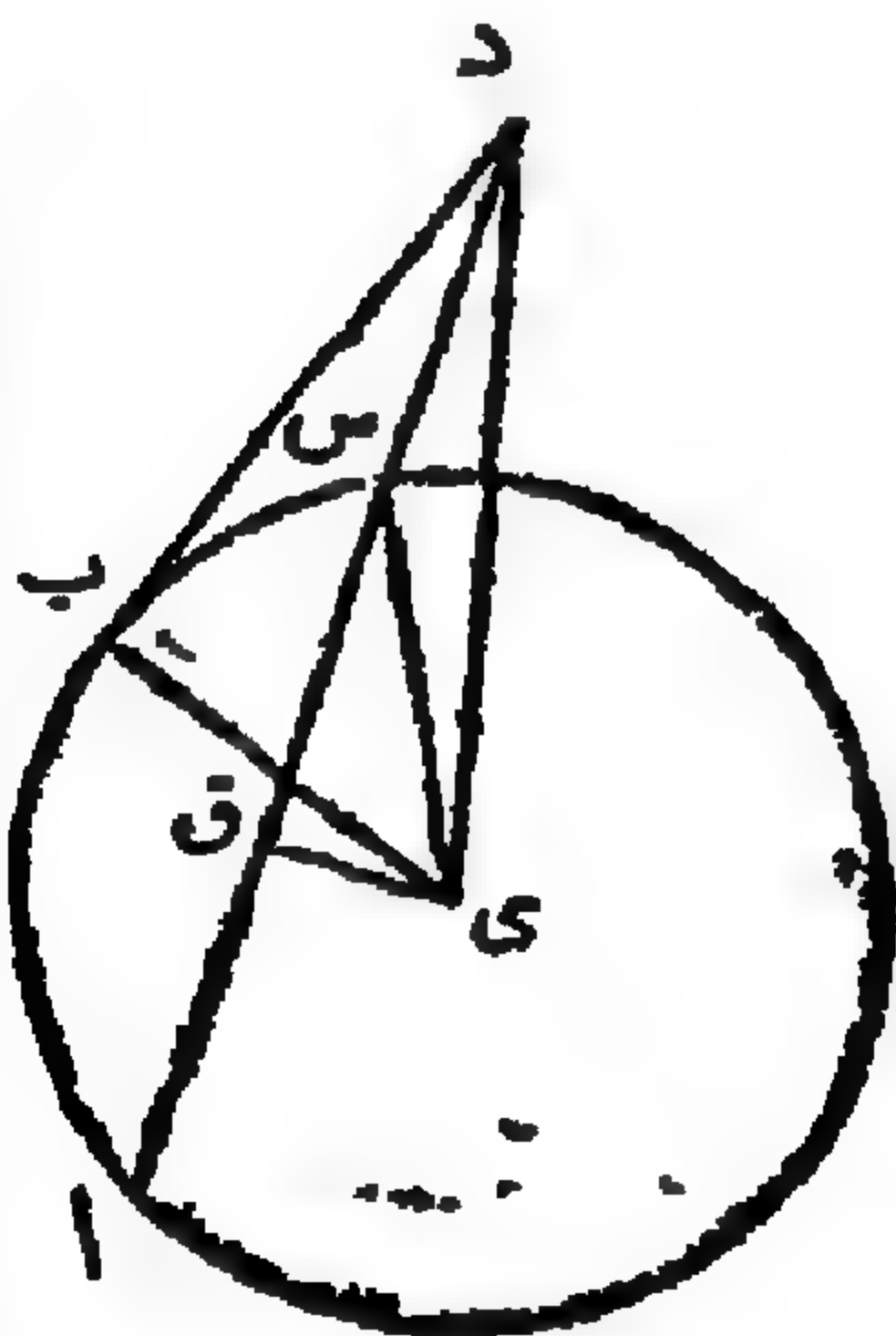


لتكن نقطة خارج الدائرة ا ب س وليرسم منها  
الخط المستقيم د س ا حتى يقطع الدائرة والخط المستقيم  
د ب حتى يمسها فالقائم الزوايا ا د س د س يعدل مربع  
د ب

اولاً لنفرض ان د س ا يمر بالمركز. ارسم ي ب  
فالزاوية ي ب د انما هي قائمة (ق ١٨ ك ٢) ومن حيث  
ان الخط المستقيم ا س قد تنصف في ي وأخرج الى د  
فالقائم الزوايا ا د س د س + ي س = ي د (ق ٦ ك ٢)

وي س = ي ب فالقائم الزوايا ا د س د س + ي ب = ي د ولكن ي د = ي ب  
+ ب د (ق ٤٧ ك ١) فالقائم الزوايا ا د س د س + ي ب = ي ب + ب د. اطرح  
من الجانبين ي ب فالباقي ا د س د س = ب د

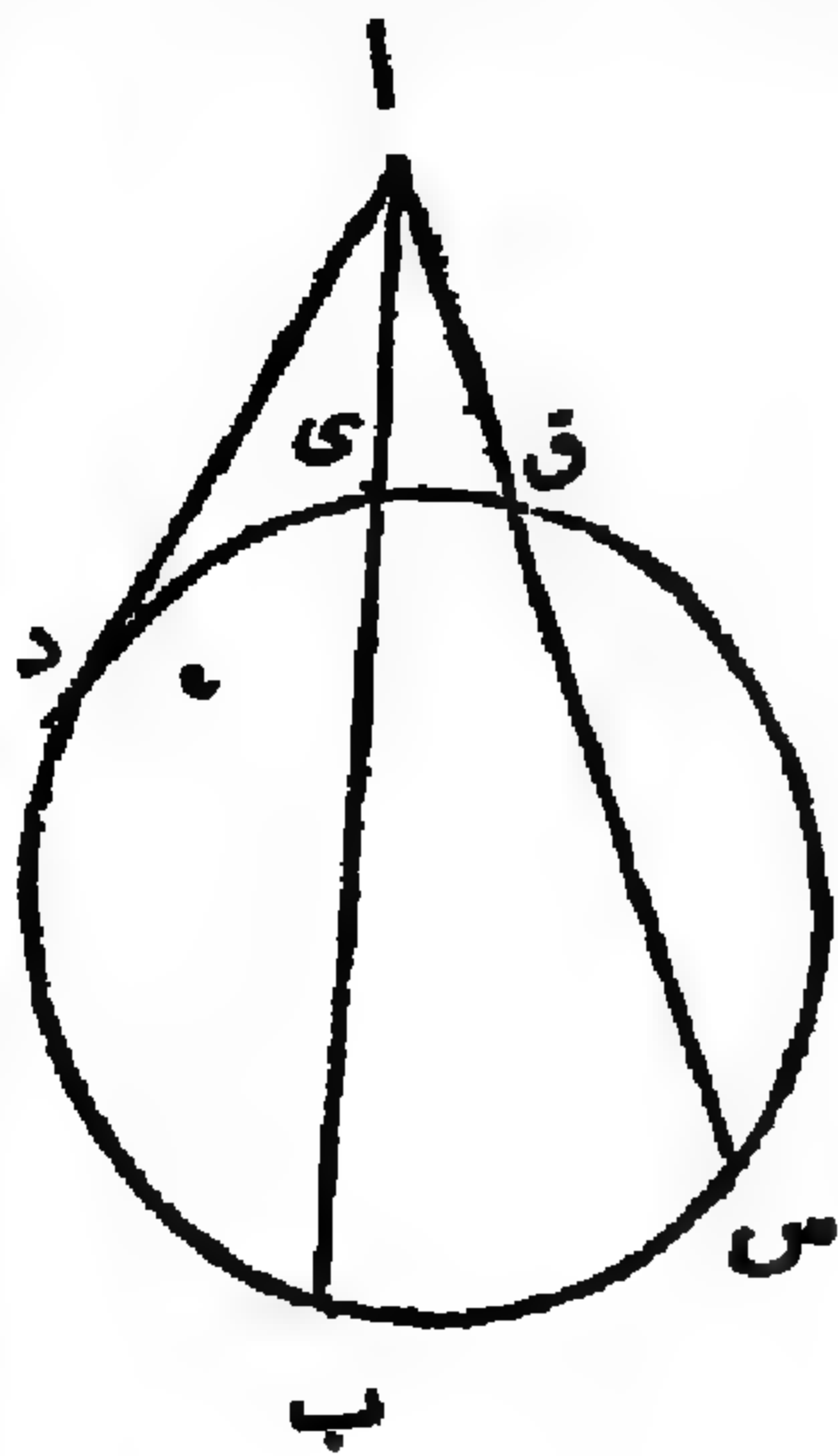
ثانياً ان لم يمر د س ا في مركز الدائرة ا ب س فاستعلم المركز ي (ق ١ ك ٢)



وارسم ي ق عموداً على ا س (ق ١٢ ك ١) ولرسم ي ب  
ي س ي د. فمن حيث ان الخط للمستقيم المار بالمركز  
ي ق هو عمود على الخط المستقيم ا س الذي لا يمر  
بالمركز فهو ينصفه ايضاً (ق ٢ ك ٢) فالقسم ا ق يعدل  
القسم ق س. فمن حيث ان الخط المستقيم ا س قد  
تنصف في ق وأخرج الى د (ق ٦ ك ٢) فالقائم الزوايا  
ا د س د س + ق س = ق د. اضف اليها ق ي فالقائم

الزوايا ا د س د س + ق س + ق ي = ق ي + ق د + ق ي وي س = ق س + ق ي  
وي د = ق د + ق ي (ق ٤٧ ك ١) لان د ق ي قائمة. فالقائم الزوايا ا د س  
+ ي س = ي د. ومن حيث ان ي ب د قائمة ي د = ي ب + ب د = ي س  
+ ب د فالقائم الزوايا ا د س د س + ي س = ي س + ب د + ب د =  
ب د

فرع اول. اذا رسم من نقطة خارج دائرة خطان فاطعان مثل ا ب ا س



فالشكلان قائما الزوايا مسطحا كل خط في القسم منه  
الواقع خارج الدائرة هما متساويان فالقائم الزوايا ب ا  
 $\times$  ا س  $=$  ا ق  $\times$  ا ب لان كل واحد منهما يعدل مربع  
الخط المستقيم ا د الذي يمس الدائرة

فرع ثانٍ . ماسان مرسومان من نقطة واحدة هما  
متساويان

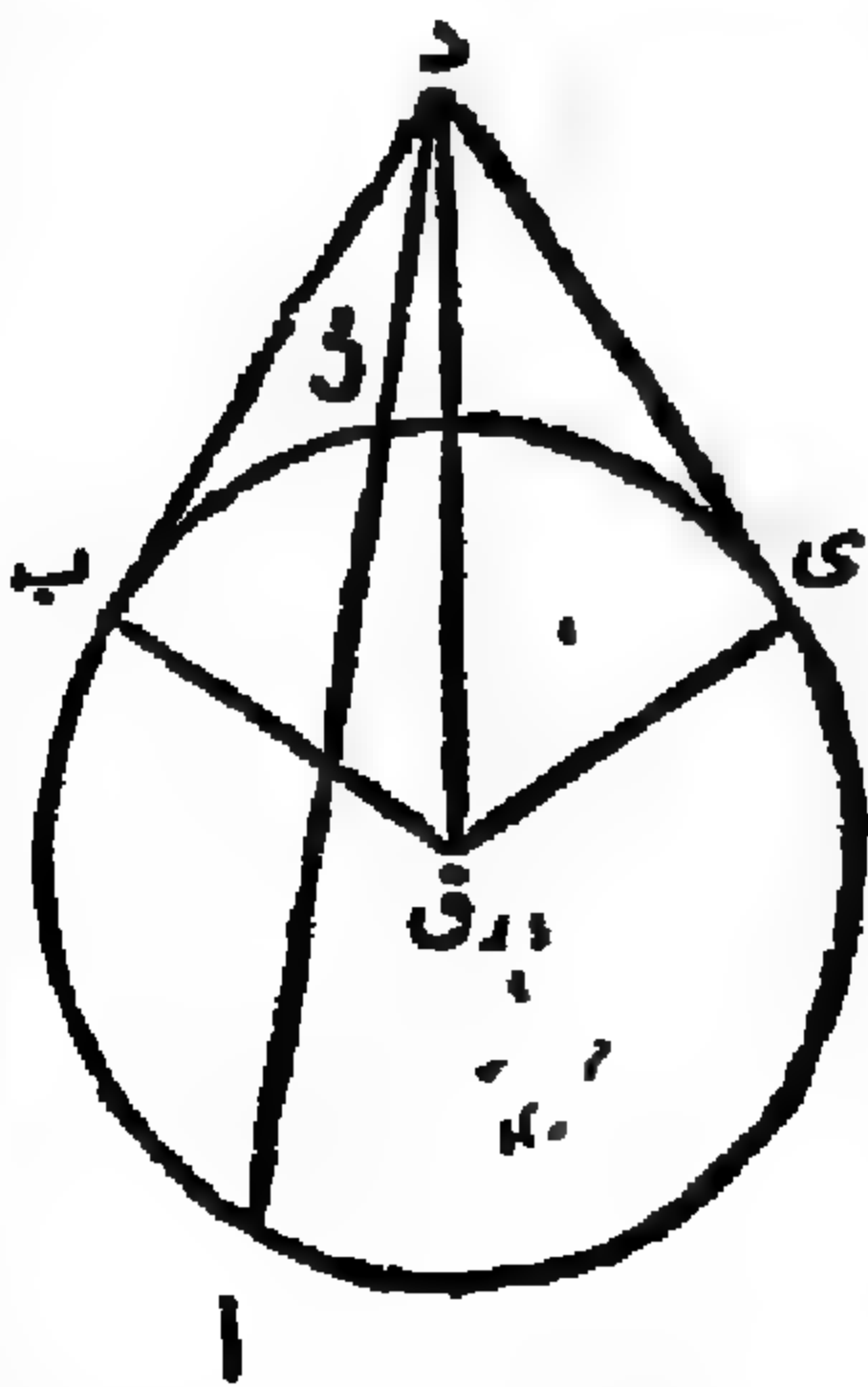
فرع ثالث . بما ان نصف القطر الواقع على  
نقطة الماسة هو عمود على الماس فبالضرورة الزاوية

الواقعة بين ماسين مرسومين من نقطة واحدة تنتصف بخط مستقيم مرسوم من  
مركز الدائرة الى تلك النقطة لانه وتر مشترك بين مثلثين متساويين قاي الزاوية

### القضية السابعة والثلاثون .

اذا رسم من نقطة خارج دائرة خطان مستقيمان احدهما يقطع الدائرة  
والاخر يلاقيها فالقائم الزوايا مسطح كل الخط القاطع في الجزء منه  
الواقع خارج الدائرة ان عدل مربع الخط الذي يلاقيها فذلك الخط  
ماس الدائرة

لتكن د نقطة خارج الدائرة ا ب ي وليرسم منها الخط المستقيم د س ا حتى  
يقطع الدائرة والخط المستقيم د ب حتى يلاقيها فالقائم  
الزوايا ا د  $\times$  د س ان عدل مربع د ب فالخط د ب  
يمس الدائرة



ارسم الخط المستقيم د ي حتى يمس الدائرة (ق ١٧)  
ك ٣ واستعلم المراكز وارسم ق ب ق د ق ي فالزاوية  
ق ي د قائمة (ق ١٨ ك ٣) ومن حيث ان د ي يمس  
الدائرة ا ب س و د س ا يقطعها فالقائم الزوايا ا د  $\times$

د س يعدل مربع د ي (ق ٢٦ ك ٣) وقد فرض ان القائم الزوايا ا د  $\times$  د س يعدل



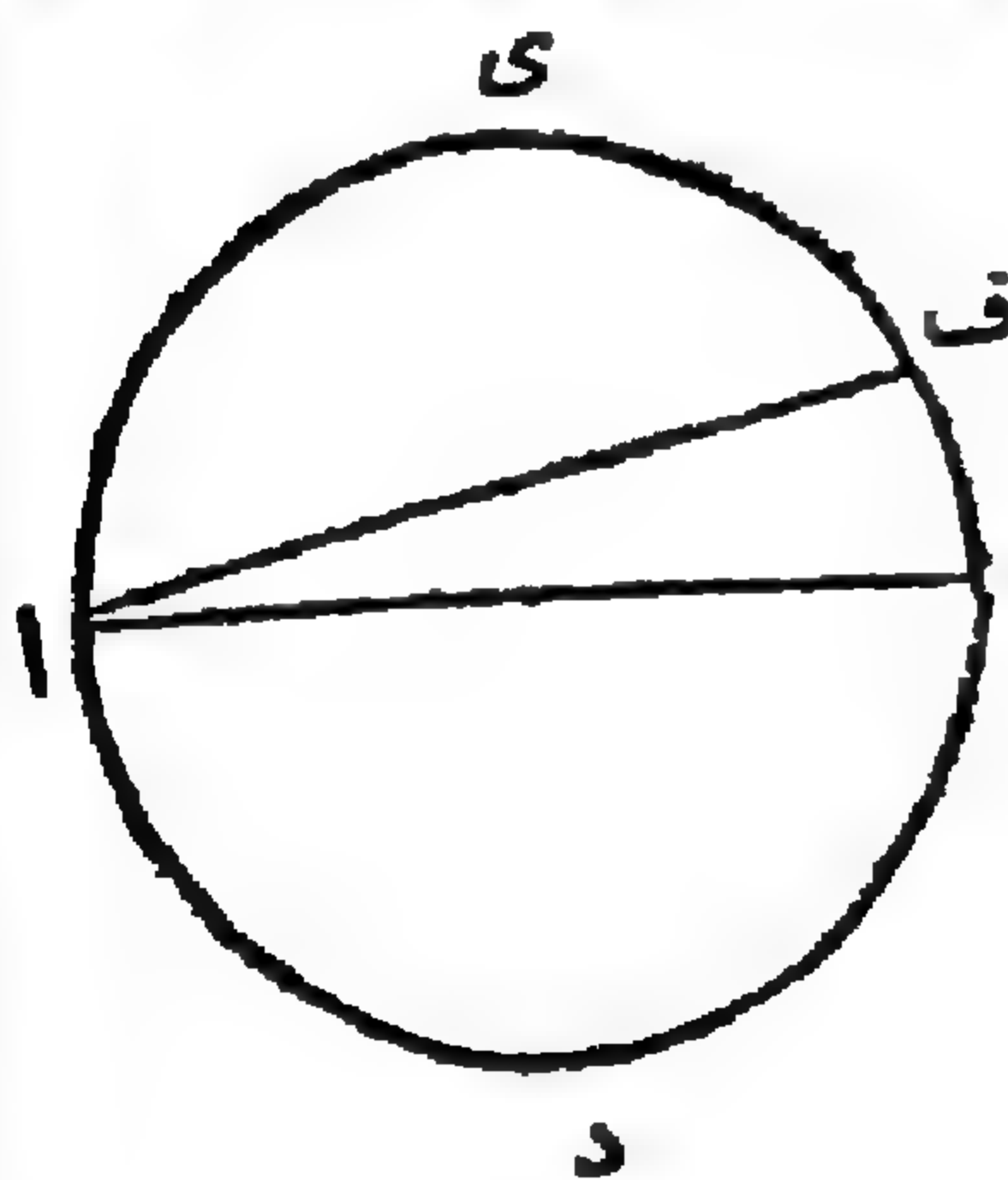
مربع د ب ف مربع د ي يعدل مربع د ب والخط المستقيم د ي يعدل الخط المستقيم د ب . وق ي = ق ب فالخطان د ي ي ق يعدلان د ب ب ق والقاعدة د ق مشتركة بين المثلثين د ب ق د ي ق فالزاوية د ي ق تعدل الزاوية د ب ق ر ق ٨ ك ١) ولكن د ي ق انما هي قائمة فالزاوية د ب ق ايضا قائمة وب ق اذا اُخرج يكون قطراً للدائرة والخط الذي يُجَدِّث مع القطر من طرفي زاوية قائمة فهو ممس الدائرة (ق ١٦ ك ٢) فالخط د ب هو ممس الدائرة ا ب س

### مضافات الى الكتاب الثالث

#### قضية ا. ن

قطر الدائرة يقسمها ومحيطها الى قسمين متماثلين . وبالقلب الخط الذي يقسم الدائرة الى قسمين متماثلين هو قطر

ليكن ا ب قطر الدائرة ا ي ب د فالقسمان ا ي ب ا د ب متماثلان محيطاً ومساحة . فان وُضع الشكل ا ي ب على الشكل ا د ب وقيت قاعدتهما المشتركة ا ب على وضعها فالخط المحي ا ي ب يقع على الخط المحي ا د ب وإلا لكانت في احدهما نقط مختلفة البعد عن المركز وذلك خلاف حد الدائرة وبالقلب الخط الذي يقسم الدائرة الى قسمين متماثلين هو قطر

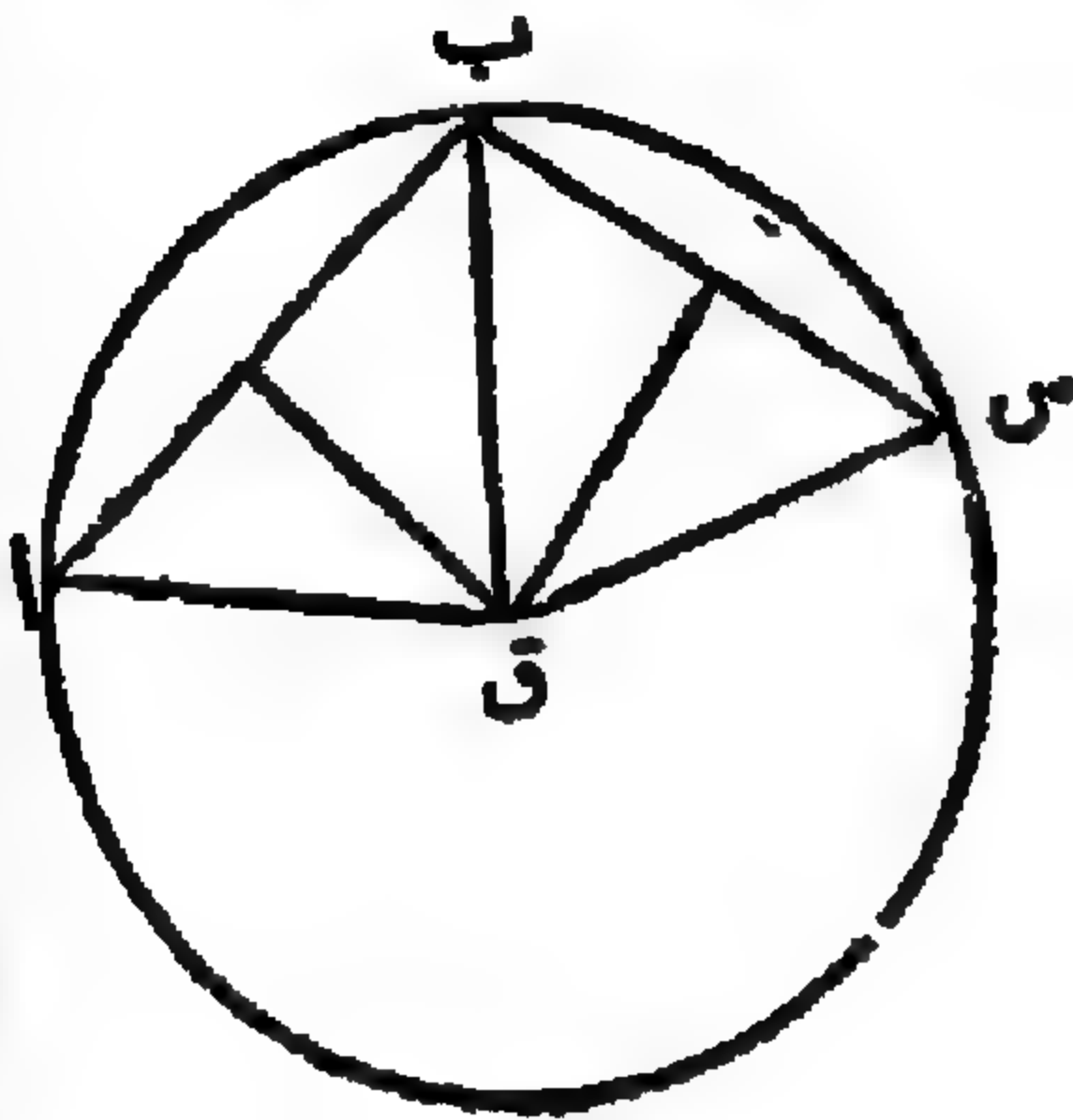


لنفرض ان ا ب يقسم الدائرة ا ي ب د الى قسمين متماثلين فان لم يكن المركز في ا ب فليُرسَم ا ف ماراً في المركز . فهو اذا قطر ويقسم الدائرة الى قسمين متماثلين . فالقسم ا ي ف يعدل القسم ا ي ف ب وذلك محال فرع . قوس وتره قطر هو نصف محيط . والشكل المحاط بهذا القوس مع وتره هو نصف دائرة

قضية ب. ن

يمكن ان ترسم دائرة واحدة محيطها مارٌ بثلاث نُقطٍ مفروضة ان لم تكن في خطٍ واحد مستقيم. ولا ترسم الا دائرة واحدة محيطها مارٌ بهذه النُقط الثلاث

لتكن ا ب س النقط الثلاث المعروضة ولا تكون في خطٍ واحد مستقيم هي في محيط دائرة واحدة



ارسم ا ب و ب س وصنهما في دوى بالعمودين د ق ي ق اللذين لا بد من التقائهما في نقطة ما كالنقطة ق. لانه لو كانا متوازيين لكان د ب ب ي متوازيين ايضا (فرع ٢ ق ٢ ك ١) او كانا في خطٍ واحد مستقيم ولكنها

التقيا في ب و ا ب س ليس خطاً مستقيماً حسب المعروض اولاً. ارسم ق ا ق س ق ب. فمن حيث ان ق ا ق ب بلاقيان ا ب على بعدي واحد من العمود فهما متساويان. ولهذا السبب ق ب ق س متساويان ايضا فالنقط الثلاث ا ب س هي على بعدي واحد من النقطة ق وواقعة في محيط دائرة مركزها ق ونصف قطرها ق الامر واضح انه لا يمر بهذه النقط محيط آخر. لان المركز واقع في العمود د ق الذي ينصف الوتر ا ب. وهو ايضا في العمود ق ي الذي ينصف الوتر ب س (فرع ١ ق ٢ ك ٢) فلا بد من وقوعه عند نقطة تقاطع هذين العمودين وحيث لا يكون الا مركز واحد لا يكون الا محيط واحد

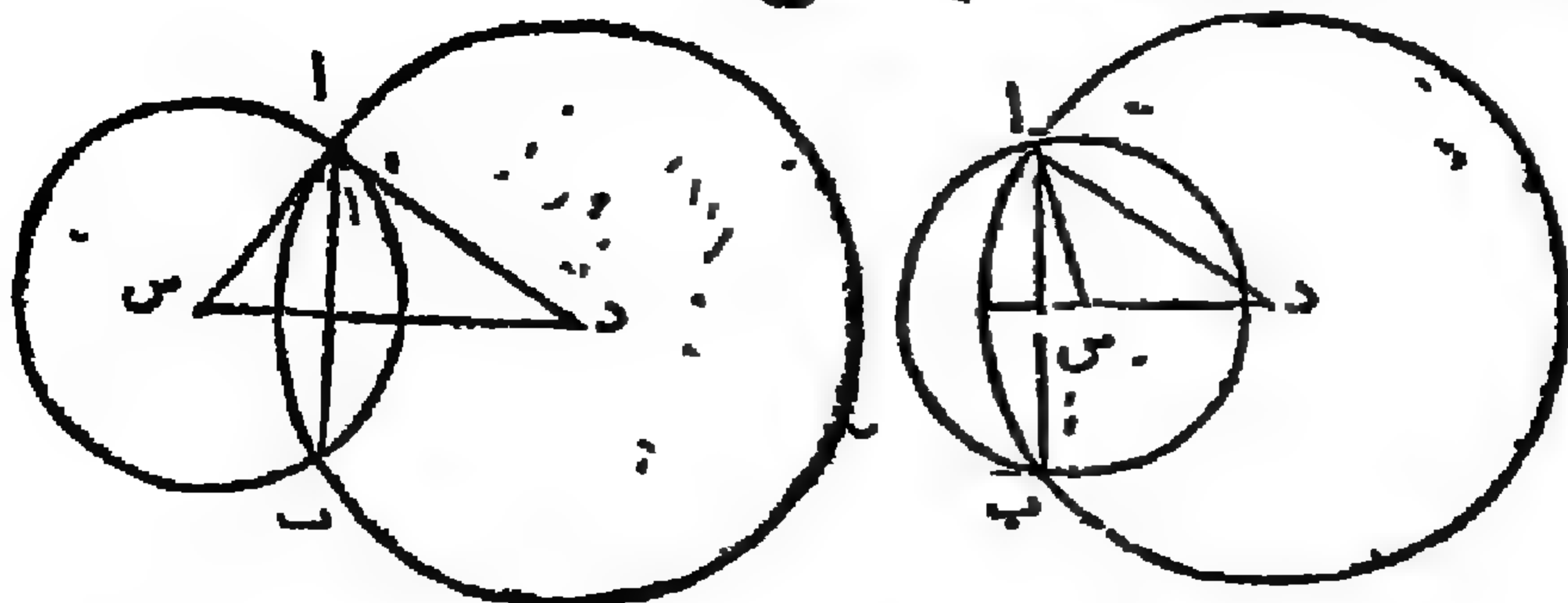
قضية ج. ن

اذا تقاطعت دائرتان فالخط المستقيم المار بمركزيهما هو عمودٌ على الوتر الموصل بين تقطبي التقاطع وينصفه

ليكن س د الخط المستقيم الموصل بين مركزي دائرتين متقاطعتين. فهو



عمود على الوتر اب الموصل بين تقطبي التقاطع



لأن  
الخطات  
الموصل  
بين  
تقطبي

التقاطع هو وتر مشترك بين الدائرتين وإذا رسم عمود من وسط هذا الوتر يمر بكل واحد من المراكز س ود (فرع ا ق ٢ ك ٢) ولا يمكن ان يرسم أكثر من خط واحد مستقيم ماراً بنقطتين مفروضتين. فالخط المار بمركزيهما ينصف الوتر ويحدث معه قائمتين أي يكون عموداً عليه

فرع. الخط المستقيم الموصل بين تقطبي تقاطع دائرتين هو عمود على الخط المستقيم الموصل بين مركزيهما

تعليقة. أولاً. اذا تقاطعت دائرتان فالبعد بين مركزيهما هو اقصر من مجتمع نصفي قطريهما. ونصف القطر الاطول هو اقصر من مجتمع نصف القطر الاقصر مع البعد بين المراكز. لأن س د هو اقصر من س ا + ا د (ق ٢٠ ك ١) وأد > ا س + س د

ثانياً. بالقلب. اذا كان البعد بين مركزي دائرتين اقل من مجتمع نصفي قطريهما وكان نصف القطر الاطول اقصر من نصف القطر الاقصر مع البعد بين المراكز فالدائرتان تتقاطعان

لانه لكي يكون التقاطع ممكناً يلزم ان يكون المثلث س ا د ممكناً ولذلك يلزم ان يكون س د > ا س + ا د وان يكون نصف القطر الاطول ا د > ا س + س د. واذا كان المثلث س ا د ممكناً فالامر واضح ان الدائرتين المرسومتين على المراكز س ود تتقاطعان في ا و ب

فرع اول. اذا كان البعد بين مركزي دائرتين أكثر من مجتمع نصفي قطريهما فالدائرتان لا تتقاطعان

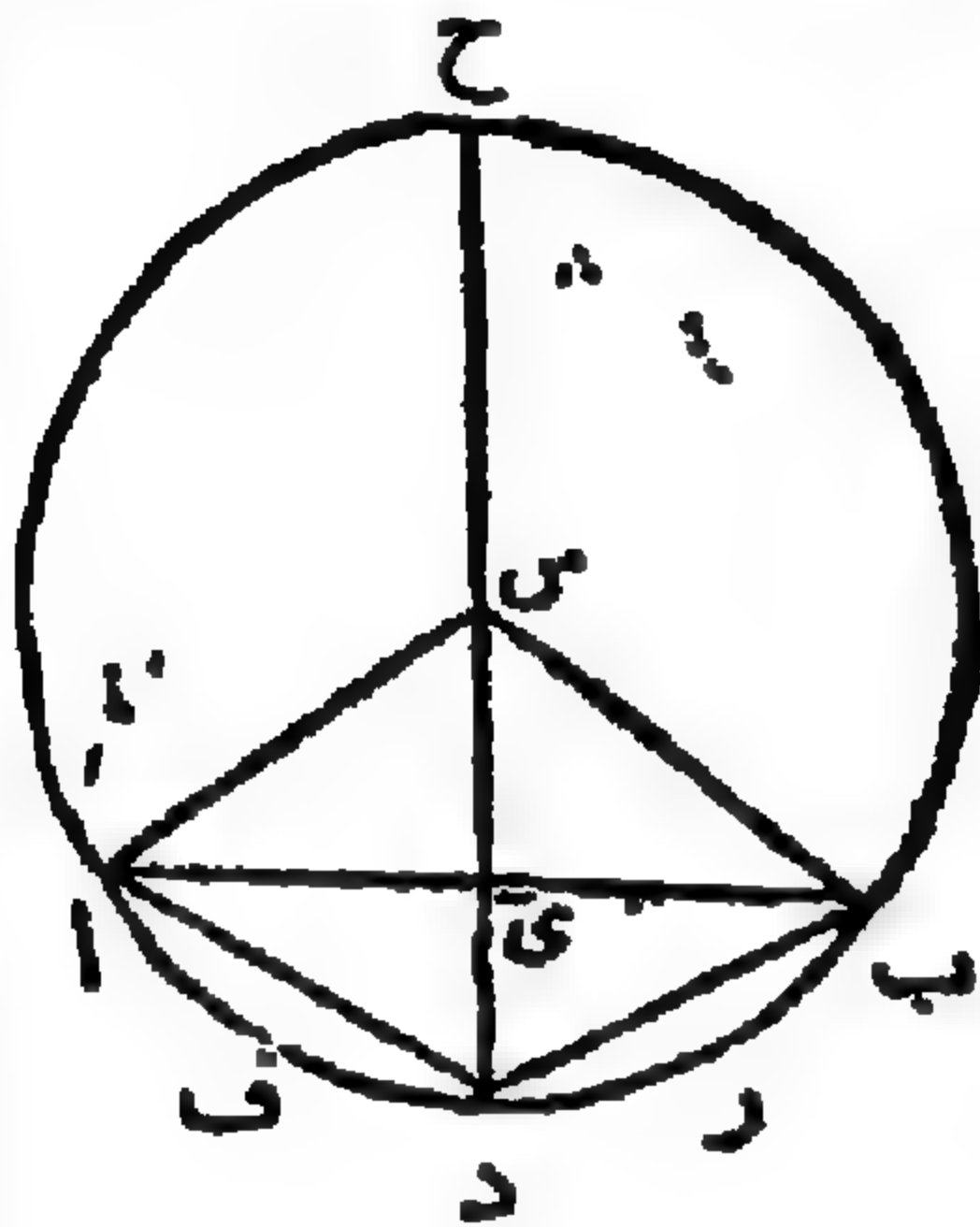
فرع ثان. اذا كان البعد بين المراكز اقل من فضله نصفي القطرين فالدائرتان لا تتقاطعان. لأن س د < ا د فاذا س د < ا د - ا س أي ضلع من مثلث

هو أطول من فضلة الضلعين الآخرين، فالمثلث غير ممكن متى كان البعد بين المركزين أقل من فضلة نصفي القطرين فلا يمكن عند ذلك أن تتقاطع الدائرتان

### قضية د. ن

في دائرة واحدة الزوايا المتماثلة في المركز تقابلها أقواس متماثلة وبالقلب  
الأقواس المتماثلة تقابل الزوايا المتماثلة في المركز

لكن من مركز الدائرة، والزاوية  $اس د$  فتعدل  $ب س د$ ، فالقوس  $اف د$  الذي يقابل الزاوية الواحدة يعدل القوس  $ب د$  الذي يقابل الزاوية الأخرى



ارسم  $اد ود ب$ ، فالمثلثان  $اس د$  و  $ب س د$  هما متساويان لأن ضلعين وزاوية من الواحد تعدل ضلعين وزاوية من الآخر فإذا وُضع أحدهما على الآخر يتطابقان والنقطة  $ا$  تقع على النقطة  $ب$ ، والنقطة  $د$  إنما هي مشتركة بين القوسين، فطرنا

القوس  $اف د$  يقعان على طرفي القوس  $ب د$  فلا بد من مطابقة بقية أجزائها لأنها على بُعد واحد من المركز

وبالقلب لنفرض مساواة القوسين  $اف د$  و  $ب د$ ، فالزاوية  $اس د = ب س د$ ، لأنه إذا وُضع أحد القوسين على الآخر يتطابقان، وطرفا الوتر  $اد$  يقعان على طرفي الوتر  $ب د$  فالوتران متساويان (ق ٨ ك ١) والزاوية  $اس د = ب س د$

فرع أول. الزوايا المتساوية في المركز يقابلها أوتار متساوية، وبالقلب الأوتار المتساوية تقابل زوايا متساوية في المركز

فرع ثانٍ. الأوتار المتساوية تقابل أقواساً متساوية، وبالقلب الأقواس المتساوية تقابل أوتاراً متساوية

فرع ثالث. إذا تنصفت الزاوية في المركز فالقوس والوتر اللذان يقابلانها يتنصفان أيضاً

فرع رابع. العمود على وسط الوتر ينصف الزاوية في المركز ويمر أيضاً بوسط



### القوس الذي يقابل الوتر

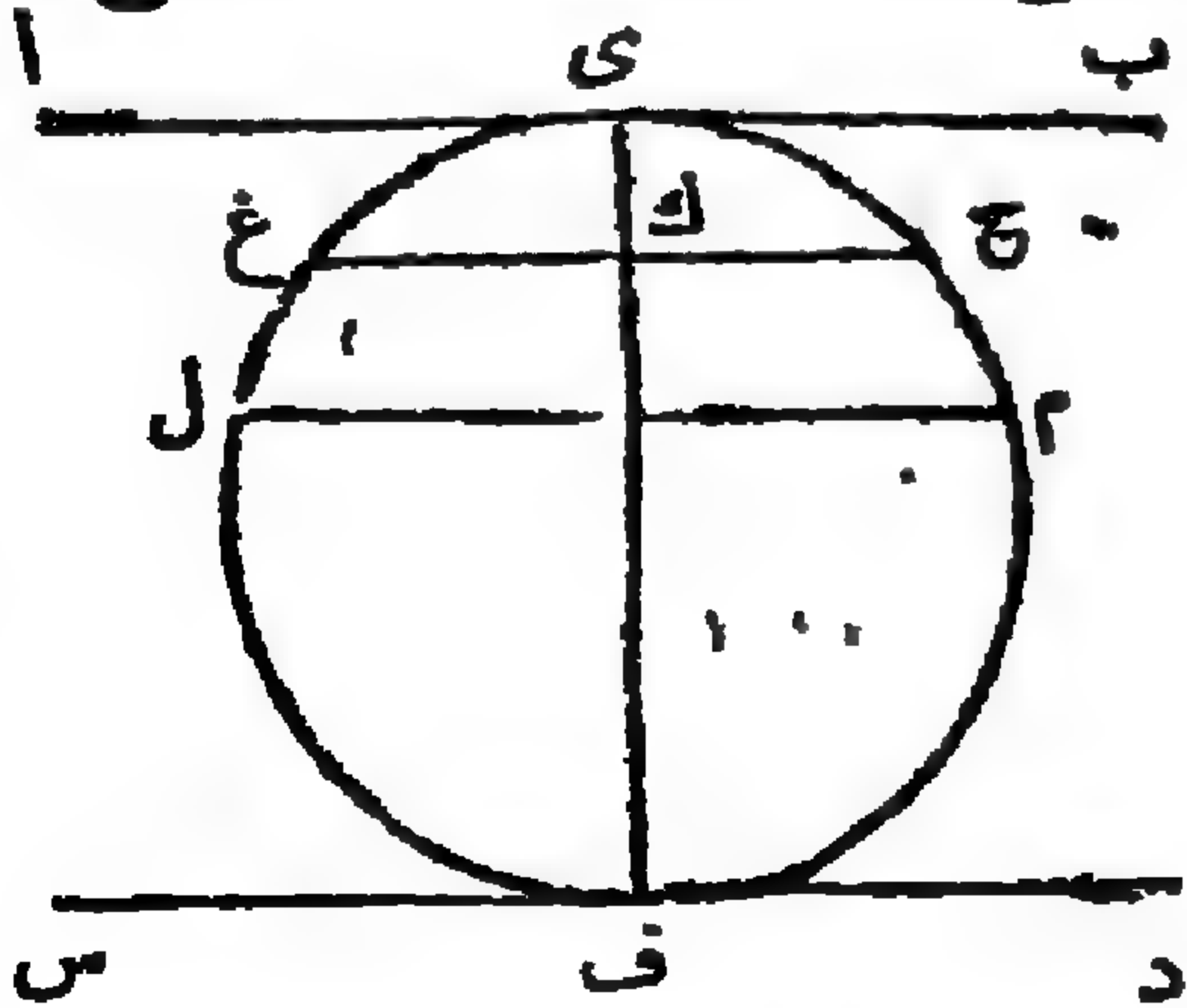
تعليقة. المركز  $س$  والنقطة  $ي$  التي هي وسط الوتر  $ا ب$  والنقطة  $د$  التي هي وسط القوس الذي يقابل الوتر المذكور هي تلك النقطة في خط عمودي على الوتر. ولكن الخط المستقيم يتعين وضعه بنقطتين. فكل خط يمر باثنتين من هذه النقط الثلاث يمر بثالثها ايضاً ويكون عموداً على الوتر

### قضية ٥٠

قوسان بين خطين متوازيين هما متساويان. وبالقلب اذا وقع بين خطين مستقيمين غير متقاطعين في الدائرة قوسان متساويان فالخطان متوازيان

لهذه القضية ثلاثة احوال

الاول متى كان الخطان المتوازيان مماسين مثل  $ا ب$  و  $س د$ . فكل واحد من القوسين بينهما نصف دائرة لأن نقطتي الماسة هما طرفا القطر (فرع ٢ ق ١٦ ك ٣)  
الثاني متى كان احد الخطين مماساً مثل  $ا ب$  والاخر وراً مثل  $غ ح$ . وهو عمود على  $ف ي$  الذي ينصف القوس  $غ ي ح$  (فرع ٤ ق ٣ د ك ٣) فالقوسان بينهما  $غ ي$  و  $ح ي$  متساويان



ثالثاً متى كان الخطان المتوازيان وترين مثل  $غ ح$  و  $ل م$  فلنفرض ان القطر  $ف ي$  عمود على  $غ ح$ . فيكون عموداً على  $ل م$  ايضاً لانها متوازيان. والقطر ينصف كل

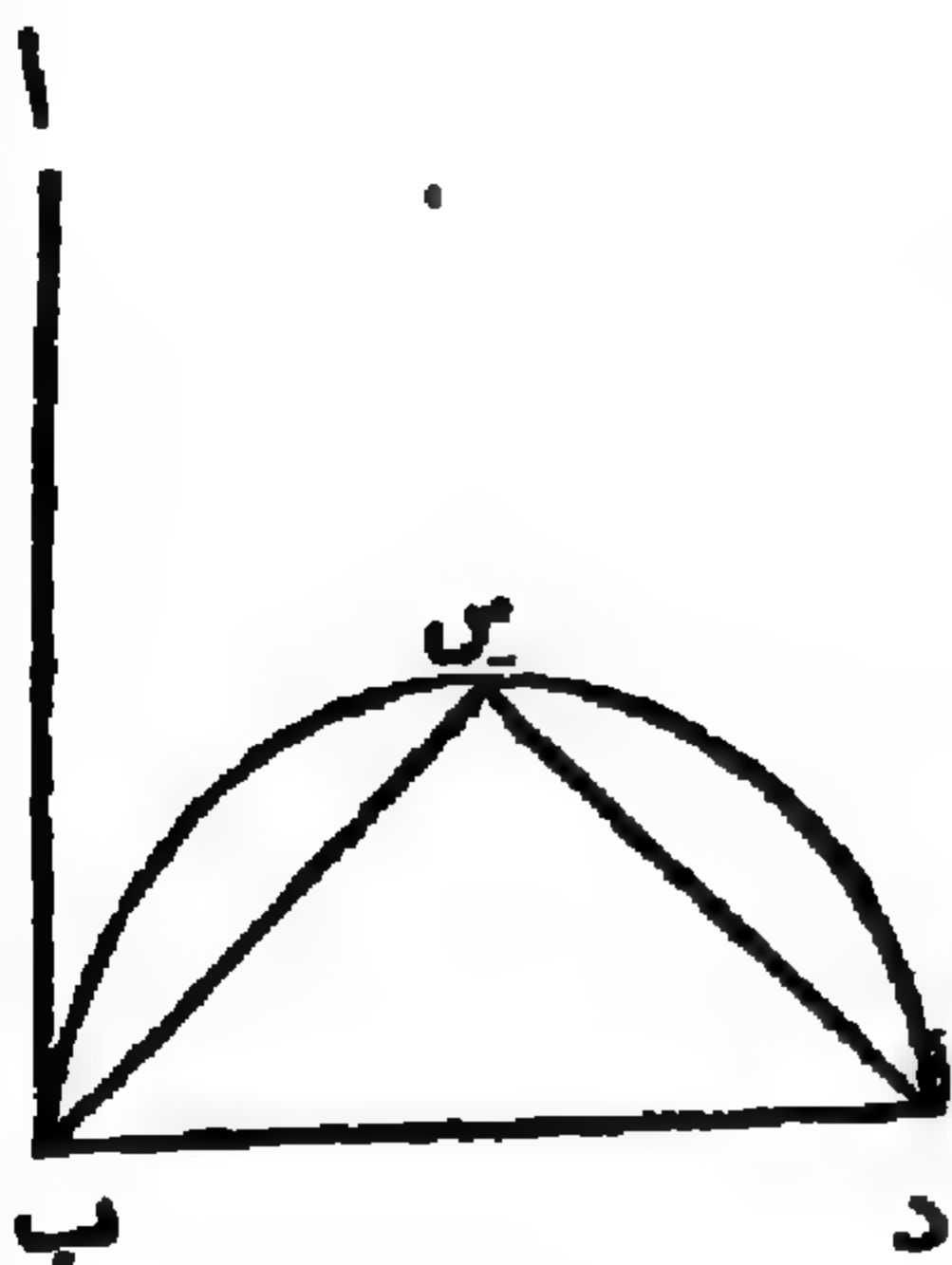
واحد من القوسين اللذين يقابلان هذين الوترين اي  $غ ي = ح ي$  و  $ل ي = م ي$  فبالضرورة  $ل ي - غ ي = م ي - ح ي$  اي  $غ ل = ح م$

ثم بالقلب. اذا كان الخطان  $ا ب$  و  $س د$  مماسين وكان القوسان  $ل ف ي م$  و  $ف$  متساويين يكون  $ي ف$  قطراً (ق ١ ك ٣) و  $ا ب$  و  $س د$  متوازيين (فرع ٢ ق ١٦ ك ٣)

وإذا كانت احدهما ا ب مماساً والاخر غ ح قاطعاً وكان القوسان ي غ ي ح  
متساويين يكون القطرف ي الذي ينصف القوس غ ي ح عموداً على وتر  
غ ح (تعليقة ق د ك ٢) وعلى مماساً ا ب فهما متوازيان  
وإذا كان كلا الخطين قاطعاً مثل غ ح ول م وكان القوسان غ ل خ م بينهما  
متساويين فلنرض ان القطرف ي ينصف احدهما مثل غ ح في ك فهو ينصف  
القوس غ ي ح ايضاً اي ي غ = ي ح وقد فرض ان غ ل = ح م فالكل ي ل =  
الكل ي م فالوتر ل م قد تنصف بالقطرف ي. فقد تنصف كلا الوترين بالقطر  
ف ي وهما اذ ذاك عمودان عليه ومتوازيان (فرع ق ٢٨ ك ١)  
تعليقة. لا بد ان يشترط في هذه القضية ان الخطين لا يتقاطعان في الدائرة لأن  
خطين مستقيمين مارين في غ م وح ل يقطعان اقواساً متساوية غ ل ح م ولا يكونان  
متوازيين

### قضية و.ع

علينا ان نرسم مماساً في نقطة مفروضة من قوس دائرة بدون استعمال  
المركز



لنكن ب النقطة المفروضة. قس جزءين متماثلين  
من القوس مثل ب س س د. ارسم ب د وايضاً  
الوترين ب س س د واجعل الزاوية س ب ا  
تعدل س ب د (ق ٢٢ ك ١) فيكون الخط المستقيم  
ب ا المماس المطلوب

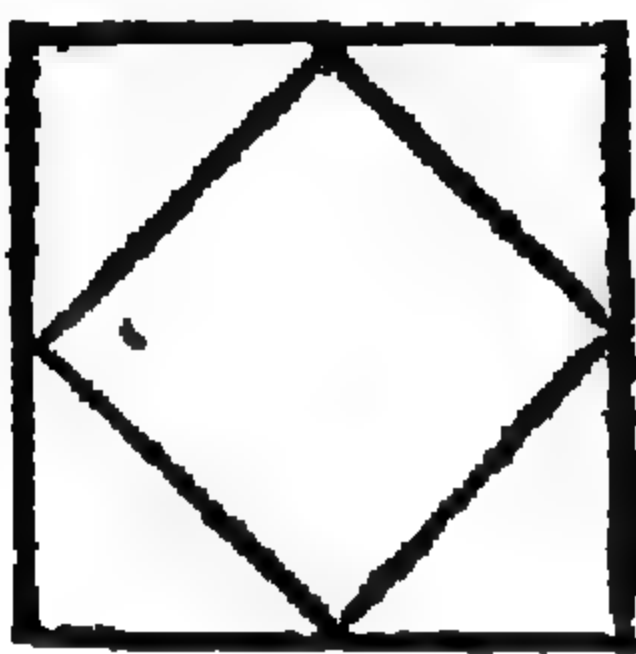
لأن الزاوية س ب د = س د ب فالزاوية  
س ب ا = س د ب (ق ٢٢ ك ٢) التي هي في القطعة المتبادلة فإذا ب ا هو مماس  
في النقطة ب



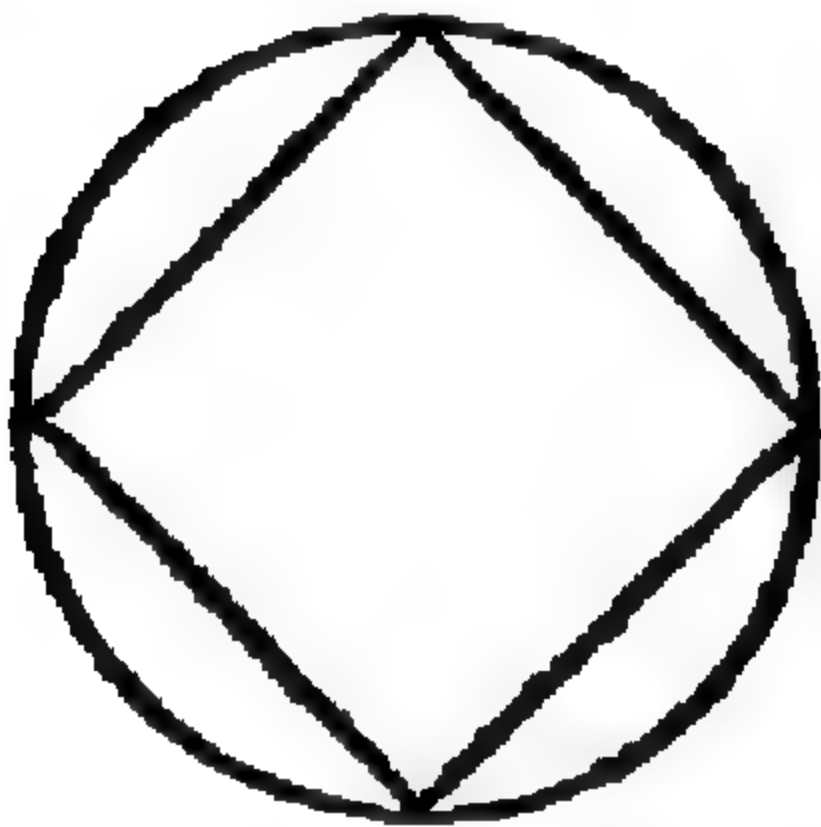
# اصول الهندسة

## الكتاب الرابع

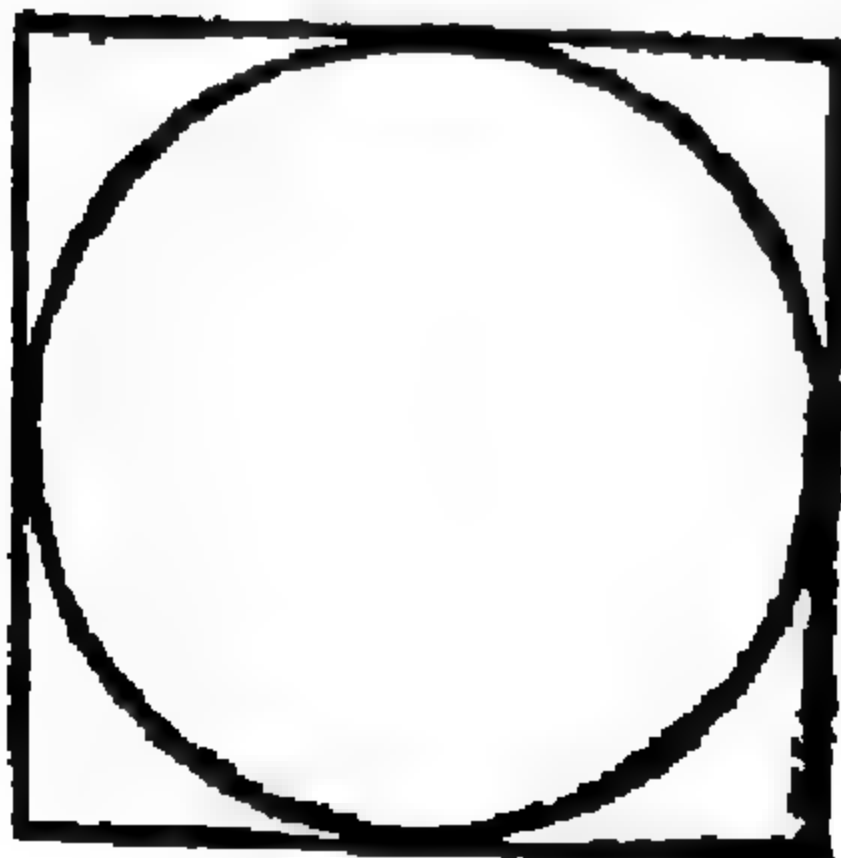
### حدود



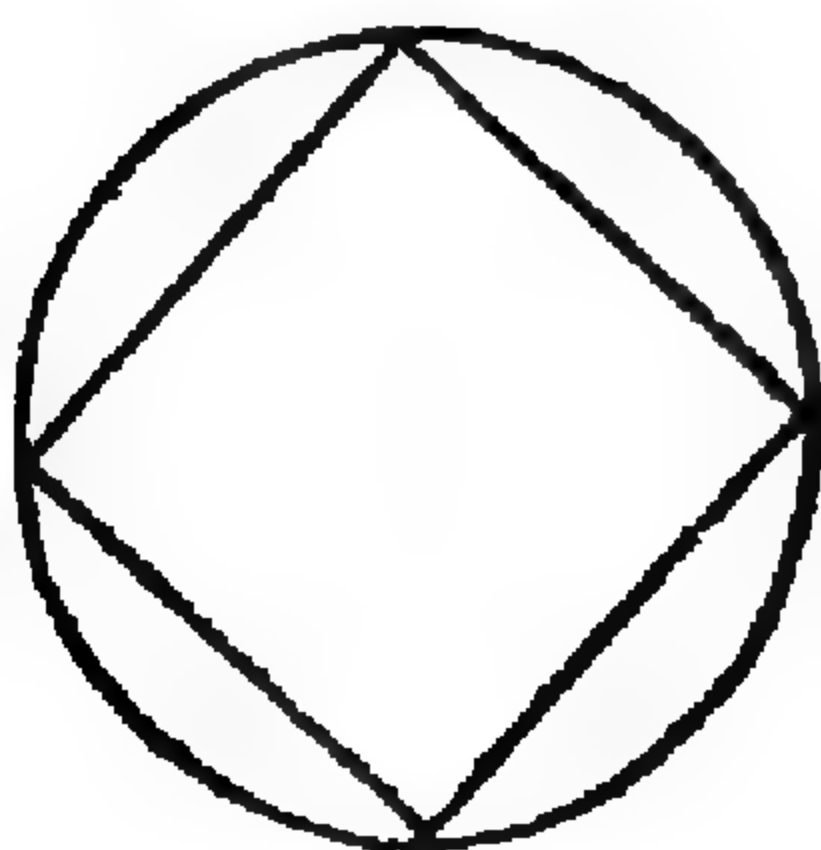
١ في شكلين اضلاعها مستقيمة متى كانت زوايا  
احدهما في اضلاع الآخر يقال ان الواحد مرسوم في الآخر  
٢ اذا مررت اضلاع شكل في رواية شكل آخر يقال  
ان الواحد يحيط بالآخر



٣ متى كانت زوايا شكل ذي اضلاع مستقيمة في  
محيط دائرة يقال ان الشكل مرسوم في الدائرة  
٤ شكل ذو اضلاع مستقيمة يحيط بدائرة متى  
كانت اضلاعه مماسات لمحيط الدائرة



٥ اذا مس محيط دائرة كل ضلع من اضلاع  
شكل ذي اضلاع مستقيمة يقال انها مرسومة في الشكل  
٦ الدائرة تحيط بشكل ذي اضلاع مستقيمة متى  
مر محيطها بزوايا الشكل



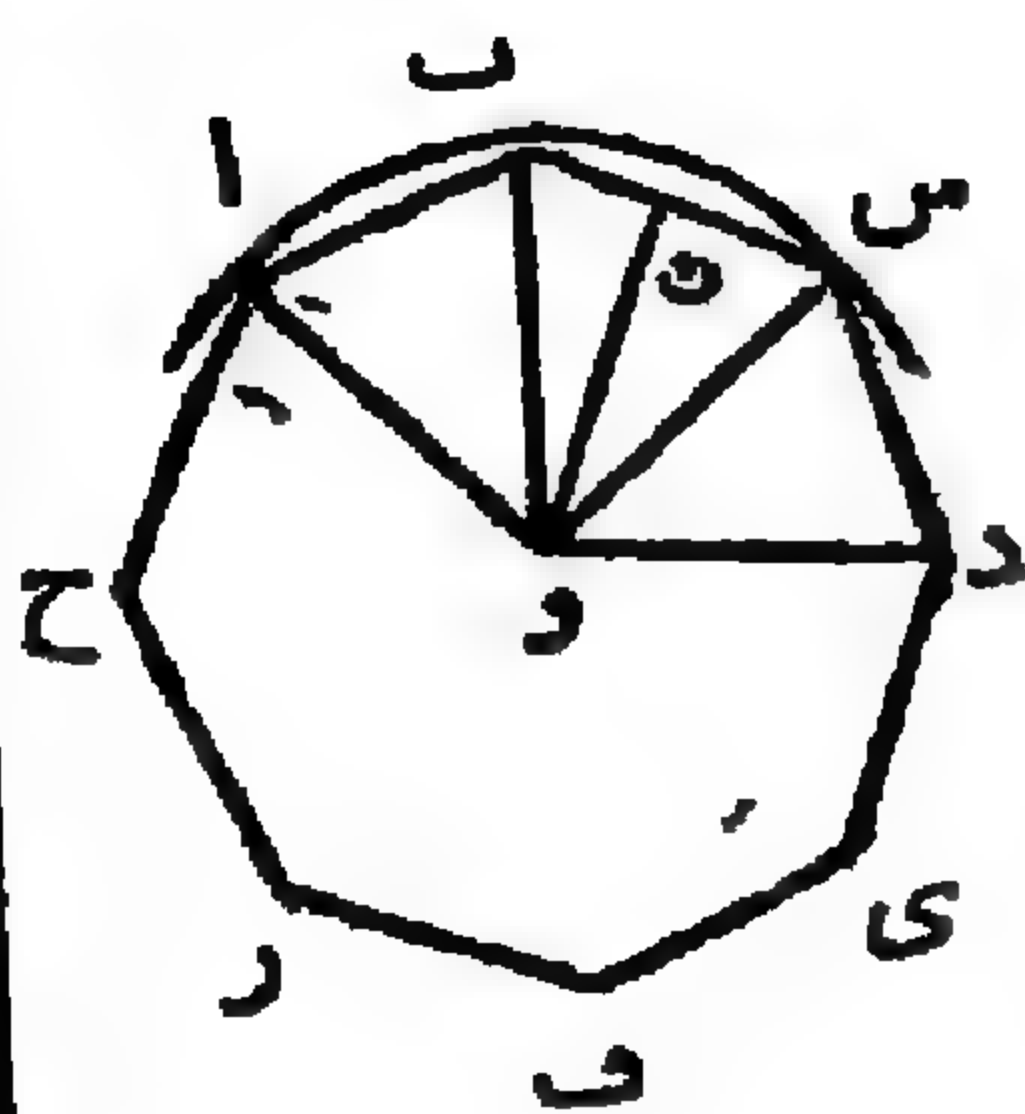
٧ اذا انتهى طرفا خط مستقيم في محيط دائرة  
يقال انه موضوع او مرسوم في الدائرة

٨ شكل ذو زوايا كثيرة متى كان له خمسة اضلاع يسمى ذا خمس زوايا ويسمى  
ذاست زوايا متى كان له اربعة وستة وذا سبع زوايا متى كانت اضلاعه تسعة وهلم جرأ  
٩ شكل ذو زوايا كثيرة اذا كانت اضلاعه وروايه متساوية يسمى قياسيا

سابقة

يمكن ان يرسم في دائرة او محيطاً بها اي شكل ذي اضلاع كثيرة  
قياسي فرض

ليكن ا ب س ي ح شكلاً قياسياً ذا اضلاع كثيرة. ارسم دائرة محيطها مارة بالنقط



الثلث ا ب س (ق ب مضافات ك ٢) ومركزها النقطة  
و وليكن و ن عموداً من المركز على وسط ب س. ارسم  
او دو

فاذا وضع ذو الاضلاع الاربعة و ن س د على  
ذي الاضلاع الاربعة و ن ب ا بتطابقان. لأن الضلع  
و ن مشترك بين الشكلين والزاوية و ن س = و ن ب

لأنها قائمتان. فالضلع ن س يقع على الضلع ن ب والنقطة س تقع على النقطة ب  
لأن ن س = ن ب. وبما ان الشكل قياسي فالزاوية ن س د = ن ب ا فالخط س د  
يقع على ب ا والنقطة د تقع على النقطة ا الآن س د = ب ا. فالشكلان بتطابقان  
والخط و د = و ا والمحيط الذي يمر في النقطة ا ب س يمر ايضاً في النقطة د. وعلى  
هذا الاسلوب يبرهن ان المحيط المار في ب س د يمر في ي ايضاً وفي كل زوايا  
الشكل المفروض فهو ادا مرسوم في الدائرة

ثم اذا تم الشكل والدائرة كما تقدم يرى الاضلاع ا ب ب س س د الى اخره  
انها اوتار متساوية وهي على بعد واحد من المركز (ق ٤ الك ٢) فاذا جعلت النقطة و  
مركزاً للعمود و ن بعداً ورسمت دائرة محيطها بمس الضلع ب س في وسطه وهكذا  
في جميع اضلاع الشكل فترسم الدائرة في الشكل او الشكل حول الدائرة  
فرع اول. اذا فرض شكل قياسي فيمكن ان ترسم دائرة فيه واخرى محيطة به  
ويكون لهما مركز واحد

فرع ثان. اذا امكن ان ترسم دائرة في شكل مفروض واخرى محيطة به فالشكل  
قياسي

تعليق اول. النقطة و هي مركز الدائرة اي المحطة بالكل والرسومة فيه فهي  
ايضاً مركز الشكل. وسمى الزاوية ا و ب الزاوية في المركز وهي مصطعة من بصري

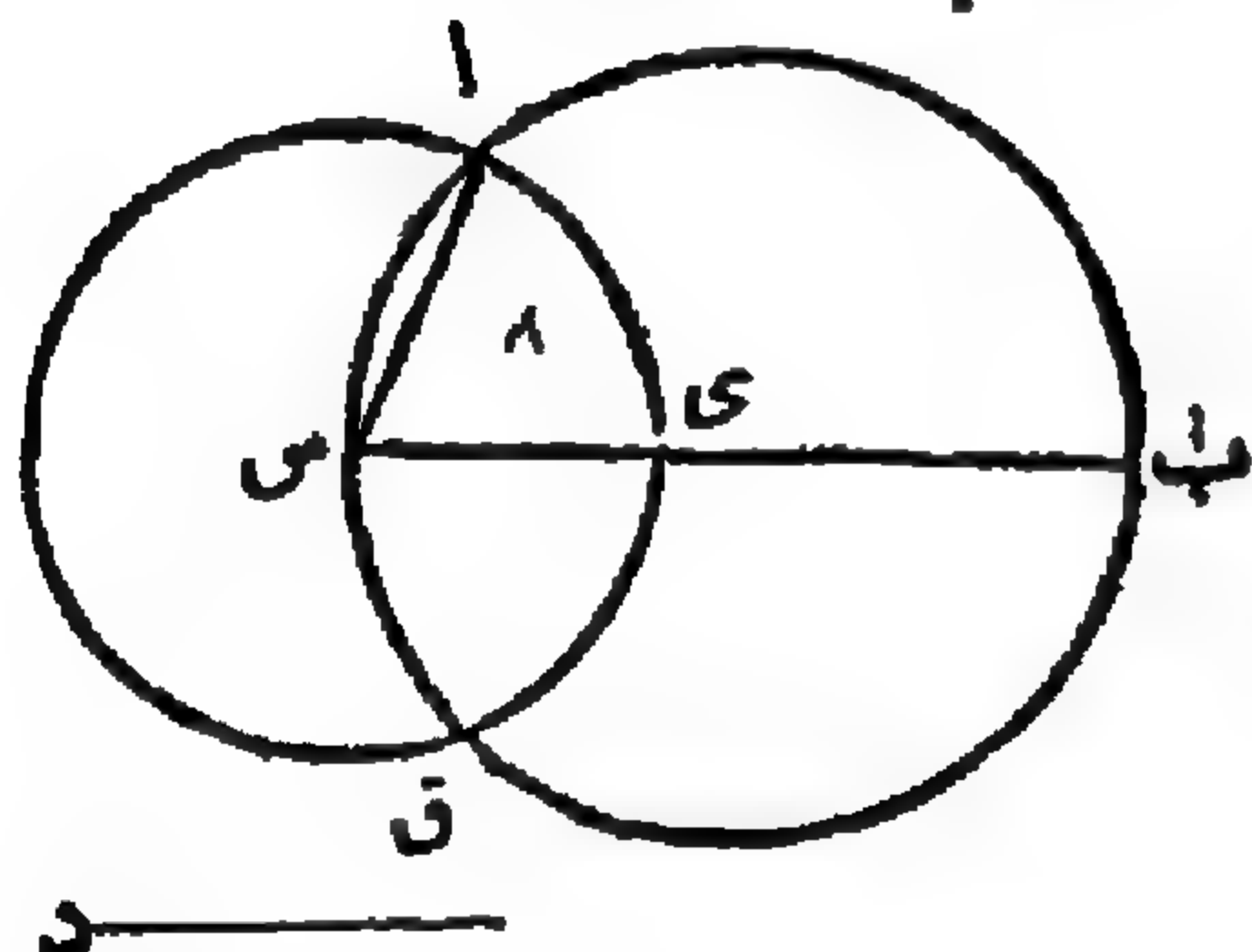


قطرين مرسومين من طرفي الضلع ا ب  
 بما ان كل الاوتار متساوية فكل الزوايا في المركز متساوية. فتستعمل كمية كل  
 واحدة منها بقسمة اربع زوايا قائمة على عدد اضلاع الشكل  
 فحليقة ثانية. اذا اردنا ان نرسم شكلاً قياسياً مفروضاً عدد اضلاعه في دائرة  
 مفروضة فلنقسم محيط الدائرة الى اقسام متساوية تماثل عدد اضلاع الشكل (انظر  
 الشكل في ق ١٥ ك ٤)

### القضية الاولى. ع

علينا ان نرسم في دائرة مفروضة خطاً مستقيماً يماثل خطاً مستقيماً مفروضاً  
 ليس اطول من قطر الدائرة

لكن ا ب س الدائرة المفروضة ود الخط المستقيم المفروض

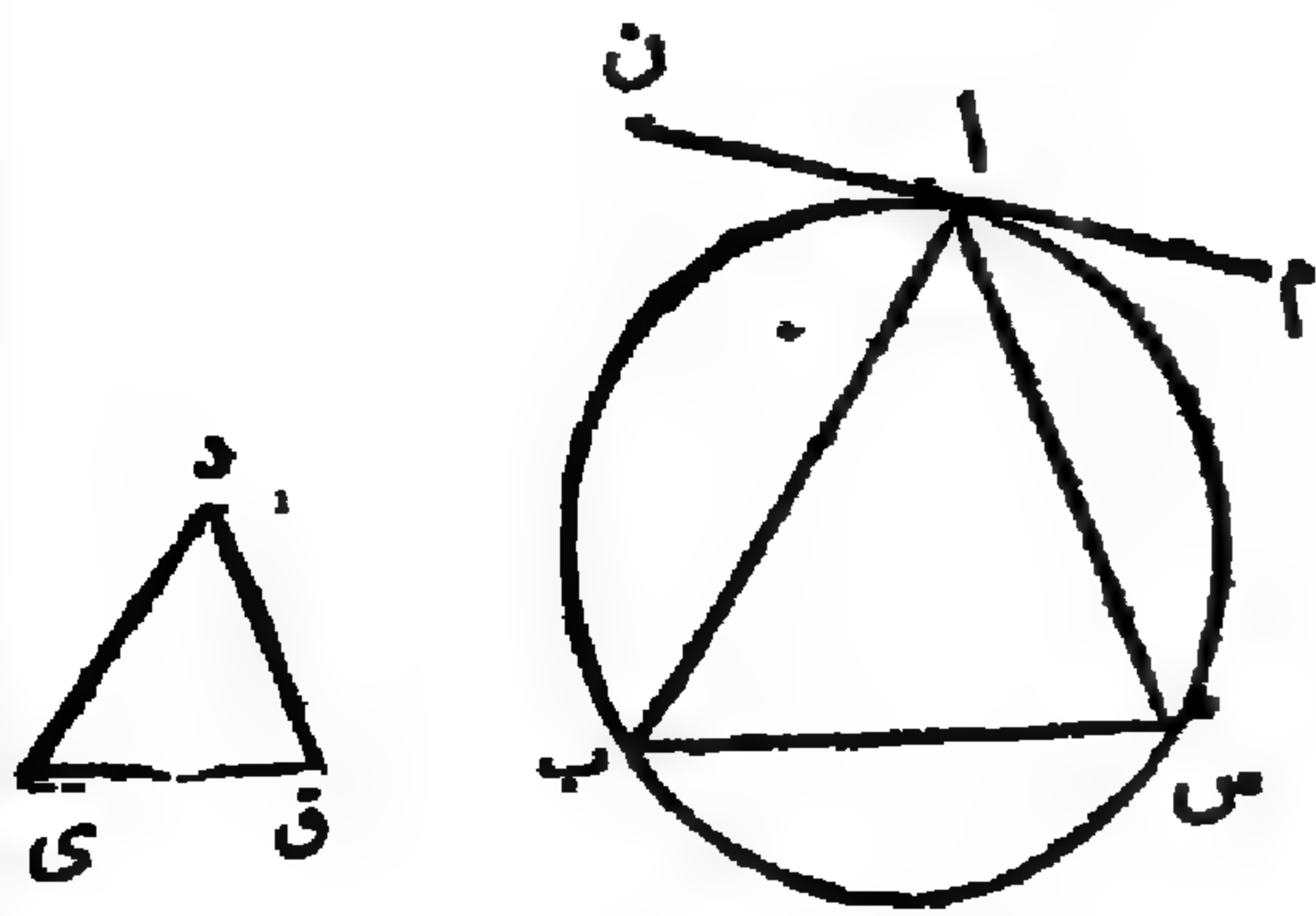


ارسم ب س قطر الدائرة ا ب س ثم اذا  
 ماثل ب س الخط د فقد تم العمل لانه قد  
 وضع في الدائرة خطاً مستقيماً يماثل د. والآن  
 فالخط ب س اطول من د. افطع الجزء  
 س ي حتى يماثل د (ق ٢ ك ١) واجعل س

مركزاً وس ي بعداً ولرسم الدائرة ا ي ق ولرسم الخط س ا. فبما ان س مركز الدائرة  
 ا ي ق فالخط اس يعدل س ي. ولكن س ي يعدل د فالخط س ا يعدل د ايضاً  
 فقد رُسم في الدائرة خطاً مستقيماً يماثل الخط المستقيم المفروض د الذي ليس اطول  
 من قطر الدائرة

### القضية الثانية. ع

علينا ان نرسم في دائرة مفروضة مثلثاً زواياه تماثل زوايا مثلث مفروض  
 لكن ا ب س الدائرة المفروضة ود ي ق المثلث المفروض. علينا ان نرسم في



الدائرة ا ب س مثلثا زواياه تعدل  
زوايا المثلث د ح ق

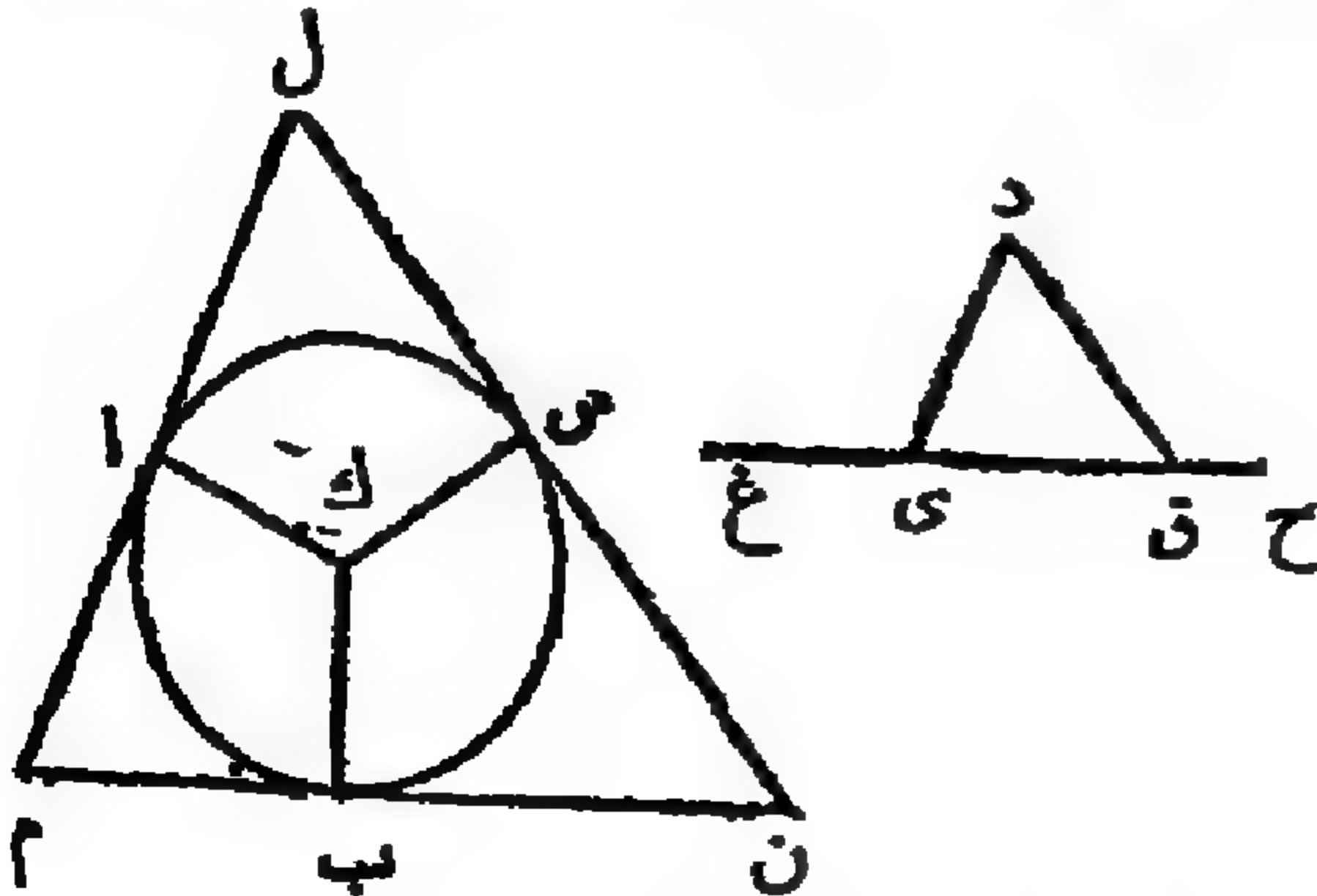
ارسم الخط المستقيم ن ا م  
حتى يمس الدائرة في النقطة ا (ق)  
١٧ ك (ق) وفي النقطة ا من الخط  
المستقيم ا م اجعل الزاوية م ا س

تعدل الزاوية د ح ق (ق ٢٢ ك ١) وفي النقطة ا من الخط المستقيم ا ن اجعل  
الزاوية ن ا ب تعدل د ح ق وارسم ب س لأن الخط ن ا م يمس الدائرة ا ب س  
و ا س يقطعها فالزاوية م ا س تعدل ا ب س في القطعة المتبادلة (ق ٢٢ ك ٢)  
وم ا س تعدل د ح ق فالزاوية ا ب س تعدل د ح ق ولهذا السبب ا س ب  
تعدل د ح ق فالزاوية الباقية من الواحد ب ا س تعدل الباقية من الاخرى د ح ق  
(فرع ٤ ق ٢٢ ك ١) فزوايا المثلث ا ب س تعدل زوايا المثلث د ح ق وقد رُسم  
في الدائرة ا ب س

### القضية الثالثة. ع

علينا ان نرسم مثلثا يحيط بدائرة مفروضة وزواياه تعدل زوايا مثلث  
مفروض

لتكن ا ب س الدائرة المفروضة وليكن د ح ق المثلث المفروض. علينا ان



نرسم مثلثا يحيط بالدائرة

ا ب س وزواياه تعدل

زوايا المثلث د ح ق

أخرج د ح ق الى

المجهتين الى غ و ح واستعلم

ك مركز الدائرة ا ب س

(ق ١ ك ٢) ومن ك ارسم خطا مستقيما كيفما شئت مثل ك ب وفي النقطة ك من  
الخط ب ك اجعل الزاوية ب ك ا تعدل الزاوية د ح غ (ق ٢٢ ك ١) وايضا الزاوية



ب ك س تعدل الزاوية د ق ح . وفي النقط الثلاث ا ب س ارسم المماسات ل ا م  
م ب ن ن س ل (ق ١٧ ك ٣)

لان م ل م ن ن ل مماسات في النقط ا ب س التي قد رُسم اليها من المركز  
ك ا ك ب ك س فالزوايا عند هذه النقط الثلاث انما هي قائمات (ق ١٨ ك ٣)  
والشكل ا ك ب م ذو اربعة اضلاع وهو قابل الانقسام الى مثلثين فزوايا الاربعة  
تعدل اربع زوايا قائمة . وك ا م ك ب م قائمتان فالآخران ا ك ب م ا تعدلان  
قائمتين والزاويتان د ي غ د ي ق تعدلان قائمتين (ق ١٢ ك ١) فالزاويتان ا م ب  
ا ك ب تعدلان د ي غ د ي ق . ولكن ا ك ب تعدل د ي غ فالآخرى ا م ب  
تعدل الاخرى د ي ق وعلى هذا الاسلوب يبرهن ان الزاوية ل ن م تعدل د ق ي  
فالباقية من الواحد تعدل الباقية من الآخر اي م ل ن تعدل د ي ق (ق ٢٢ ك ١)  
فالمثلث ل م ن قد رُسم محيطاً بالدائرة ا ب س وزواياه تعدل زوايا المثلث د ي ق

### القضية الرابعة . ع

علينا ان نرسم دائرة في مثلث مفروض

ليكن ا ب س المثلث المفروض . فعلينا ان نرسم فيه دائرة

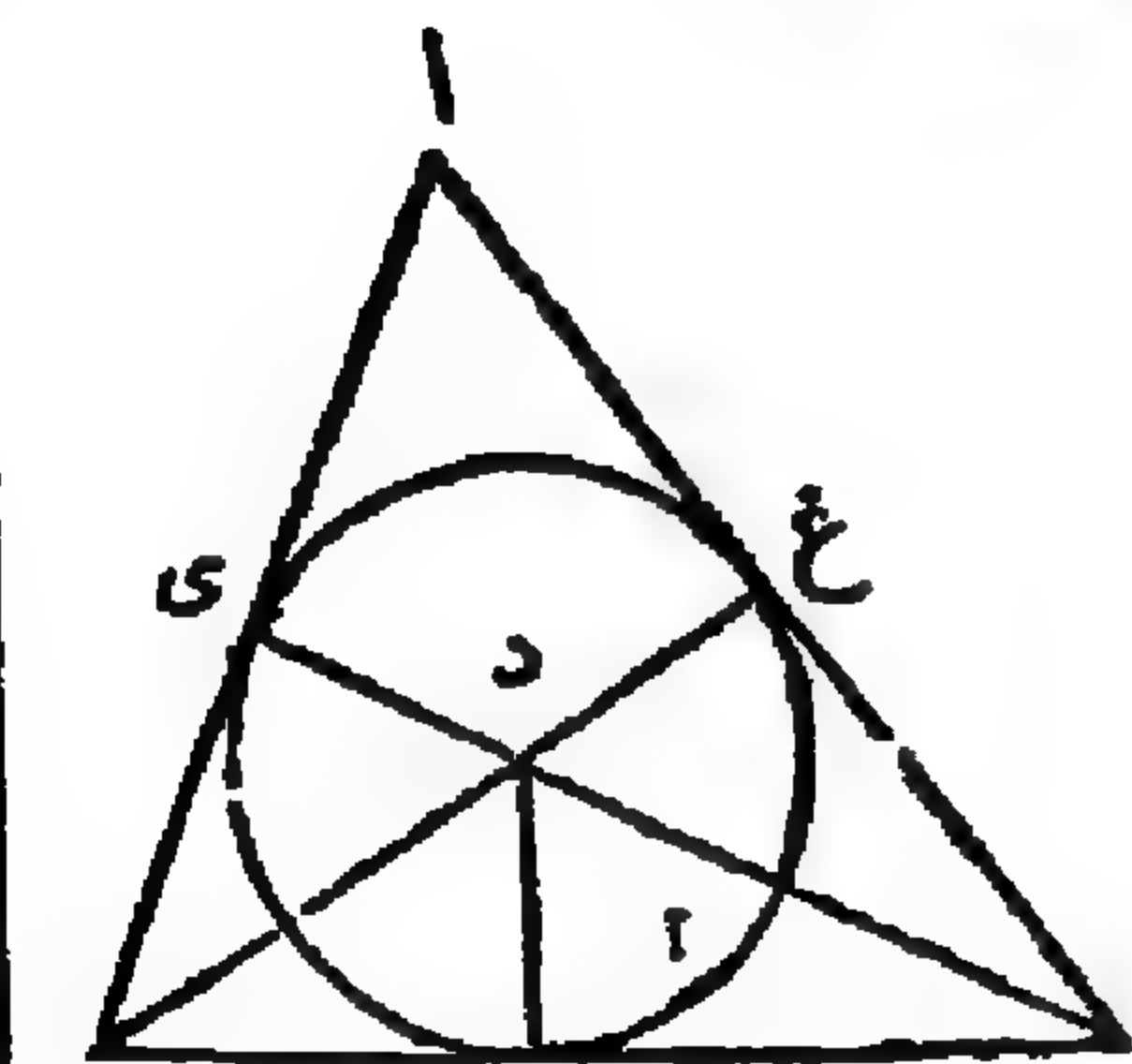
نصف الزاويتين ا ب س ا س ب (ق ٩)

ك ا ) بالخطين المستقيمين ب د س والمنقاطعين

في النقط د . ومن دارسم الخطوط د ي د ف

د غ عمودية على الاضلاع ا ب ب س س ا

ثم لان الزاوية ي ب د تعدل ف ب د من



حيث ان ا ب س تنصفت بالخط ب د ولان

القائمة ب ي د تعدل القائمة ب ف د فالمثلث ي ب د له زاويتان تعدلان زاويتين

من المثلث ف ب د والضلع ب د الذي يقابل زاويتين متساويتين مشترك بين

المثلثين . فالضلعان الآخران من الواحد يعدلان الآخرين من الآخر (ق ٢٦ ك ١)

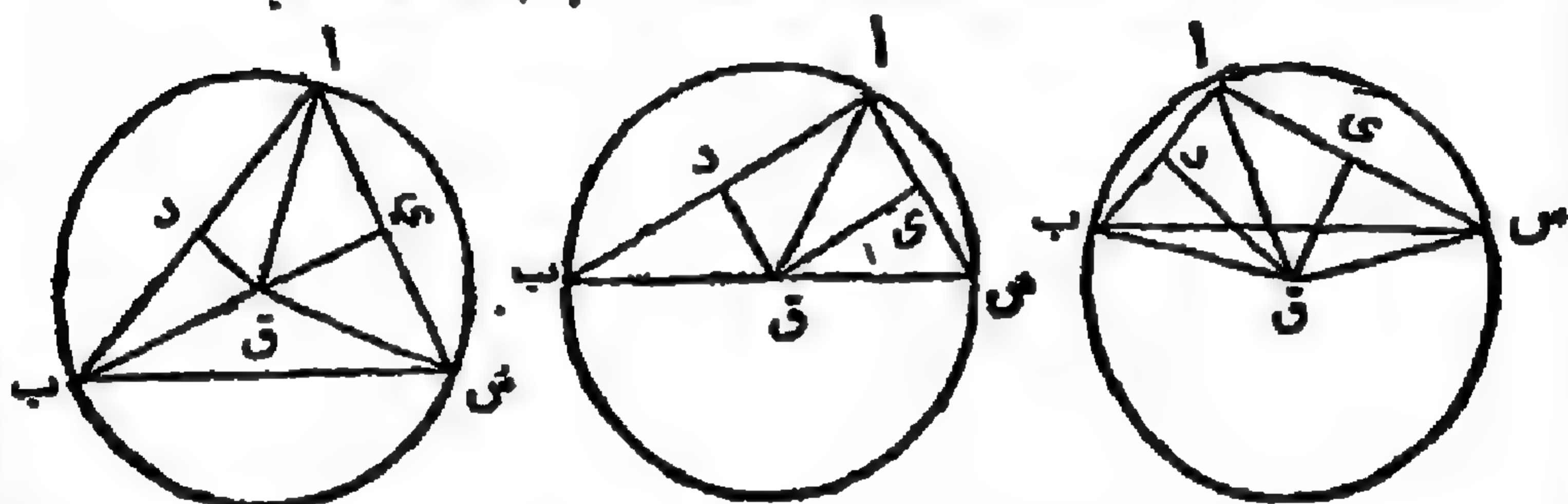
اي د ي يعدل د ف وهكذا يبرهن ايضاً ان د ع يعدل د ف والخطوط الثلاثة د غ

د ف د ي متساوية واذا رُسمت دائرة من المركز د وعلى بعد د ي يمر المحيط في طرفي

د ف ودغ ايضا ويس الاضلاع اب ب س س الآن الزوايا عند هذه النقطة  
ف غ هي قائمات. والمخط المستقيم العمودي على طرف القطر هو مماس (فرع اول ق  
١٦ ك ٢) فالمخطوط الثلاثة اب ب س س اتس الدائرة فقد رُسمت الدائرة في  
المثلث اب س

### القضية الخامسة. ع

علينا ان نرسم دائرة تحيط بمثلث مفروض  
ليكن اب س المثلث المفروض. فعلينا ان نرسم دائرة تحيط به



نصف اب واس في د وي (ق ١٠ ك ١) ومن هاتين النقطتين ارسم دق  
ي ق عمودين على اب واس (ق ١١ ك ١) فاذا اخرج دق ي ق يلتقيان والآن  
فهما متوازيان واس العموديان عليهما متوازيان ايضا وذاك محال. فلنفرض  
الثلاثة في ق ولرسم ق ا وان لم تكن النقطة ق في المخط ب س فارسم ب ق س ق  
لان اد يعدل ب د ودق مشترك بين المثلثين وعمود على اب فالقاعدة اق  
تعديل القاعدة ب ق (ق ٤ ك ١) وهكذا يبرهن ان س ق يعدل اق ولذلك ب ق  
يعديل س ق والمخطوط الثلاثة ق ا ق ب ق س متساوية واذا جعلت النقطة ق  
مركزا واحدا من هذه المخطوط بعدا فمحيط الدائرة تمر بطرفي الآخرين ونرسم حول  
المثلث

فرع. متى وقع مركز الدائرة داخل المثلث كانت كل واحدة من زواياه اصغر من  
قائمة لان كل واحدة منها في قطعة اكبر من نصف دائرة. ومتى كان المركز في احد  
الاضلاع فالزاوية المتقابلة قائمة لانها في نصف دائرة. ومتى وقع المركز خارج المثلث  
فالزاوية المتقابلة للضلع الذي كان المركز خارجه اكبر من قائمة لانها في قطعة اصغر

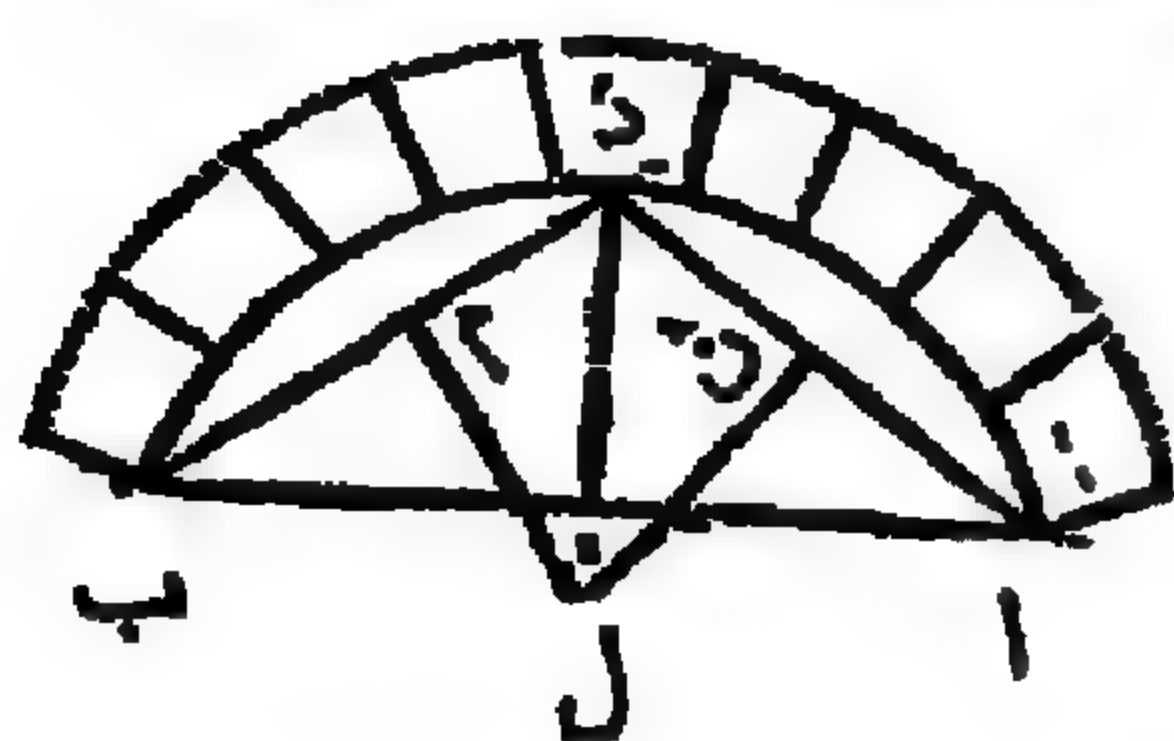


من نصف دائرة. فإذا كان المثلث المفروض حادّ الزوايا يقع المركز داخله وإذا كان  
زاوية يقع المركز في الضلع الذي يقابل القائمة وإذا كان منفرج الزاوية يقع المركز  
خارج الضلع الذي يقابل المنفرجة

**تعلیقة**

(١) يتضح من هذه القضية ان النخطوط الثلاثة العمودية على اواسط اضلاع مثلث تلتقي في نقطة واحدة هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث

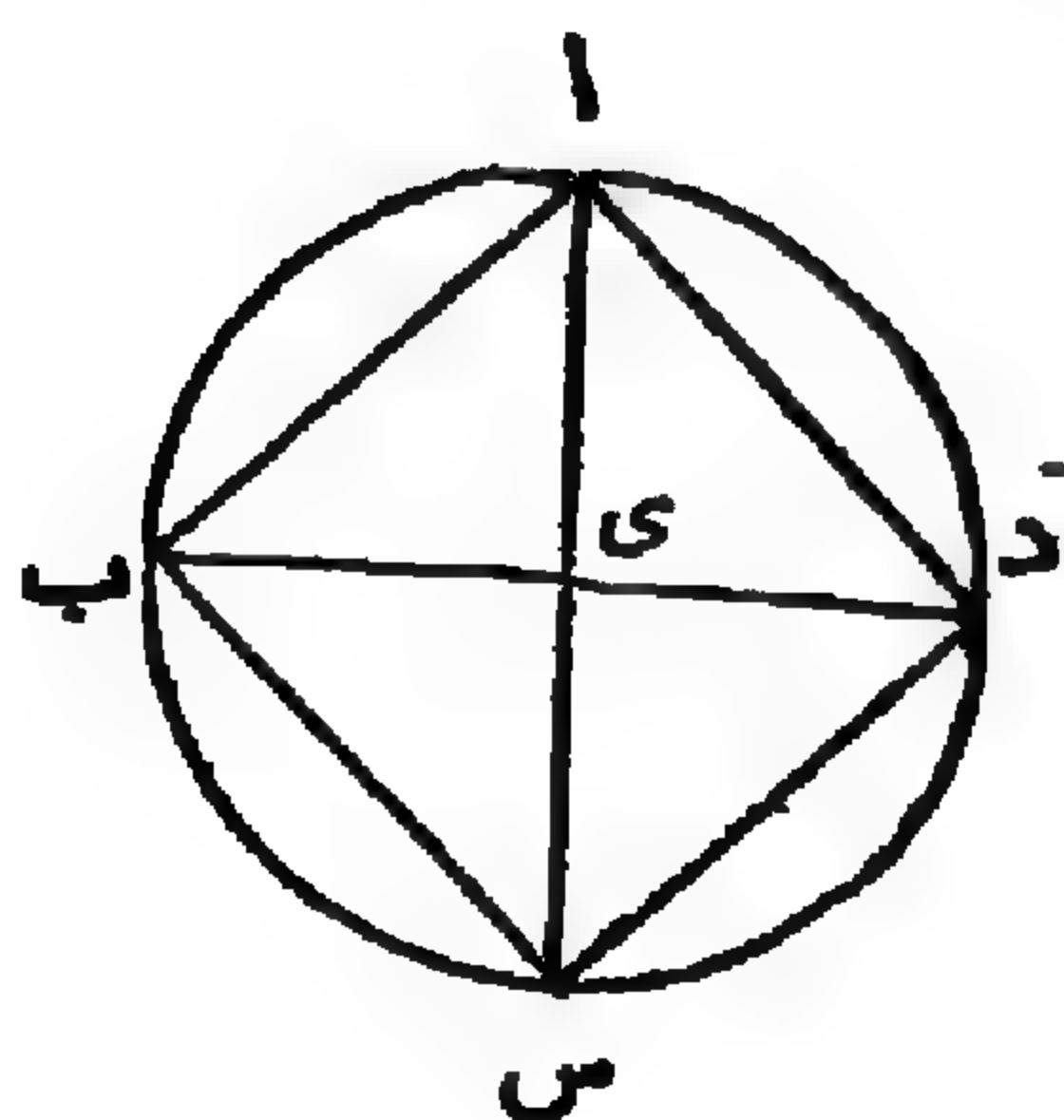
(٢) بموجب هذه القضية تُرسم قطعة من قنطرة ونرها وعلوها مفروضان



## القضية السادسة:ع

علينا ان نرسم مربعا في دائرة مفروضة

لتكن  $AB$  س د الدائرة المفروضة. فعلينا ان نرسم فيها مربعاً

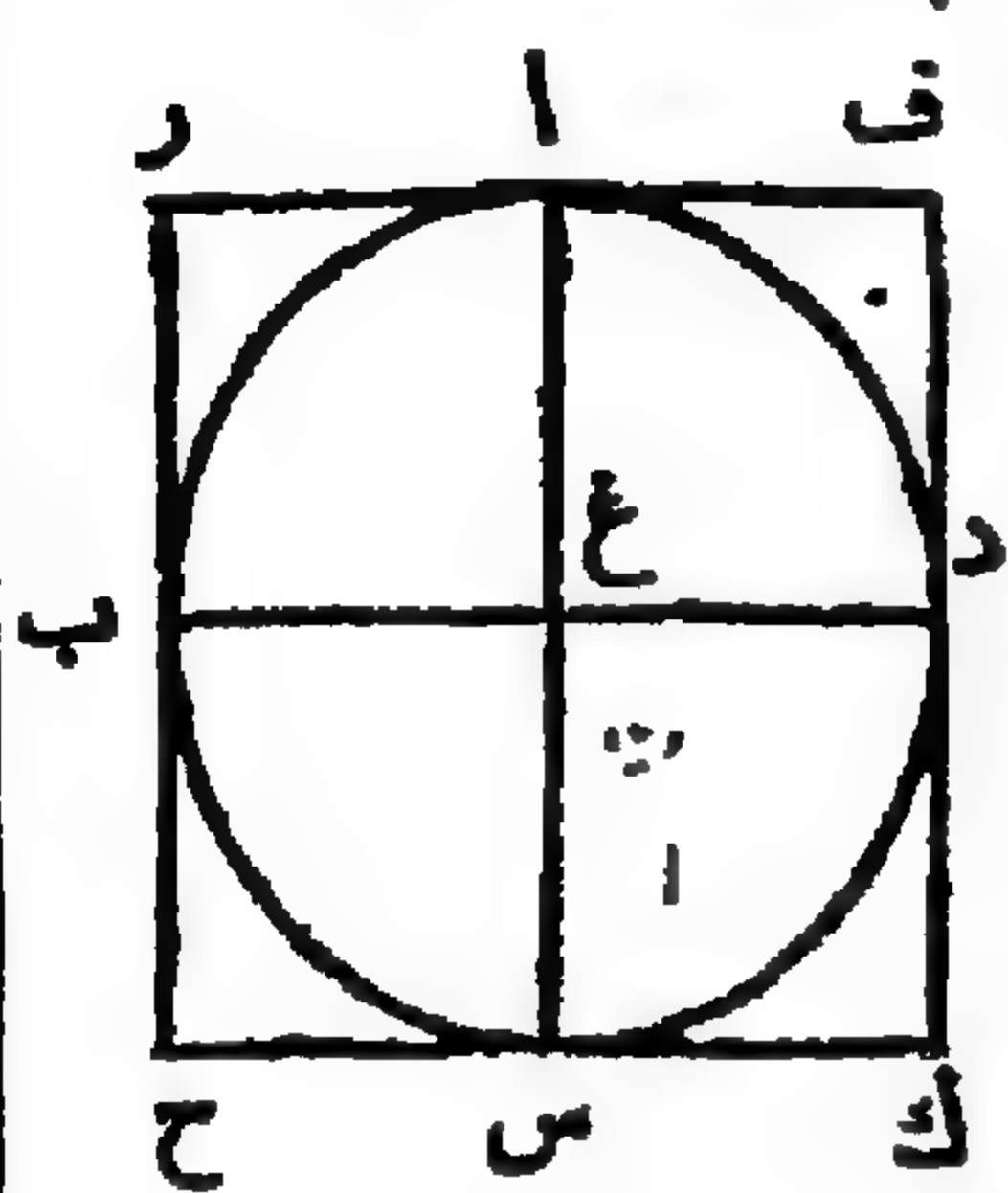


تبس وس د بعد لان اب او اد فالشكل اب س د متساوي الاضلاع. وهو  
ايضاً قائم الزوايا. لان ب د قطر وب ا د نصف دائرة فالزاوية ب ا د قائمة (ق ٢١)  
ك (٤) هكذا يبرهن ايضاً ان اب س ب س د س د ا قائمات فالشكل اب س د  
قائم الزوايا وقد تبرهن انه متساوي الاضلاع فهو مربع وقد رُسم في الدائرة اب س د

تعليقة. المثلث اى د قائم الزاوية ومتساوي الساقين فلنا (فرع ٢ ق ٤٧ ك ١)  
اد: اى ١: ٢: ٣: اى ضلع مربع في دائرة الى نصف القطر كجذر اثنين المائل الى واحد

### القضية السابعة. ع

علينا ان نرسم مربعاً محيطاً بدائرة مفروضة  
ليكن ا ب س د الدائرة المفروضة. فعلينا ان نرسم مربعاً محيطاً بها



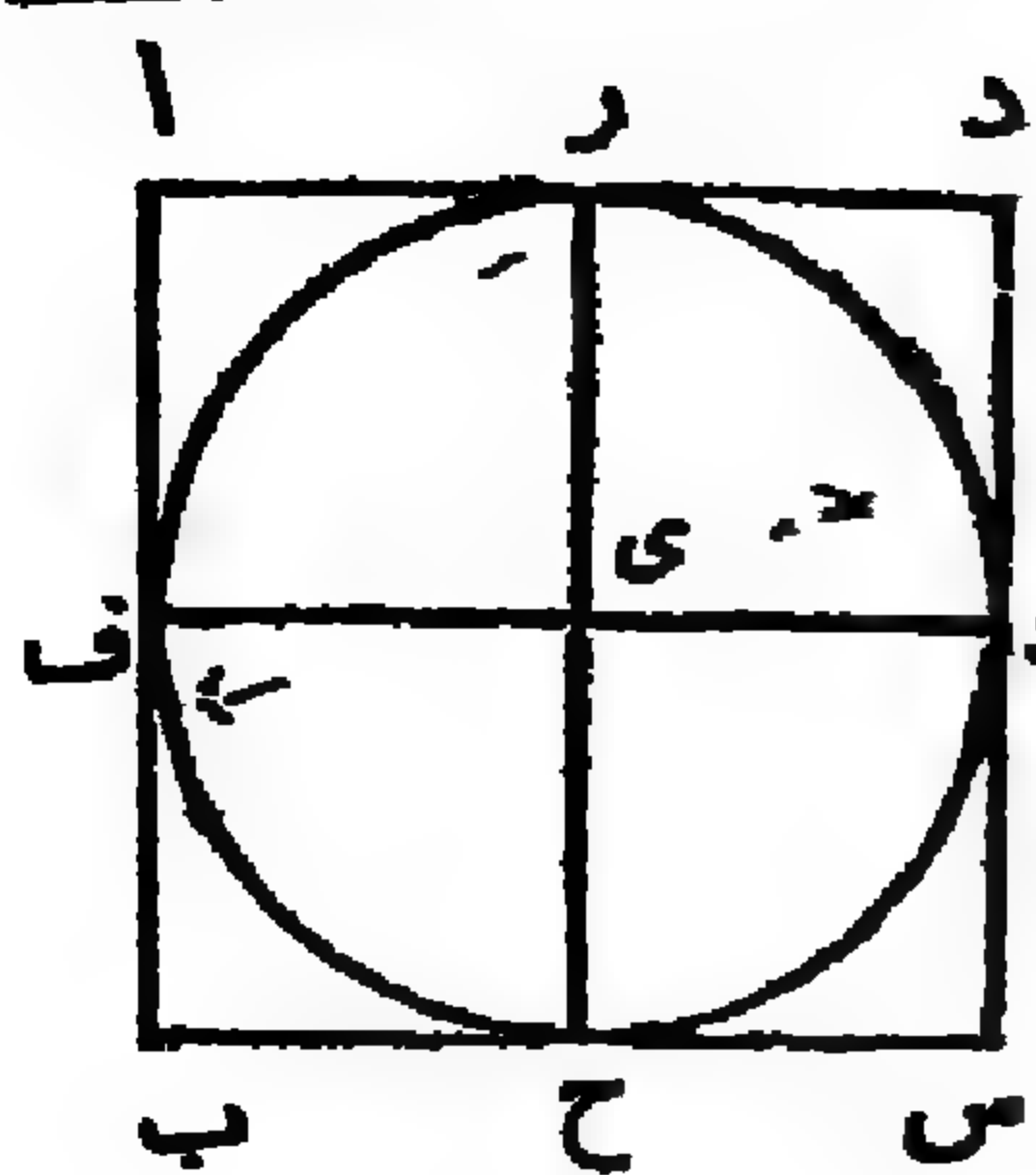
ارسم القطرين ا س ب د واجعل كل واحد  
منها عموداً على الآخر. وفي النقط ا ب س د  
ارسم المماسات ر ف ر ح ح ك ك ف (ق ١٧ ك ٢)  
لان ر ف ممس الدائرة وقد رسم غ ا من المركز  
الى نقطة الماسة فالزاويتان عند ا قائمتان (ق ١٨  
ك ٢) وهكذا يبرهن ان الزوايا عند ب وس ود

قائمات. فبما ان ا غ ب قائمة و غ ب ر كذلك فالخط ر ح يوازي ا س وهكذا يبرهن  
ان ا س يوازي ف ك ولن ر ف و ح ك يوازيان ب د فالشكل ر ك ر س ا ك  
ف ب ب ك هي متوازية الاضلاع و ر ف يعدل ح ك (ق ٢٤ ك ١) و ر ح يعدل  
ف ك. ومن حيث ان ا س يعدل ب د و يعدل ر ح و ف ك ايضاً و ب د يعدل  
ر ف و ح ك فالخطان ر ح ف ك يعدلان ر ف ا و ح ك فالشكل ف ر ح ك متساوي  
الاضلاع. وهو ايضاً قائم الزوايا. لان ر ب غ ا متوازي الاضلاع و ا غ ب قائمة  
تكون ا ر ب ايضاً قائمة (ق ٢٤ ك ١) وهكذا يبرهن ان كل واحدة من الزوايا عند  
ح و ك و ف قائمة فالشكل ف ر ح ك قائم الزوايا وقد تبرهن انه متساوي الاضلاع  
فهو مربع وقد رسم محيطاً بالدائرة ا ب س د

### القضية الثامنة. ع

علينا ان نرسم دائرة في مربع مفروض  
ليكن ا ب س د المربع المفروض. فعلينا ان نرسم فيه دائرة





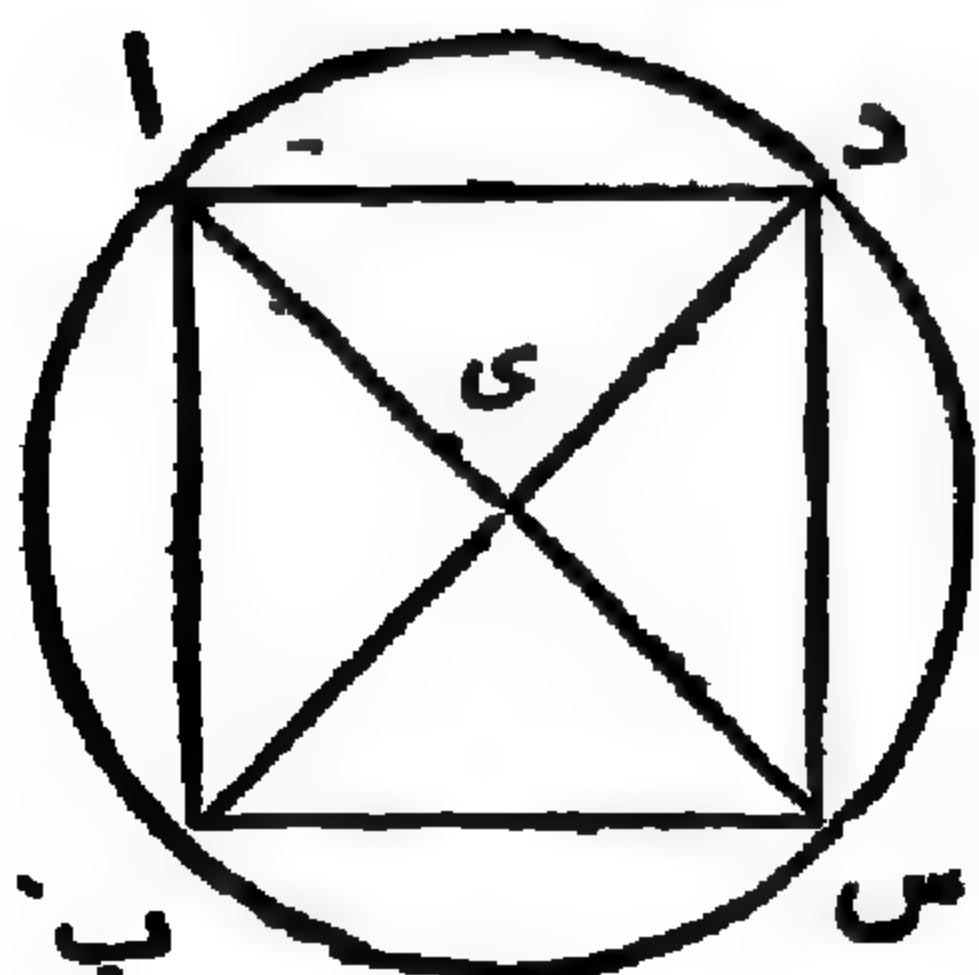
نصف الضلع اب في ف والضلع اد في ر  
(ق ١٠ ك ١) ومن م ارسم رح حتى يوازي اب او  
دس ومن ف ارسم ف ك حتى يوازي ا د او ب س  
فكل واحد من الاشكال اك ك ب اح ح د ا ي  
ي س ب ي ي د متوازي الاضلاع واضلاعها  
المتقابلة متساوية (ق ٢٤ ك ١) فمن حيث ان اد

يعدل اب وار نصف ا د و اف نصف اب فبالضرورة ا ر يعدل اف فالضلعان  
المقابلان لهذين متساويان ايضا اي ف ي يعدل ي ر وهكذا يبرهن ان ي ح و ي ك  
يعدلان ف ي ا و ي ر فالخطوط الاربعة ي ر ي ف ي ح ي ك متساوية والدائرة  
المرسومة على المركز ي وعلى بعد احد هذه الخطوط تمر باطراف الآخر وهي تمس  
الاضلاع الاربعة ايضا لان الزوايا عند ر ف ح ك قائمات (ق ٢٤ ك ١) والخط  
العمودي على طرف القطر انا هو مماس (ق ١٦ ك ٢) فكل واحد من الخطوط  
الاربعة اب ب س س د د ا مماس الدائرة فقد رسمت الدائرة في المربع المفروض

### القضية التاسعة ع

علينا ان نرسم دائرة تحيط بمربع مفروض

ليكن اب س د المربع المفروض فعلينا ان نرسم دائرة تحيط به



ارسم اس ب د المتقاطعين في ي. فلان دا  
يعدل اب والخط اس مشترك بين المثلثين دا س  
ب ا س فالضلعان دا اس يعدلان ب ا اس  
والقاعدة دس تعدل القاعدة ب س فالزاوية دا س  
تعدل ب ا س (ق ٨ ك ١) فقد نصفت الزاوية دا ب

بالخط اس وهكذا يبرهن ان الزوايا اب س ب س د س د ا قد تنصفت  
بالخطين المستقيمين اس ب د. فلكون الزاوية دا ب تعدل اب س  
وي اب نصف دا ب وي ب ا نصف اب س فالزاوية ي اب تعدل ي ب ا  
والضلع ا ي يعدل الضلع ب ي (ق ٦ ك ١) وهكذا يبرهن ان ي س ي د يعدلان

اى اوبى فالخطوط الاربعة اى بى سى د متساوية والدائرة المرسومة على المركزى وعلى بعد احد هذه الخطوط عن باطراف الأخر ونحيط بالمربع ا ب س د

## القضية العاشرة: مع

علينا ان نرسم مثلثًا متساوي الساقين وكل واحدة من الزاويتين عند

## القاعدة مضاعف الزاوية الثالثة

افرض خطاً مستقيماً مثل اب واقسمه (ق ١١ ك ٢) في س الى قسمين حتى ان  
القائم الزوايا اب  $\times$  ب س يعدل مربع اس واجعل ا مركزاً و اب بعداً وارسم الدائرة  
ب د ي واجعل فيها (ق ١ ك ٤) النقط المستقيم ب د حتى يعدل اس الذي ليس

اطول من قطر الدائرة بـ  $\frac{1}{2}$  ارسم د

دس. وارم الدائرة اس د نخط بالمثلث

ادس (قه كء) فالثلث اب د هو

المطلوب اي كل واحدة من الزاويتين ا ب د

ادب مضاعف الزاوية ب ا د

لأن القائم الروايات  $a \times b$  بـ  $s$  يعدل

مربع اس واس بعدل ب د فالقائم الزوايا

اب × ب س بعدل مربع ب د. ولأنه قد رُسم الخط المستقيم ب س والخط

المستقيم ب د من النقطة ب خارج الدائرة اس د الواحد قاطع الدائرة والاخر

بلاقيها والقائم الزوايا  $\alpha$  ب س مسطح كل القاطع في الجزء منه الواقع خارج

الدائرة يعدل مربع  $b$  الذي يلاقي الدائرة  $a$  من دوائر  $b$  دماس  $a$  للدائرة

اسد (ق ٢٧ ك ٢) ولأن ب د ماس ودس قاطع من نقطة الماسة فالزاوية ب د س

(ق ٢٢ ك ٢) تعدل الزاوية داس في القطعة المتبادلة من الدائرة. اصف الى كل

واحدة منها الزاوية من د ا فكل الزاوية ب د ا تعدل الراويتين من د ا د اس .

ولكن الزاوية الخارجة ب س د (ق ٢٢ ك ١) تعدل الراويين س د ا س

فالزاوية ب د ا تعدل ب س د، ولكن ب د ا تعدل س ب د لان الساق ا د يعدل

الساق اب (ق ه ك ا) فالزاوية س ب د ا و د ب ا تعدل ب س د فالزاوية الثلاث



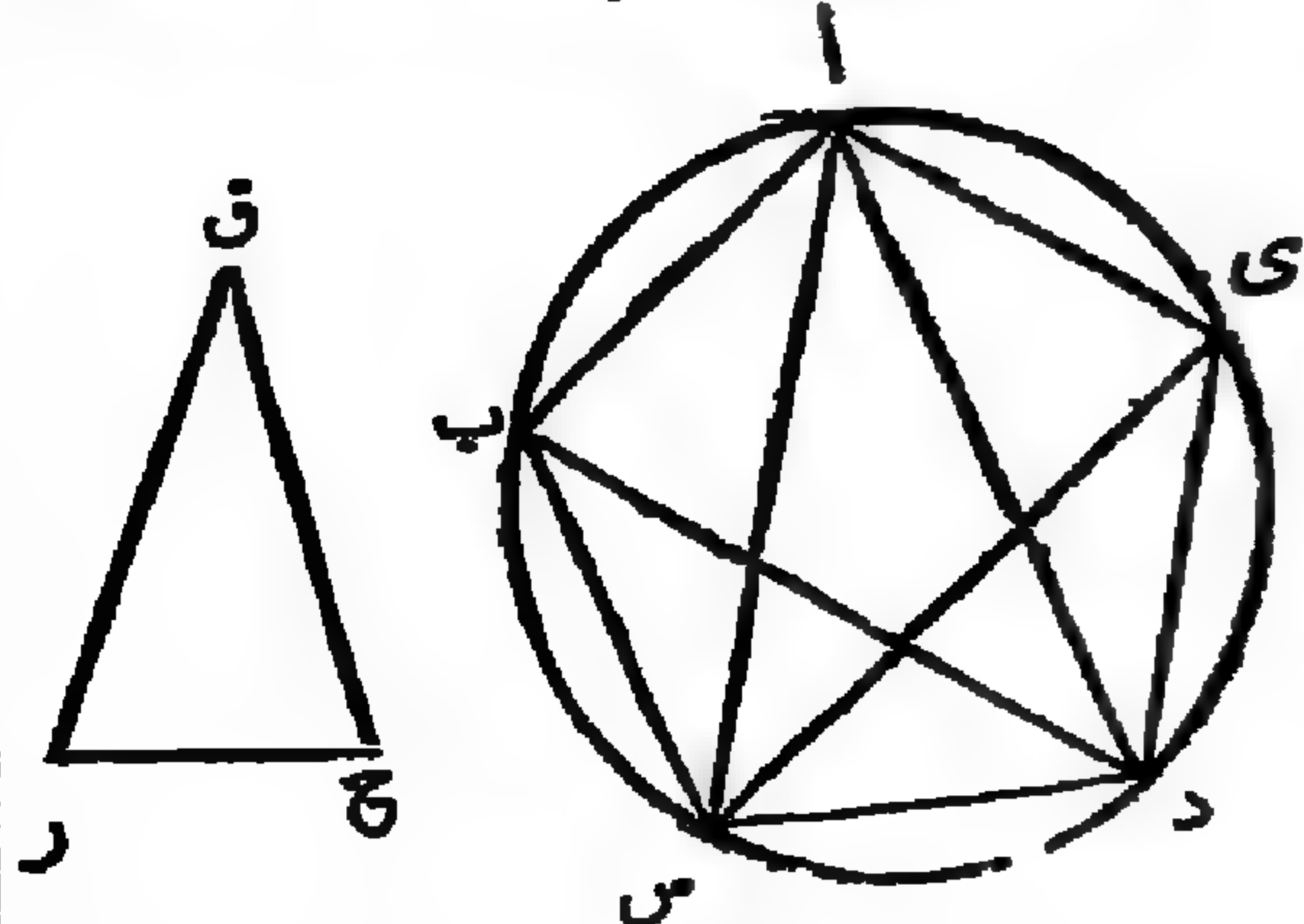
ب د ا د ب ا ب س د متساوية. ولأن الزاوية د ب س تعدل ب س د فالضلع  
ب د يعدل الضلع س د (ق ٦ ك ١) وب د يعدل ا س ولذلك س د يعدل ا س  
ايضاً والزاوية س د ا تعدل س ا د (ق ٥ ك ١) وس د ا س ا د معاً مضاعف  
س ا د. ولكن ب س د تعدل س د ا س ا د (ق ٢٢ ك ١) فالزاوية ب س د  
مضاعف س ا د. وب س د تعدل كل واحدة من الزاويتين ب د ا د ب ا فكل  
واحدة من هاتين مضاعف الزاوية ب ا د فقد رُسم مثلث متساوي الساقين وكل  
واحدة من الزاويتين عند القاعدة مضاعف الزاوية الثالثة

فرع أول. الزاوية ب ا د هي خمس قائمتين. لأن كل واحدة من ا ب د ا د ب  
مضاعف ب ا د فهما معاً تعدلان اربعة امثال ب ا د والثلاث زوايا معاً تعدل  
خمس امثال ب ا د والثلاث معاً تعدل قائمتين اي خمسة امثال ب ا د تعدل  
قائمتين او ب ا د تعدل خمس قائمتين

فرع ثانٍ. لأن ب ا د خمس قائمتين او عشر اربع قائمات فكل الزوايا في المركز  
ا تعدل معاً عشرة امثال ب ا د وتقبل الانقسام الى عشرة اقسام كل واحد يعدل  
ب ا د وهذه الزوايا العشر في المركز تقابلها عشرة اقواس متساوية فالقوس ب د هـ  
عشر المحيط والخط المستقيم ب د ا و ا س يعدل ضلعاً من ذي عشرة اضلاع مرسوم  
في الدائرة ب د ي

### القضية الحادية عشرة. ع

علينا ان نرسم شكلاً قياسياً ذا خمسة اضلاع في دائرة مفروضة  
لتكن ا ب س د ي الدائرة المفروضة. فعلينا ان نرسم فيها شكلاً قياسياً ذا



خمس اضلاع. ا رسم مثلثاً متساوي  
الساقين ق ر س له كل واحدة من  
الزاويتين عند القاعدة ا ب س عد ر  
وح مضاعف الزاوية عند ق (ق ١٠  
ك ٤) وفي الدائرة ا ب س د ي ا رسم  
المثلث المتساوي الساقين ا س د

زوايا تماثل زوايا المثلث ق ر ح (ق ٢ ك ٤) أي الزاوية س ا د تماثل الزاوية عند ق  
والزاوية ا س د تماثل الزاوية عند ر و ا د س تماثل الزاوية عند ح. فكل واحدة من  
الزاويتين ا س د ا د س هي مضاعف س ا د نصفها بالخطين المستقيمين س ي د ث  
(ق ٩ ك ١) وارسم ا ب ب س ا ي د فالشكل ا ب س د ي هو الشكل  
المطلوب ذو خمسة اضلاع قياسي

بما ان كل واحدة من الزاويتين ا س د ا د س مضاعف س ا د وقد تنصفتنا  
بالخطين المستقيمين د ب س ي فالزوايا الخمس د ا س ا س ي ي س د س د ب  
ب د ا متساوية. والزوايا المتساوية تقابلها اقواس متساوية (ق ٢٦ ك ٢) فالاقواس  
الخمس ا ب ب س س د د ي ا متساوية. والاقواس المتساوية تقابلها خطوط  
متساوية (ق ٢٩ ك ٢) فالخطوط ا ب ب س س د د ي ا متساوية والشكل  
ا ب س د ي ذو خمسة اضلاع متساوية. وهو ايضا متساوي الزوايا لان القوس ا ب  
يعدل القوس د ي. فاذا اُضيف اليها ب س د فالكل ا ب س د يعدل الكل  
ي د س ب. والزاوية ا ي د واقفة على القوس ا ب س د والزاوية ب ا ي على  
القوس ي د س ب. فالزاوية ب ا ي تعدل الزاوية ا ي د (ق ٢٧ ك ٢) وهكذا  
يبرهن ان الزوايا ا ب س ب س د س د ي تعدل ب ا ي ا و ا ي د فالشكل  
ا ب س د ي متساوي الزوايا وقد تبرهن انه متساوي الاضلاع فهو ذو خمسة اضلاع  
قياسي وقد رُسم في الدائرة المفروضة

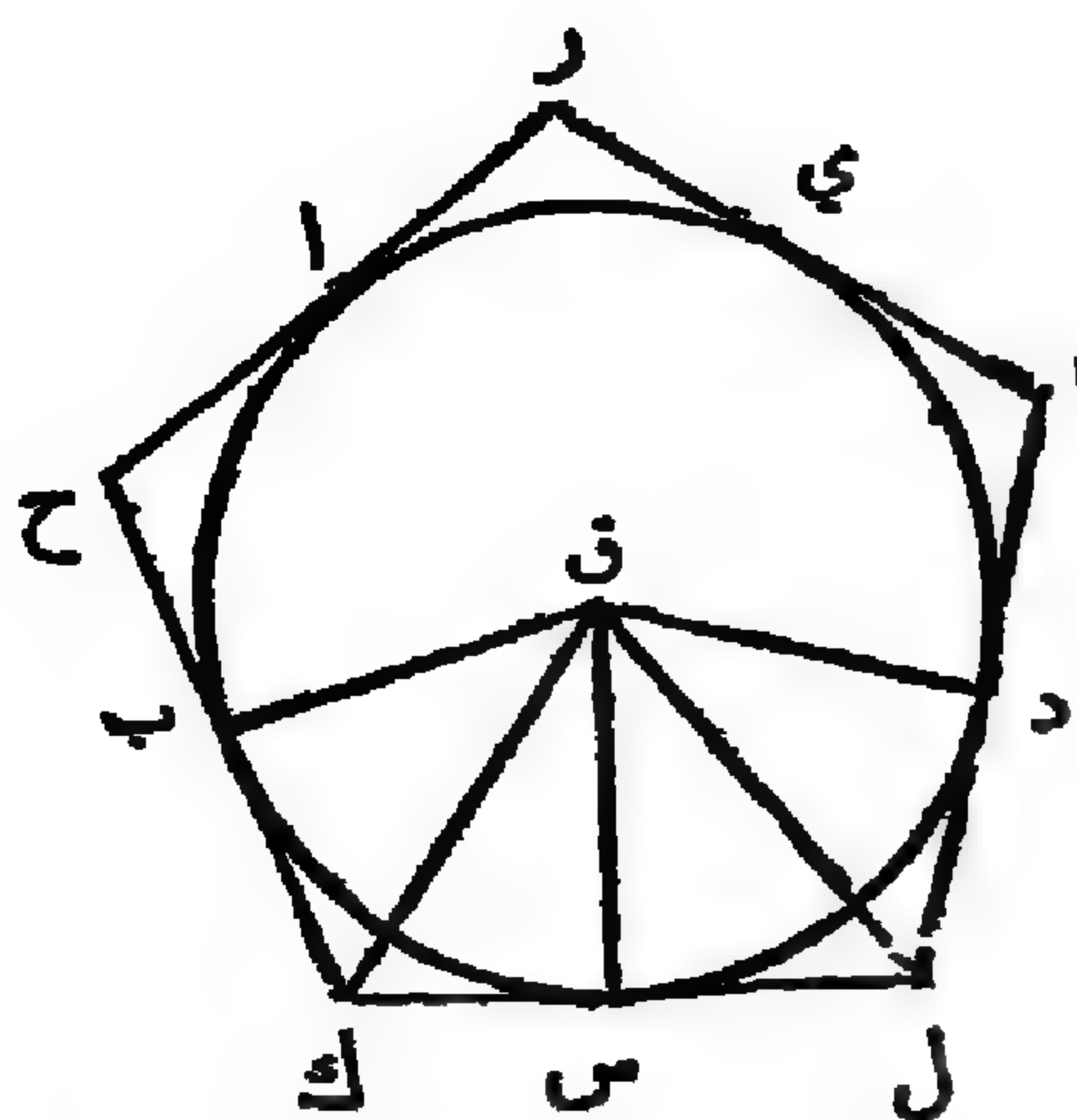
طريقة اخرى. اقسم نصف قطر الدائرة المفروضة حتى ان القائم الزوايا مسطح  
كل الخط في احد القسمين يعدل مربع القسم الاخر (ق ١١ ك ٢) وارسم خطاً  
يعدل اكبر القسمين على جانبي نقطة مفروضة في الدائرة المفروضة فكل واحد منها  
يقطع قوساً عشر المحيط (فرع ٢ ق ١٠ ك ٤) فالقوسان معاً خمس المحيط ووتره ضلع  
شكل ذي خمسة اضلاع قياسي في الدائرة

### القضية الثانية عشرة. مع

علينا ان نرسم شكلاً قياسياً ذا خمسة اضلاع محيطاً بدائرة مفروضة  
لتكن ا ب س د الدائرة المفروضة. علينا نرسم شكلاً قياسياً ذا خمسة اضلاع



يحيط بها



لتكن زوايا شكل قياسي ذي خمسة  
اضلاع في الدائرة في النقط ا ب س د ي  
فالاقياس اب ب س س د د ي متساوية  
(ق ١١ ك ٤) وفي النقط ا ب س د ي  
ارسم المخطوط رح ح ك كل ل م م ر  
حتى تمس الدائرة (ق ١٢ ك ٢) استعلم المركز  
ق وارسم ق ب ق ك ق س ق ل ق د

فبان الخط المستقيم كل بمس الدائرة اب س د ي في النقطة س التي  
رسم اليها ق س من المركز فالخط ق س عمود على كل (ق ١٨ ك ٣) والزوايتان  
عند س قائمتان. وهكذا يبرهن ايضا ان الزوايا عند ب ود قائمتان. ولكون  
ق س ك قائمة فمربع ق ك يعدل مجتمع مربعي ق س س ك (ق ٤٧ ك ١)  
ولكون ق ب ك قائمة فمربع ق ك يعدل مربعي ق ب ب ك فمربع ق س س ك  
يعدلان مربعي ق ب ب ك. ومربع ق س يعدل مربع ق ب فالباقى مربع س ك  
يعدل الباقي مربع ب ك والخط س ك يعدل الخط ب ك. وبما ان ق س  
يعدل ق ب وق ك مشترك بين المثلثين ق س ك ق ب ك فالضلعان ب ق  
ق ك يعدلان الضلعين س ق ق ك والقاعدة س ك تعدل القاعدة ب ك. فالزاوية  
ب ق ك تعدل الزاوية س ق ك (ق ٨ ك ١) وب ك ق تعدل س ك ق. فصعل  
الزاوية ب ق س هي مضاعف ك ق س وب ك س مضاعف ق ك س. وهكذا  
يبرهن ان الزاوية س ق د مضاعف س ق ل وس ل د مضاعف س ل ق.  
ولكون القوس ب س يعدل القوس س د فالزاوية ب ق س تعدل س ق د  
(ق ٢٧ ك ٢) وب ق س مضاعف ك ق س وس ق د مضاعف س ق ل فالزاوية  
ك ق س تعدل س ق ل. والقائمة ق س ك تعدل القائمة ق س ل فالمثلثان  
ق ك س ق ل س لهما زاويتان من الواحد تعدلان زاويتين من الآخر والضلع  
ق س مشترك بينهما فالمثلثان متساويان (ق ٢٦ ك ١) والضلع ك س يعدل الضلع  
س ل والزاوية ق ك س تعدل ق ل س. ولكون ك س يعدل س ل فالخط  
كل مضاعف ك س. وهكذا يبرهن ان ح ك مضاعف ب ك. ولكن ب ك

يعدل ك س كما قد تهرن سابقاً فالخط ك ل يعدل ح ك (أولية ٦) وهكذا يهرن  
ان ر ح ر م ل تعدل ح ك او ك ل . فالشكل ر ح ك ل م ذو خمسة اضلاع  
متساوية وزواياه متساوية ايضاً لان الزاوية ق ك س تعدل ق ل س وح ك س  
مضاعف ق ك س وك ل م مضاعف ق ل س كما تقدم برهانه فالزاوية ح ك ل  
تعدل ك ل م . وهكذا يهرن ان ل م ر م ر ح ك ل تعدل ح ك ل او ك ل م .  
فالزوايا الخمس متساوية وقد تهرن ان الشكل متساوي الاضلاع فهو ذو خمسة  
اضلاع قياسي محيط بالدائرة المفروضة

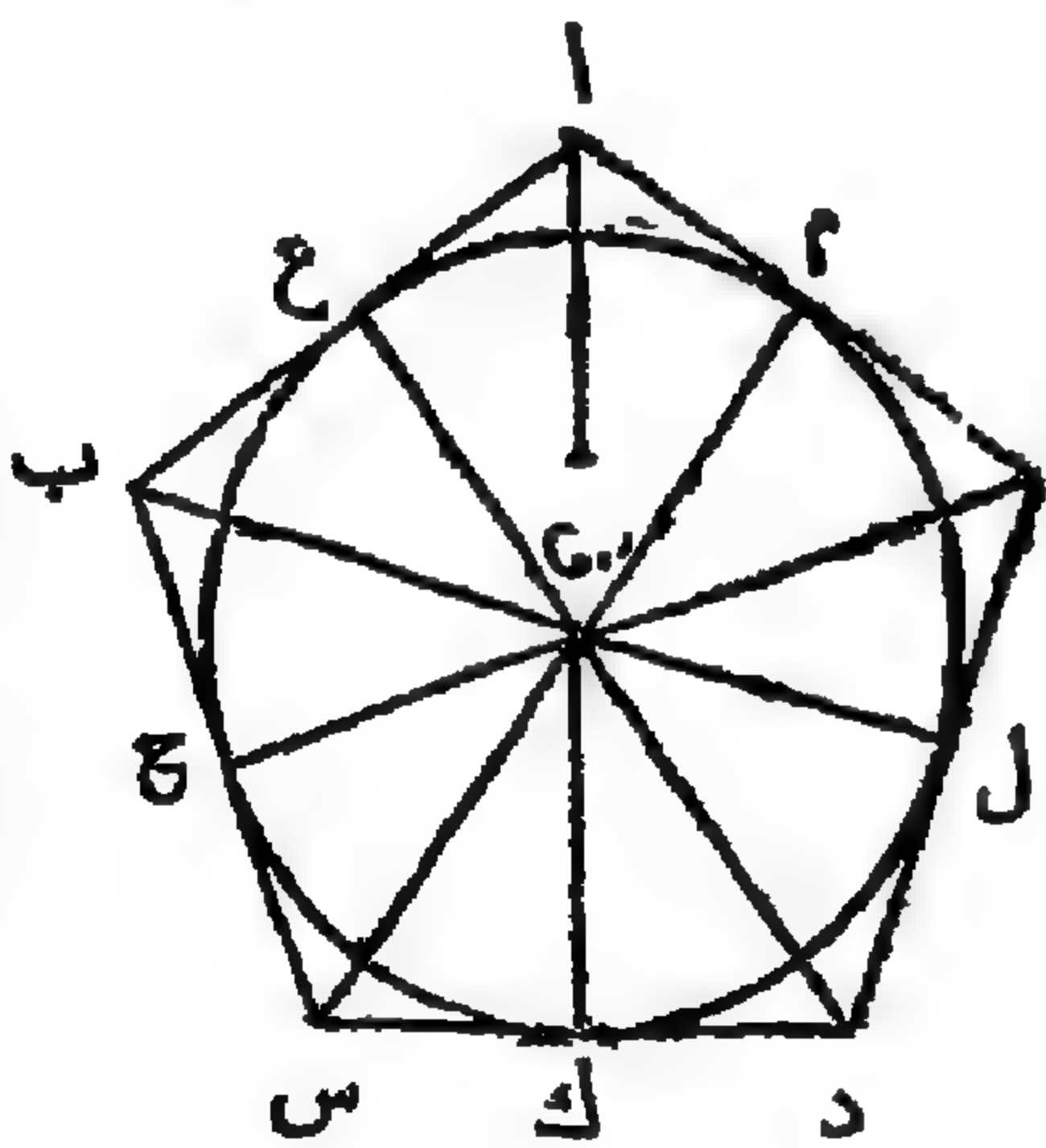
### القضية الثالثة عشرة . ع

علينا ان نرسم دائرة في شكل قياسي مفروض ذي خمسة اضلاع

ليكن ا ب س د ي الشكل المفروض . علينا ان نرسم فيه دائرة

نصف الزاويتين ب س د س د ي بالخطين المستقيمين س ق د ق . ومن

ق نقطة التقاءهما ارسم الخطوط المستقيمة ق ب ق ا ق ي . فليكون ب س يعدل



س د وق س مشترك بين المثلثين

ب س ق د س ق فالضلعان ب س

س ق يعدلان الضلعين د س س ق ي

والزاوية ب س ق تعدل الزاوية د س ق .

فالقاعدة ب ق تعدل القاعدة ق د (ق ٤

ك ١) وبقيّة الزوايا من الواحد تعدل بقيّة

الزوايا من الآخر فالزاوية س ب ق تعدل

س د ق . ولان س د ي مضاعف س د ق وس د ي تعدل س ب ا وس د ق تعدل

س ب ق فالزاوية س ب ا مضاعف س ب ق فالزاوية ا ب ق تعدل س ب ق

فالزاوية ا ب س قد تنصفت بالخط المستقيم ب ق . وهكذا يهرن ان ب ا ي ا د

تنصفتا بالخطين المستقيمين ا ق ي ق

ثم من النقطة ق (ق ١٢ ك ١) ارسم ق غ ق ح ق ك ق ل ق م عمودية

على الخطوط المستقيمة ا ب ب س س د د ي ا . فمن حيث ان الزاوية

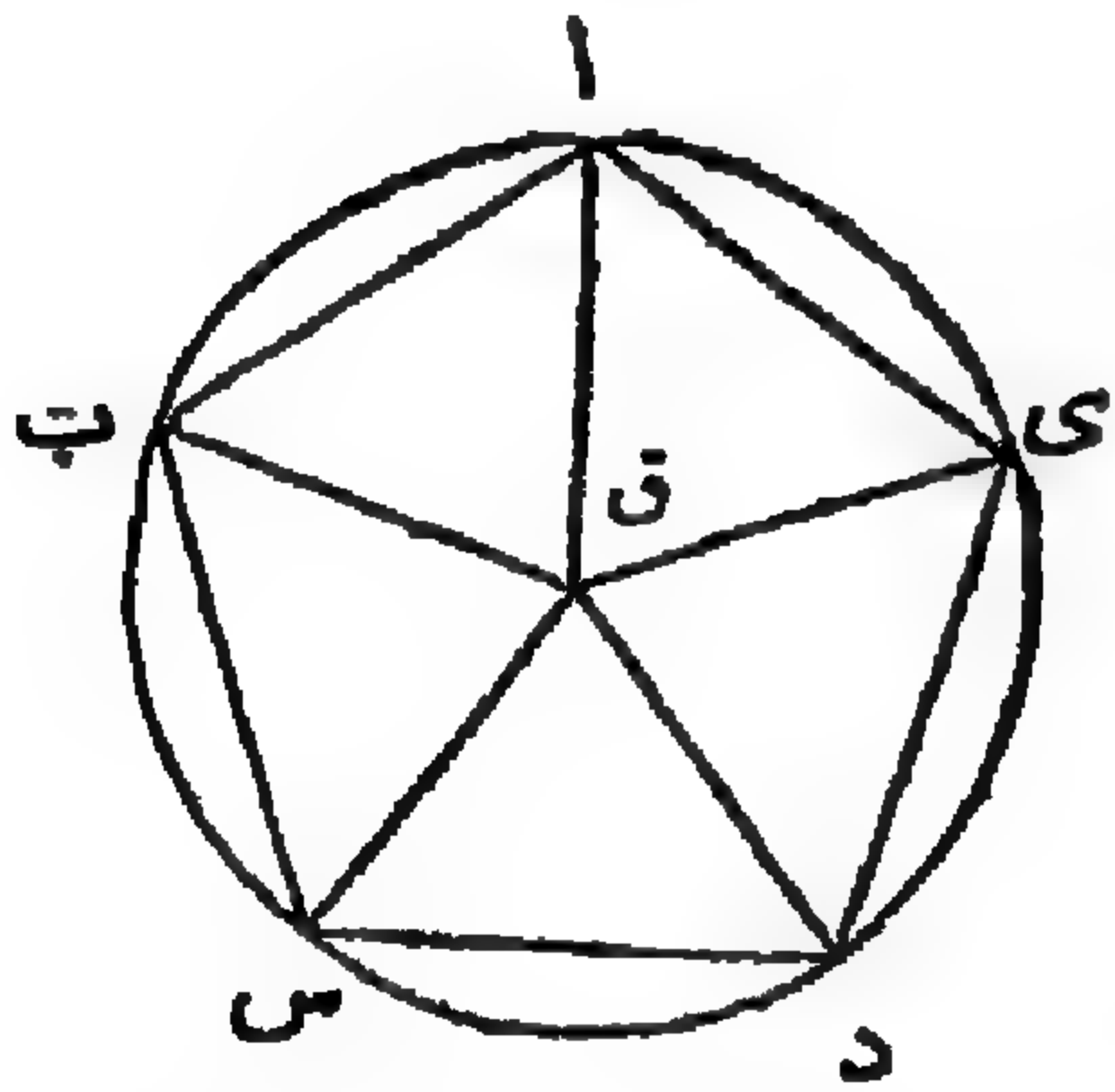
ح س ق تعدل ك س ق والقائمة ق ح س تعدل القائمة ق ك س والضلع ق س



مشارك بين المثلثين فالضلع الثالث ق ح يعدل الثالث ق ك (ق ٢٦ ك ١) وهكذا  
يبرهن ان ق ل ق م ق غ تعدل ق ح ا و ق ك فالخطوط الخمسة المذكورة متساوية.  
فالدائرة المرسومة على المركز ق وعلى بعد احد هذه الخطوط تمر باطراف الأخر  
وتمس الخطوط الخمسة ا ب ب س س د د ي ي ا. ومن حيث ان الزوايا عند  
التقاطع ح ك ل م قائمات فالخطوط الخمسة ا ب ب س س د د ي ي ا  
هي عمودية على اطراف اصاف الاقطار فهي مماسات (فرع ١ ق ١٦ ك ٢) فقد رُسِمَت  
الدائرة في الشكل المفروض

### القضية الرابعة عشرة. ع

علينا ان نرسم دائرة تحيط بشكل قياسي مفروض ذي خمسة اضلاع  
ليكن ا ب س د ي شكلاً مفروضاً قياسياً ذا خمسة اضلاع. فعلياً ان نرسم دائرة  
تحيط به



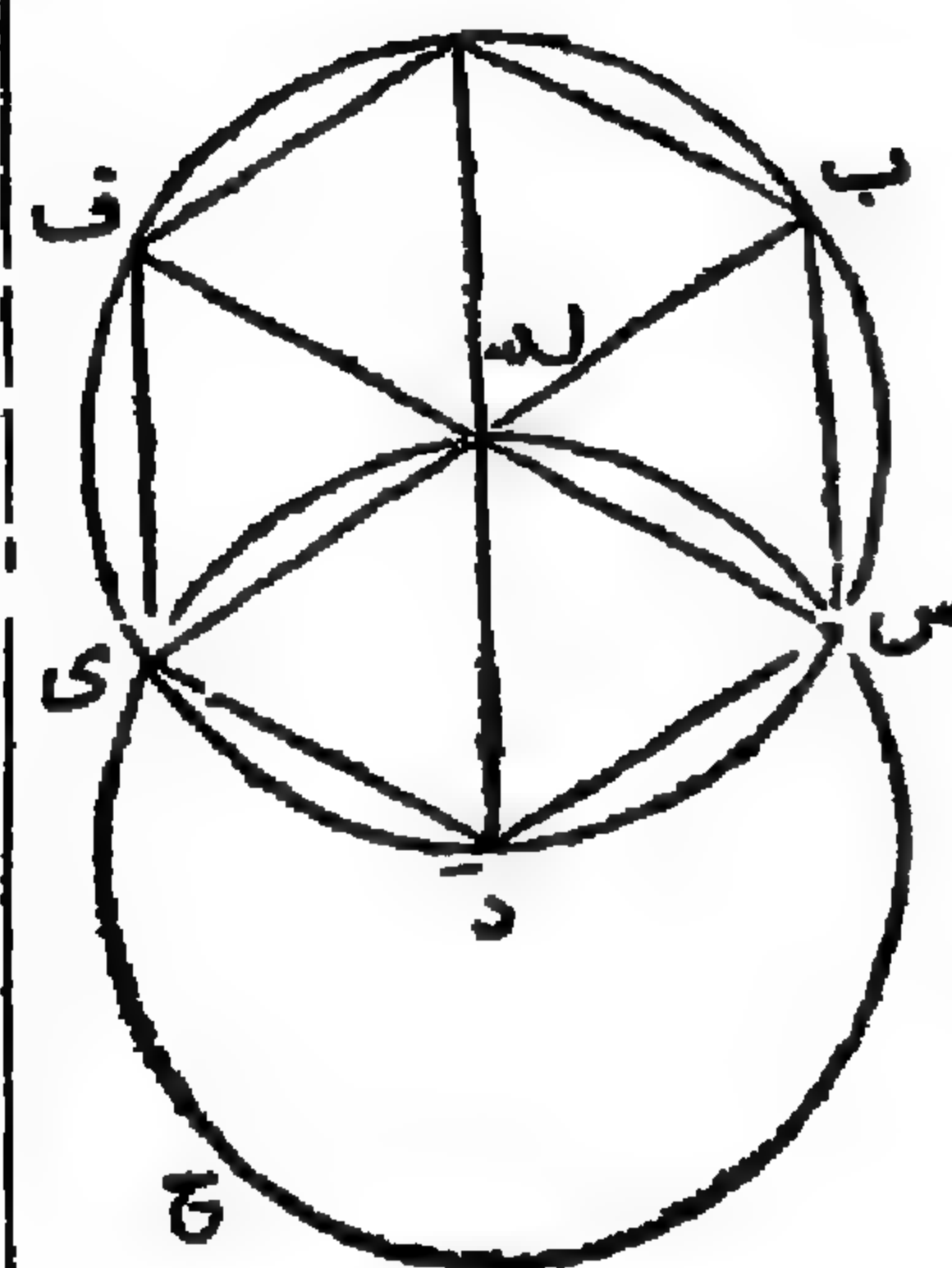
نصف الزاوية ب س د بالخط المستقيم  
س ق والزاوية س د ي بالخط المستقيم د ق  
(ق ٩ ك ١) ومن ق نقطة التقاء ا رسم الخطوط  
المستقيمة ق ب ق ا ق ي الى القطب و ا و ي.  
فيبرهن كما في القضية السابقة ان الزوايا س ب ا  
ب ا ي ا ي د قد تنصفت بالخطوط المستقيمة

ق ب ق ا ق ي. ومن حيث ان الزاوية ب س د تعدل س د ي والزاوية  
ق س د انما هي نصف ب س د وس د ق نصف س د ي فالزاوية ق س د تعدل  
س د ق فالضلع ق س يعدل الضلع ق د (ق ٦ ك ١) وهكذا يبرهن ان ق ب  
ق ا ق ي تعدل ق س ا و ق د فهذه الخطوط الخمسة المستقيمة متساوية واذا جعلت  
النقطة ق مركزاً واحد هذه الخطوط بعداً ورُسِمَت دائرة فمحيطها يمر باطراف الأخر  
وهي تحيط بالشكل القياسي ذي الخمسة الاضلاع ا ب س د ي

# القضية الخامسة عشرة. ع

علينا ان نرسم شكلاً قياسياً اذا ستة اضلاع في دائرة مفروضة  
لتكن ا ب س د ي ف الدائرة المفروضة. فعلياً ان نرسم فيها شكلاً قياسياً ذا  
ستة اضلاع

استعلم المركز غ وارسم القطر ا غ د واجعل د مركزاً ود غ بعداً وارسم الدائرة  
ي غ س ح. ارسم الخط ي غ والخط غ س وأخرجها الى ب وف. ثم ارسم الخطوط  
المستقيمة ا ب ب س س د د ي ي ف ف ا.



فالشكل ذو الستة الاضلاع ا ب س د ي ف هو  
قياسي اي اضلاعه وزواياه متساوية

من حيث ان النقطة غ هي مركز الدائرة  
ا ب س د ف فالخط غ ي يعدل الخط غ د. ولأن  
د مركز الدائرة غ س ح ي فالخط د ي يعدل د غ.  
فالخط غ ي يعدل ي د ولثلاث ي غ د هـ  
متساوي الاضلاع وزواياه الثلاث متساوية (فرع

ق ٥ ك ١) وزوايا كل مثلث تعدل قائمتين (ق ٢٢ ك ١) فالزاوية ي غ د هي ثلث  
قائمتين. وهكذا يبرهن ان الزاوية د غ س ثلث قائمتين. ومن حيث ان الخط المستقيم  
ي غ س احدث مع ي ب الزاويتين المتوالييتين ي غ س س غ ب حتى تعدلا قائمتين  
(ق ١٢ ك ١) فالزاوية س غ ب تعدل ثلث قائمتين. فالزوايا الثلاث ي غ د  
د غ س س غ ب متساوية. والزوايا المتقابلة ب غ ا غ ف ف غ ي (ق ١٥  
ك ١) متساوية ايضاً. فالزوايا الست ي غ د د غ س س غ ب ب غ ا غ ف  
ف غ ي متساوية. والزوايا المتساوية في المركز تقابلها اقواس متساوية (ق ٢٦ ك ٢)  
والاقواس المتساوية تقابلها خطوط مستقيمة متساوية (ق ٢٩ ك ١) فالخطوط الستة  
ا ب ب س س د د ي ي ف ف ا متساوية. والشكل ذو الاضلاع الستة  
ا ب س د ي ف متساوي الاضلاع. وهو متساوي الزوايا ايضاً. لأن القوس ا ف  
يعدل القوس ي د فاذا اُضيف الى كل واحد منها القوس ا ب س د ف لكل ف  
ا ب س د يعدل الكل ي د س ب ا. والزاوية ف ي د هي على القوس ف ا ب س د.

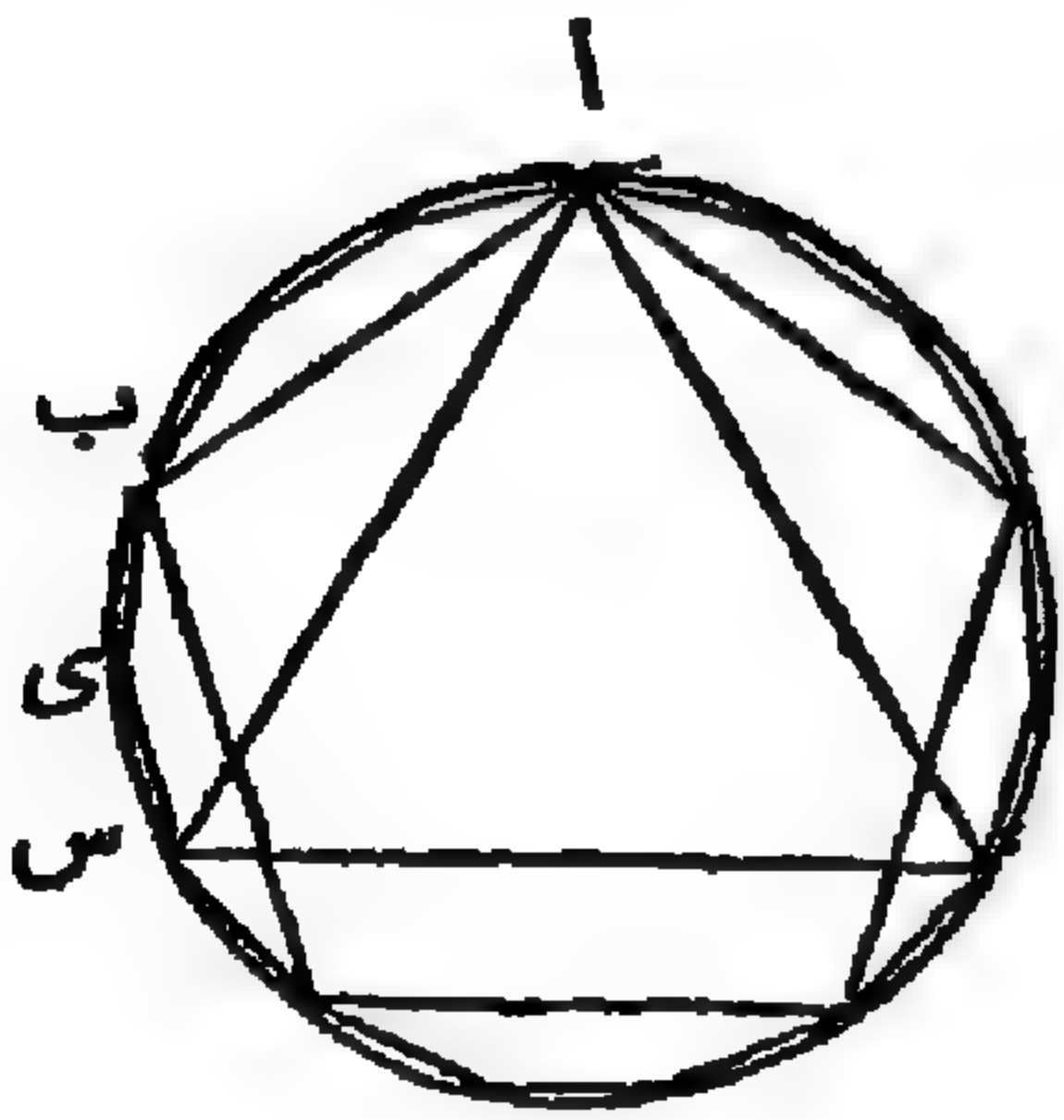


والزاوية ا ف ي هي على القوس ي د س ب ا فالزاوية ا ف ي تعدل الزاوية ف ي د  
وهكذا يبرهن في بقية زوايا الشكل انها تعدل ا ف ي او ف ي د فالشكل ا ب س  
د ي ف متساوي الزوايا. وقد تبرهن انه متساوي الاضلاع فهو قياسي وقد رُسم في  
الدائرة المفروضة ا ب س د ي ف

فرع. ضلع شكل ذي ستة اضلاع قياسي في دائرة يعدل نصف قطر الدائرة.  
واذا رُسم خطوط مستقيمة تمس الدائرة في النقط ا ب س د ي ف يحدث شكل  
قياسي ذو ستة اضلاع محيط بالدائرة وعلى هذا الاسلوب تُرسم دائرة في شكل قياسي  
مفروض ذي ستة اضلاع او محيطه به حسبما تقدم في ذي خمسة اضلاع

### القضية السادسة عشرة مع

علينا ان نرسم شكلاً قياسياً ذا خمسة عشر ضلعاً في دائرة مفروضة  
لتكن ا ب س د الدائرة المفروضة. فعلياً ان نرسم فيها شكلاً قياسياً ذا خمسة  
عشر ضلعاً



ليكن ا س ضلع مثلث متساوي الاضلاع  
في الدائرة (ق ٢ ك ٤) و ا ب ضلع شكل قياسي  
ذي خمسة اضلاع في الدائرة (ق ١١ ك ٤). ف  
فالقوس ا ب س هو ثلث المحيط او  $\frac{1}{3}$  من  
المحيط والقوس ا ب هو خمس المحيط اي  $\frac{2}{5}$   
من المحيط فالقوس ب س فضلتهما وهو  $\frac{1}{5}$

من المحيط. نصِّف ب س في ي (ق ٢٠ ك ٢) فكل واحد من ب ي ي س هو  
 $\frac{1}{10}$  من المحيط فاذا رُسم الخطان المستقيمان ب ي ي س ووضع امثالهما في دائرة  
المحيط (ق ١ ك ٤) يحدث شكل قياسي ذو خمسة عشر ضلعاً في الدائرة

اذا رُسم خطوط مستقيمة تمس الدائرة في زوايا الشكل المذكور يحدث شكل قياسي  
ذو خمسة عشر ضلعاً محيط بالدائرة. وعلى هذا الاسلوب ايضاً حسبما تقدم في شكل ذي  
خمسة اضلاع تُرسم دائرة في شكل قياسي مفروض ذي خمسة عشر ضلعاً او محيطه به

## تعليقة

اذا رُسم في دائرة شكل قياسي ذو اضلاع كثيرة وتنصفت الاقواس التي تقابل  
 اضلاعه فيحدث شكل قياسي عدد اضلاعه مضاعف عدد اضلاع الاول. وهكذا  
 من المربع في دائرة تحدث اشكال ذات ثمانية اضلاع او ستة عشر ضلعاً او ٢٢  
 ضلعاً او ٦٤ ضلعاً الى اخره. ومن ذي ستة اضلاع في دائرة يحدث شكل ذو ١٢  
 او ٢٤ او ٤٨ او ٩٦ ضلعاً الى اخره. ومن ذي عشرة اضلاع يحدث  
 شكل ذو ٢٠ او ٤٠ او ٨٠ ضلعاً الى اخره. ومن  
 ذي خمسة عشر ضلعاً يحدث شكل ذو ٣٠  
 او ٦٠ ضلعاً الى اخره. ولكن الى  
 الآن لم توجد طريقة لرسم  
 شكل قياسي ذي  
 سبعة اضلاع  
 في دائرة



# اصول الهندسة

## الكتاب الخامس

### حدود

١ المقدار هو ما كان له واحد أو أكثر من ثلاثة اشياء وهي طول وعرض وعمق فاذا فرض مقداران اكبر واصغر وكان الاصغر قياسا تاما للاكبر اي وجد فيه مرارا معلومة بدون باقي فالاصغر جزء الاكبر

٢ اذا كان اصغر مقدارين قياسا تاما لأكبرها فالأكبر مضروب الاصغر

٣ التناسب هو التفاوت بين مقدارين من جنس واحد باعتبار الكمية

٤ المقادير هي من جنس واحد متى امكن زيادة الاصغر حتى يزيد عن الاكبر

والتناسب لا يقع الا بين المقادير المتجانسة

٥ اذا فرض اربعة مقادير وضرب الاول والثالث مرارا ما وضرب الثاني والرابع مرارا ما فاذا عدل الثالث الرابع عندما عدل الاول الثاني او كان اكبر منه عندما كان الاول اكبر من الثاني او اصغر منه عندما كانت الاول اصغر من الثاني فيقال ان نسبة الاول الى الثاني كنسبة الثالث الى الرابع

٦ المقادير المتناسبة هي التي كان تناسب الاول الى الثاني مثل تناسب الثالث الى الرابع وتناسب الثالث الى الرابع مثل تناسب الخامس الى السادس وهم جزا منها تعددت المقادير فاذا كانت المقادير الاربعة ا ب س د متناسبة يقال ان نسبة الف الى باء كنسبة سين الى دال وتكتب هكذا ا : ب :: س : د او ا : ب = س : د

٧ اذا فرض اربعة مقادير كما في الحد الخامس وقاس الاول الثاني مرارا اكثر مما يقاس الثالث الرابع يقال ان تناسب الاول الى الثاني هو اعظم من تناسب

الثالث الى الرابع وان تناسب الثالث الى الرابع هو اصغر من تناسب الاول الى الثاني  
 ٨ متى تعددت المقادير وكان تناسب الاول الى الثاني يماثل تناسب الثاني  
 الى الثالث وتناسب الثاني الى الثالث يماثل تناسب الثالث الى الرابع وهلم جرا  
 يقال انها على نسبة متصلة

٩ متى كان ثلاثة مقادير على نسبة متصلة يقال ان الثاني متناسب متوسط  
 بين الآخرين

١٠ اذا تعددت المقادير المتجانسة كما في الحد الثامن يقال ان تناسب الاول  
 الى الاخير هو مركب من تناسب الاول الى الثاني مع تناسب الثاني الى الثالث مع  
 تناسب الثالث الى الرابع وهلم جرا الى الاخير

فلو فرض اربعة مقادير ا ب س د يقال ان تناسب ا الى د هو  
 مركب من تناسب ا الى ب مع تناسب ب الى س مع تناسب س الى د ولذا فرض  
 ا:ب::ب:س::س:د::د:ا فتناسب ا الى د هو  
 مركب من تناسب ا الى ب مع ب الى س مع س الى د او من تناسبات تعدل  
 المذكورة كتناسب ا الى ب وب الى س وس الى د وك الى ا

وهكذا اذا فرض بين م ون التناسب الواقع بين ا ود فلاجل الاختصار  
 يقال ان التناسب بين م ون هو مركب من التناسبات التي تركب منها التناسب  
 بين ا ود اي من تناسب ا الى ب وب الى س وس الى د وك الى ا

١١ متى كانت ثلاثة مقادير على نسبة متصلة يقال ان تناسب الاول الى  
 الثالث هو مضاعف تناسب الاول الى الثاني فاذا فرض ا:ب::ب:س  
 فتناسب ا الى س هو مضاعف تناسب ا الى ب وحسب الحد السابق تناسب ا الى  
 س هو مركب من تناسب ا الى ب وب الى س فالتناسب المركب من تناسبتين  
 متماثلتين هو مضاعف كل منهما

١٢ متى كان اربعة مقادير على نسبة متصلة يقال ان تناسب الاول الى  
 الرابع هو ثلاثة امثال تناسب الاول الى الثاني او الثالث الى الرابع واذا كان  
 خمسة مقادير على نسبة متصلة يقال ان تناسب الاول الى الخامس هو اربعة امثال  
 تناسب الاول الى الثاني او الثاني الى الثالث وهلم جرا الى النهاية فالتناسب  
 المركب من ثلاث تناسبات متماثلة هو ثلاثة امثال كل منها والمركب من اربع تناسبات



هو اربعة امثال كل منها وهم جراً

١٢ في اربع متناسبات تسمى الاولى والثالثة السابقتين والثانية والرابعة

التاليين. والسابق مع تالييهما المتناسبان والسابقان معاً والتاليان معاًها المتشابهان

١٤ التبادل في اربعة مقادير متناسبة هو ان يكون الاول الى الثالث

كالثاني الى الرابع (ق ١٦ ك هـ)

١٥ القلب في اربعة مقادير متناسبة هو ان يكون الثاني الى الاول كالرابع

الى الثالث (قضية الف ك هـ)

١٦ التركيب هو متى كان اربعة مقادير متناسبة وكان الاول مع الثاني الى

الثاني كالثالث مع الرابع الى الرابع (ق ١٨ ك هـ)

١٧ القسمة هي متى كان اربعة مقادير متناسبة وكانت زيادة الاول عن الثاني

الى الثاني كزيادة الثالث عن الرابع الى الرابع (ق ١٧ ك هـ)

١٨ الطرح هو متى كان اربعة مقادير متناسبة وكان الاول الى زيادته عن

الثاني كالثالث الى زيادته عن الرابع (ق د ك هـ)

## اوليات

١ اذا ضرب مقادير متساوية في كميات متساوية تبقى متساوية

٢ المقادير التي تقيس مقادير متساوية مراراً متساوية هي متساوية

٣ مضروب لمقدار اعظم هو اعظم من ذات هذا المضروب لمقدار اصغر

٤ اذا كان مضروب لمقدار اعظم من ذات هذا المضروب لمقدار آخر فالباق

الاول اعظم من الثاني

## القضية الاولى

اذا فرضت عدة مقادير قابلة للانقسام على عدة اخرى من المقادير

مراراً معلومة كل واحد على نظيره فحسباً يتعدد كل من المتسومات

عليها في مقسومه هكذا يتعدد مجتمع المقسومات عليها في مجتمع المقاسم  
(انظر كتاب علم الجبر ع<sup>١٢٦</sup>)

لنفرض المقادير ا وب وس قابلة الانقسام مراراً معلومة على المقادير د وى وف  
كل واحد على نظيره فالجميع د + وى + ف يتعدد في الجميع ا + ب + س كما يتعدد  
د في ا

لنفرض ان د يتعدد في ا ثلاث مرات وهكذا وى في ب وف في س

فلكون ا بعدد د ثلاث مرات لنا

$$ا = د + د + د$$

$$ب = وى + وى + وى$$

$$س = ف + ف + ف$$

وبإضافة اشيء متساوية الى اشيء متساوية (اولية ا ك ا) ا + ب + س يعدل  
د + وى + ف ثلاث مرات وهكذا لو تعددت د وى وف في ا وب وس أكثر او  
اقل من ثلاث مرات

فرع. اذا فرضنا م عدداً ما كان م د + وى + ف = م (د + وى + ف) لان  
م د م وى م ف هي تعداد د وى ف مراراً تماثل م فجميعها يتعدد ايضاً مراراً تماثل م

### القضية الثانية. ن

اذا ضرب مقدار في عدد ما وضيف الى الحاصل المقدار ذاته مضروباً  
في عدد آخر فالجميع بعد ذلك المقدار مراراً تماثل الاحاد في مجتمع  
المضروبين فيها. (انظر كتاب الجبر ع<sup>١٨٧</sup>)

لنفرض ا = م س وب = ن س فيثبت ا + ب = (م + ن) س  
لان ا = م س لنا ا = س + س + س الخ م مرة وايضاً ب = س + س + س  
س الخ ن مرة. فبإضافة اشيء متساوية الى اشيء متساوية ا + ب = س متعددة م +  
ن مرة اي ا + ب = (م + ن) س اي ا + ب بعدد س مراراً تماثل الاحاد في م + ن  
فرع أول. هكذا تعددت المضارب. فلو فرض ا = م وى وب = ن وى

$$وس = وى لنا ا + ب = س (م + ن) - وى$$



فرع ثانٍ. وهكذا من حيث ان  $a + b + s = (m + n + f) y$  وقد فرض  
 $a = m y$  و  $b = n y$  و  $s = f y$  لنا  $m y + n y + f y = (m + n + f) y$

### القضية الثالثة. ن

اذا فرض ثلاثة مقادير ونعدّد الثاني في الاول مراراً تماثل الاحاد في  
 عددٍ ما وتعدد الثالث في الثاني مراراً تماثل الاحاد في عددٍ ما  
 فالثالث يتعدد في الاول مراراً تماثل الاحاد في حاصل هذين  
 العددين. (انظر كتاب الجبر ع<sup>١٨٢</sup>)

لتفرض  $a = m b$  و  $b = n s$  فحينئذٍ  $a = m n s$   
 لانه حسب المفروض  $b = n s$  فلذلك  $m b = m n s$  و  $a = m n s$  و  $a = m n s$  مرة  
 ون  $s + n s + a = m n s + n s + a$  في  $n + n + a = m n s$  (فرع ثانٍ ق ٢ ك ه)  
 ون مضافة الى ذاتها  $m$  مرة يعدل  $n$  في  $m$  اي  $m n$  فاذا  $n s + n s + a = m n s$  و  $a = m n s$  مرة  
 يعدل  $m n s$  فاذا  $m b = m n s$  وقد فرض  $a = m b$  فاذا  $a = m n s$

### القضية الرابعة. ن

اذا فرض اربعة مقادير متناسبة اى نسبة الاول الى الثاني كنسبة  
 الثالث الى الرابع وضرب الاول والثالث في عدد ما وضرب الثاني  
 والرابع في عدد ما فتكون نسبة مضروب الاول الى مضروب الثاني  
 كنسبة مضروب الثالث الى مضروب الرابع (انظر كتاب الجبر ع<sup>١٨٢</sup>)  
 لتفرض  $a : b :: s : d$  وليكن  $m$  ون عدد بين فحينئذٍ  $a : n b :: m s : n d$   
 ليتعدّد  $m$  و  $m$  مراراً تعدل الاحاد في  $f$  وليتعدّد  $n$  و  $n$  مراراً تعدل  
 الاحاد في  $q$  فلما (ق ٢ ك ه)  $f m a$  و  $s m$  وايضاً  $n b$  و  $q n d$  فلكون  
 $a : b :: s : d$  حسب المفروض وقد أخذ مضروبان متساويان من الاول والثالث

اي ف م ا ف م س ومن الثاني والرابع اي ق ن ب ق ن د. فاذا كان ف م ا اكبر  
من ق ن ب يكون ف م س اكبر من ق ن د (حده ك ه) فاذا كان ف م ا ق ن ب  
متساويين يكون ف م س ق ن د متساويين واذا كان ف م ا اصغر من ق ن ب  
يكون ف م س اصغر من ق ن د. ولكن ف م ا ف م س تعنان م ا م س مراراً  
متساوية وكذلك ق ن ب ق ن د تعنان ن ب ن د مراراً متساوية ولذلك (حده  
ك ه) م ا : ن ب :: م س : ن د

فرغ. اذا فرض ا : ب :: س : د وضرب اوس في عدد ما مثل م تكون نسبة  
م ا : ب :: م س : د

### القضية الخامسة. ن

اذا فرض مقداران احدهما بعد الآخر مراراً ما وأخذ من كل واحد  
منها مقداراً احدهما بعد الآخر كما بعد الاولين الآخر فالبقية من  
الواحد تعد البقية من الآخر كما بعد كل الواحد كل الآخر (انظر  
كتاب الجبر ع ١٧٦)

ليكن م ا م ب مضروبين متساويين من مقدارين ا وب وليكن اكبرها  
فالبقية ا - ب بتعد في م ا - م ب مراراً تماثل تعداد في م ا اي م ا - م ب =  
م (ا - ب)

ليكن د فضلة ا وب اي ا - ب = د. اصف ب الى الجانين فلما ا = د + ب.  
فاذا (ق ا ك ه) م ا = م د + م ب. اطرح م ب من الجانبين فلما م ا - م ب = م د  
وقد فرض د = ا - ب فاذا م ا - م ب = م (ا - ب)

### القضية السادسة. ن

اذا ضرب مقدار في عدد ما وطرح من الحاصل المقدار ذاته مضروباً  
في عدد اصغر من الاول فالباقي يعد ذلك المقدار مراراً تعدل الاحاد  
في فضلة العددين (انظر كتاب الجبر ع ١٧٦)



لنفرض ا مقداراً وليتعدد م مرة ون مرة اي م ا ن ا وليكن م اكبر من ن  
فحينئذ ا بتعدد في م - ا ن ا مراراً تعدل الاحاد في م - ن اي م ا - ن ا = (م - ن) ا  
لنفرض ان م - ن = ق فحينئذ م = ن + ق . ثم م ا = ن ا + ق ا (ق آ ك ه) .  
اطرح ن ا من الجانبيين . م ا - ن ا = ق ا اي م ا - ن ا يعد ا مراراً تعدل الاحاد  
في ق اي م - ن مرة اي م ا - ن ا = (م - ن) ا

فرغ . اذا كانت فضلة العددين واحداً اي م - ن = ا فحينئذ م ا - ن ا = ا

## قضيه ان

إذا كان أربعة مقادير متناسبة. فهي متناسبة أيضاً بالقلب  
مفروض ا:ب::ب:س:د فحينئذ ب:ا::د:س  
ليتعدّد اوس م مرة اي م ا م س. وليتعدّد ب ود ن مرة اي ن ب ن د.  
فاذا كان م ا اصغر من ن ب يكون م س اصغر من ن د (حد ه ك ه) وإذا كان  
ن ب اكبر من م ا يكون ن د اكبر من م س وإذا كان ن ب = م ا ن د = م س  
وإذا كان ن ب > م ا ن د > م س ولكن ن ب ن د يعدّان ب ود مراراً  
متساوية وم ا م س يعدّان اوس مراراً متساوية فإذا (حد ه ك ه) ب:ا::د:س

## قضیه ب.ن

في اربعة مقادير اذا تعدد الثاني في الاول او الاول في الثاني كما يتعدد  
الرابع في الثالث او الثالث في الرابع تكون نسبة الاول الى الثاني  
كنسبة الثالث الى الرابع

اولاً لينتعدد اوب م مرة ثم م ا ا م ب ب  
لينتعدد م ا م ب مراراً تعدل الاحاد في ن ا ب م مرة. ولينتعدد اوب مراراً  
تعدل الاحاد في ف ا ي ف مرة فلنا (ق ٢ لكه) ن م ا ف ا ن م ب ف ب. فاذا  
كان ن م ا اكبر من ف ا يكون ن م اكبر من ف. واذا كان ن م اكبر من ف يكون  
ن م ب اكبر من ف ب فاذا كان ن م ا اكبر من ف ا يكون ن م ب اكبر من  
ف ب واذا كان ن م ا = ف ا = ن م ب = ف ب. واذا كانت ن م ا > ف ا

ن م ب ح ف ب وقد تعدد م ا م ب في ن م ا ن م ب مراراً متساوية. وقد تعدد  
ا و ب في ف ا ف ب مراراً متساوية فإذا م ا : ا : م ب : ب (حذو ه ك ه)  
ثانياً ليكن م جزاً من ا (حذو ا ك ه) وليكن د ذات ذلك الجزء من ب  
فيتعدد م في ا كما يتعدد د في ب وحسباً قد تبرهن ا : م :: ب : د وبالقلب  
(ق ا ك ه) م : ا :: د : ب

### قضية ج. ن

إذا فرض أربعة مقادير متناسبة أي نسبة الأول الى الثاني كنسبة  
الثالث الى الرابع وكان الأول مضروب الثاني او جزاً منه فالثالث  
ذات هذا المضروب او الجزء من الرابع

مفروض ا : ب :: م : د. ولا ليكن ا مضروب ب أي ليتعدد ب في ا مراراً  
معلومة فيكون م ذات هذا المضروب من د أي د يتعدد في م كما يتعدد ب في ا  
أي إذا كان  $a = m \cdot b$  فحيث  $m = d$

ليتعدد ا وس مرتين مثلاً أي  $12 = 2 \cdot 6$  وليتعدد ب ود  $2$  مرة أي  $12 = 2 \cdot 6$   
 $12 = 2 \cdot 6$  (ق ٢ ك ه). فمن حيث ان  $a = m \cdot b$   $12 = 2 \cdot 6$  ومن حيث ان  
ا : ب :: م : د و  $12 = 2 \cdot 6$  فإذا  $a = 12$   $m = 2$   $d = 6$  (حذو ه ك ه) وس  $m = d$  أي د  
يتعدد في م مراراً تعدل الاحاد في م أي م مرة أي كما يتعدد ب في ا

ثانياً ليكن ا جزاً من ب فيكون م ذات هذا الجزء من د. لأن ا : ب :: م : د  
وبالقلب (ق ا ك ه) ب : ا :: د : م. ولكن ا هو جزء من ب أي ب هو مضروب ا  
وكما تقدم د هو ذات هذا المضروب من م أي م ذات الجزء من د الذي كان ا  
من ب

### القضية السابعة. ن

مقادير متساوية بينها وبين مقدار مفروض تناسب واحد. والمقدار  
الواحد بينه وبين مقادير متساوية تناسب واحد. (جبر ع ١٥)



ليكن  $a$  و  $b$  مقدارين متساويين و  $s$  مقداراً اخر فنسبة  $a:s :: b:s$   
 ليكن  $a$  م  $b$  مضروبين متساويين من  $a$  و  $b$  و  $n$  م مضروباً من  $s$   
 فلكون  $a = b$  م  $a = b$  م  $b$  (اولية  $a$  كه) فاذا كان  $a$  اكبر من  $n$  م يكون  $a$  م  
 اكبر من  $n$  م واذا كان  $a$  م  $n$  م  $b$  م  $n$  م  $b$  م  $n$  م فاذا كان  $a$  م  $n$  م  
 م  $b$  م  $n$  م ولكن  $a$  م  $b$  م مضروبان متساويان من  $a$  و  $b$  و  $n$  م هو  
 مضروب من  $s$  فاذا (حده  $a$  كه)  $a:s :: b:s$   
 ثانياً اذا كان  $a = b$  فنسبة  $a:s :: b:s$  لانه قد تبهر ان  $a:s :: b:s$   
 وبالفلب (ق  $a$  كه)  $a:s :: b:s$

### القضية الثامنة. ن

اذا فرض مقادير غير متساوية فتناسب الاكبر الى مقدار مفروض هو  
 اعظم من تناسب الاصغر الى ذلك المقدار. وتناسب ذلك المقدار الى  
 الاصغر هو اعظم من تناسبه الى الاكبر (جبر ع<sup>١٦٣</sup> وع<sup>١٦٤</sup>)

ليكن  $a + b$  مقداراً اكبر من مقدار اخر هو  $a$  وليكن  $s$  مقداراً ثالثاً فتناسب  
 $a + b$  الى  $s$  هو اعظم من تناسب  $a$  الى  $s$  وتناسب  $s$  الى  $a$  هو اعظم من تناسبه  
 الى  $a + b$

ليكن  $m$  عدداً وليكن كل من  $a$  م  $b$  اكبر من  $s$ . وليكن  $n$  م المضروب  
 الاصغر من  $s$  الذي يزيد على  $a + m$  م  $b$  ثم  $n$  م  $s$  -  $s$  اي  $(n - a)$  م  $(ق ا$   
 $كه)$  يكون اصغر من  $a + m$  م  $b$  اي  $a + m$  م  $b$  او  $m$  م  $(a + b)$  هو اكبر من  
 $(n - a)$  م لان  $n$  م هو اكبر من  $a + m$  م  $b$  و  $s$  اصغر من  $m$  م يكون  $n$  م -  
 $s$  اكبر من  $a$  م اي  $a$  هو اصغر من  $n$  م -  $s$  اي من  $(n - a)$  م فاذا  
 المضروب  $a + b$  م في  $m$  هو اكبر من المضروب  $s$  في  $n - a$  ولكن المضروب  $a$  في  $m$   
 ليس باكبر من المضروب  $s$  في  $n - a$  فاذا تناسب  $a + b$  الى  $s$  هو اعظم من  
 تناسب  $a$  الى  $s$  (حده  $a$  كه)

ثم من حيث ان المضروب  $s$  في  $n - a$  هو اكبر من المضروب  $a$  في  $m$  وليس

أكبر من المضروب  $a + b$  في  $m$  فتناسب  $m$  الى  $a$  هو اعظم من تناسب  $a$  الى  $b$   
(حد ٧ ك ٥)

### القضية التاسعة. ن

المقادير التي لها تناسب واحد الى مقدار مفروض هي متساوية وإذا كان  
لمقدار واحد تناسب واحد الى مقادير فهي متساوية (جبر ع<sup>١٥٨</sup>)  
مفروض  $a : m :: b : n$  فحينئذ  $a = b$

والأفليكن  $a$  أكبر من  $b$ . فيمكن وجود عدد  $n$  من  $m$  كما في القضية السابقة  
حتى يكون  $m$  أكبر من  $n$   $s$  ولا يكون  $m$  أكبر من  $n$   $s$  ومن حيث ان  
 $a : m :: b : n$  فاذا كان  $m$  أكبر من  $n$   $s$  يكون  $m$  أيضاً أكبر من  $n$   $s$   
(حد ٥ ك ٥) وقد تبهرن ان  $m$  ليس أكبر من  $n$   $s$  وذاك محال فلا يكون  $a$   
أكبر من  $b$  اي  $a = b$

ثم لنفرض  $a : m :: b : n$  فحينئذ  $a = b$  لانه بالقلب (ق ك ٥)  $a : m :: b : n$   
 $m$  ولذلك حسباً تقدم  $a = b$

### القضية العاشرة. ن

إذا فرض مقداران وكان بين احدهما ومقدار ثالث تناسب اعظم من  
تناسب ثانيها الى ذلك المقدار فالاول أكبرها. وإذا كان تناسب  
الثالث الى احدهما اعظم من تناسبه الى الآخر فهو اصغرهما (جبر  
ع<sup>١٦٣</sup> وع<sup>١٦٤</sup>)

إذا كان تناسب  $a$  الى  $m$  اعظم من تناسب  $b$  الى  $m$  يكون  $a$  أكبر من  $b$   
لانه حسب المفروض  $a : m < b : m$  فيمكن وجود عدد  $n$  من  $m$  حتى يكون  
 $m < n$   $s$  و  $m > n$   $s$  (حد ٧ ك ٥) فيكون  $m < n$   $s$  و  $m > n$   $s$   
(اولية ٤ ك ٥)

ثم ليكن  $a : m < b : m$  فيكون  $b > a$  لانه قد يمكن ان يوجد عددان



م ون حتى يكون م < ن ب وم س > ن ا (حد ٧ كه) فن حيث ان ن ب  
اصغر من م س ون ا اكبر من م س يكون ن ب > ن ا فيكون ب > ا

### القضية الحادية عشرة . ن

التناسبات التي تعدل تناسبا واحدا هي متساوية (جبر ع<sup>١٨٢</sup>)

مفروض ا : ب :: س : د وس : د :: ي : ف فحينئذ ا : ب :: ي : ف  
لتفرض م ا م س م ي مضارب متساوية من ا وس وي وايضا ن ب ن د  
ن ف مضارب متساوية من ب ود وف . فلكون ا : ب :: س : د فاذا كان  
م ا < ن ب يكون م س < ن د (حد ٥ كه) . ولكن اذا كان م س < ن د  
يكون م ي < ن ف (حد ٥ كه) لان س : د :: ي : ف فاذا كان م ا < ن ب  
يكون م ي < ن ف . وهكذا اذا كان م ا = ن ب فيكون م ي = ن ف واذا كان  
م ا > ن ب يكون م ي > ن ف ولكن م ا م ي ها مضروبان متساويان من  
ا وي . ون ب ن ف ها مضروبان متساويان من ب وف فاذا ا : ب :: ي : ف  
(حد ٥ كه)

### القضية الثانية عشرة . ن

اذا كانت عدة مقادير متناسبة فنسبة مجتمع السوابق الى مجتمع التوالى  
كنسبة احد السوابق الى تاليه (جبر ع<sup>١٦٦</sup>)

مفروض ا : ب :: س : د وس : د :: ي : ف فنسبة ا : ب :: ا + س + ي : ب + د + ف

افرض م ا م س م ي مضارب متساوية من ا وس وي . وايضا ن ب ن د  
ن ف مضارب متساوية من ب ود وف . فن حيث ان ا : ب :: س : د فاذا كان  
م ا < ن ب يكون م س < ن د (حد ٥ كه) . واذا كان م س < ن د يكون  
م ي < ن ف لان س : د :: ي : ف . فاذا كان م ا < ن ب يكون م ا + م س  
+ م ي < ن ب + ن د + ن ف وكذلك . اذا كان م ا = ن ب يكون م ا + م س  
+ م ي = ن ب + ن د + ن ف واذا كانت م ا > ن ب يكون م ا + م س +

م > ن ب + ن د + ن ف. ولكن م + م س + م ي = م (ا + س + ي)  
 (فرع ق ا ك ه) وم ا + م س + م ي هـ مضروبان متساويان من ا ومن ا +  
 س + ي. ولهذا السبب ايضا يكون ن ب ون ب + ن د + ن ف مضروبين  
 متساويين من ب ومن ب + د + ف فيكون (ح د ه ك ه) ا : ب :: ا + س +  
 ي : ب + د + ف

### القضية الثالثة عشرة. ن

اذا كان تناسب الاول الى الثاني مثل تناسب الثالث الى الرابع  
 ولكن تناسب الثالث الى الرابع اعظم من تناسب الخامس الى  
 السادس فيكون تناسب الاول الى الثاني اعظم من تناسب الخامس  
 الى السادس (جبر ع<sup>١٨٢</sup>)

مفروض ا : ب :: س : د ولكن س : د < ي : ف فينتج ا : ب < ي :  
 ف. لان س : د < ي : ف فيمكن وجود عدد بين م ون حتى يكون م س < ن د  
 ويكون م ي > ن ف (ح د ه ك ه). فاذا كان م س < ن د يكون م ا < ن ب  
 لان ا : ب :: س : د فيكون م ا < ن ب وم ي > ن ف فاذا ا : ب < ي :  
 ف (ح د ه ك ه)

### القضية الرابعة عشرة. ن

اذا كان تناسب الاول الى الثاني مثل تناسب الثالث الى الرابع فاذا  
 كان الاول اكبر من الثالث يكون الثاني اكبر من الرابع واذا عدل  
 الاول الثالث يعدل الثاني الرابع واذا كان الاول اصغر من الثالث  
 يكون الثاني اصغر من الرابع (جبر ع<sup>١٩٢</sup>)

مفروض ا : ب :: س : د فاذا كان ا < س يكون ب < د واذا كان ا =  
 س يكون ب = د واذا كان ا > س يكون ب > د



اولاً ليكن  $a < b$  ثم  $a : b < c : d$  (ق ٨ ك ٥) ولكن  $a : b :: c : d$  :  
 د فاذا  $a : b < c : d$  (ق ١٢ ك ٥) ولذلك  $b < d$  (ق ١٠ ك ٥)  
 وهكذا يبرهن انه اذا كان  $a = b$  فحينئذ  $b = d$  واذا كان  $a > b$  يكون  
 $b > d$

### القضية الخامسة عشرة من

المقادير بينها ذات التناسب الواقع بين مضاريبها المتساوية (جبر  
 (ع ١٦٤))

ليكن  $a$  و  $b$  مقدارين وم عدداً ما فتناسب  $a : b :: m : n$   $m$  ب  
 لان  $a : b :: 1 : 1$  (ق ٧ ك ٥) فيكون  $a : b :: 1 + 1 : 1 + 1$   $b + b$  (ق ١٢  
 ك ٥) اي  $a : b :: 12 : 12$  وهكذا ايضاً من حيث ان  $a : b :: 12 : 12$   $2$  ب  
 يكون  $a : b :: 1 + 12 : 1 + 12$   $b + 12$  (ق ١٢ ك ٥) اي  $a : b :: 13 : 13$   $3$  ب  
 وهلم جرا في كل المضاريب المتساوية من  $a$  و  $b$

### القضية السادسة عشرة من

اذا كان اربعة مقادير من جنس واحد متناسبة تكون متناسبة ايضاً  
 بالمبادلة (جبر ع ١٨١)

اذا كان  $a : b :: c : d$  فبالمبادلة  $a : c :: b : d$   
 خذ  $m$  ب مضروبين متساويين من  $a$  و  $b$  و  $n$  من  $c$  و  $d$  مضروبين  
 متساويين من  $c$  و  $d$  ثم (ق ١٥ ك ٥)  $a : b :: m : n$  وقد فرض  $a : b :: c : d$   
 فاذا (ق ١١ ك ٥)  $c : d :: m : n$  ولكن  $c : d :: n : n$  (ق ١٥ ك ٥)  
 فاذا  $m : n :: c : d$  (ق ١١ ك ٥) فاذا كان  $m < n$  يكون  $m < b$   
 (ق ١٤ ك ٥) واذا كان  $m = n$  يكون  $m = b$  (ق ١٤ ك ٥) واذا كان  $m > n$   
 يكون  $m > b$  (ق ١٤ ك ٥) فاذا (ق ١٤ ك ٥)  $a : c :: b : d$

## القضية السابعة عشرة. ن

المقادير المناسبة بالاجال هي متناسبة ايضاً بالافراد. اي اذا كان  
تناسب الاول مع الثاني الى الثاني مثل تناسب الثالث مع الرابع الى  
الرابع يكون تناسب الاول الى الثاني كنسب الثالث الى الرابع  
(جبر ع<sup>١٨</sup>)

مفروض  $a + b : b :: s : d$  فحينئذ  $a : b :: s : d$   
خدم  $a$  ن ب مضروبين من  $a$  وب في العددين  $m$  و  $n$  ولولا ليكن  $m < n$  ب  
اضف الى كل واحد منهما  $b$  فلنا  $m + b < n + b$  ولكن  $m + a = n + b$   
 $m + a$  (ب) (فرع ق ا ك ه) و  $m + b = n + b$  (م + ن) ب (فرع ا ق ا ك ه)  
فاذا  $m + a < m + n$  ب  
ومن حيث ان  $a + b : b :: s : d$  فاذا كان  $m + a < m + n$  ب  
يكون  $m$  (س + د)  $< (m + n)$  د اي  $m$  س + د  $< m + n$  د ويطرح  $m$  د من  
الجانبيين  $m$  س  $< n$  د. فاذا كان  $m < n$  ب يكون  $m$  س  $< n$  د. وهكذا يبرهن  
انه اذا كان  $m = n$  ب يكون  $m$  س  $= n$  د واذا كان  $m > n$  ب يكون  $m$  د  $> n$  د  
فاذا  $a : b :: s : d$  (حده ك ه)

## القضية الثامنة عشرة. ن

المقادير المناسبة بالافراد هي متناسبة ايضاً بالاجال. اي اذا كان  
الاول الى الثاني كالثالث الى الرابع يكون الاول مع الثاني الى الثاني  
كالثالث مع الرابع الى الرابع (جبر ع<sup>١٨</sup>)

ليكن  $a : b :: s : d$  فحينئذ  $a + b : b :: s + d : d$   
لفرض  $m + a$  (ب) و  $n$  ب مضروبين من  $a + b$  و  $b$  ولولا ليكن  $m$  اعظم من  
 $n$ . فلكون  $a + b$  اعظم من  $b$  يكون  $m + a < n + b$  وايضاً  $m$  (س + د)  $< n$   
 $n$  د فاذا كان  $m < n$  ب يكون  $m + a < n + b$  و  $m$  (س + د)  $< n$  د.



وهكذا يبرهن انه اذا كان  $m = n$  فيكون  $m(a+b)$  اعظم من  $n$  ب  $m(m+d)$   
 اعظم من  $n$  د

ثم ليكن م < ن او ن < م فقد يمكن ان يكون م (ا + ب) اعظم من ن ب  
او مساويا له او اصغر منه. اولا ليكن م (ا + ب) اعظم من ن ب فيكون م + ا +  
ب < ن ب اطرح من الجانبيين م ب الذي هو اصغر من ن ب فلنا م + ا <  
ن ب - م ب ا ب م ا < (ن - م) ب (ق ٦ ك هـ). ولكن اذا كان م ا < (ن  
- م) ب يكون م س < (ن - م) د لان ا : ب :: س : د. و (ن - م) د = ن  
د - م د (ق ٦ ك هـ) فاذا م س < ن د - م د. اضف اليها م د فلنا م س + م د <  
ن د اي (ق ١ ك هـ) م (س + د) < ن د. فاذا كان م (ا + ب) < ن ب يكون  
م (س + د) < ن د

وهكذا يبرهن انه اذا كان  $m = (a + b) = n$  يكون  $m = (s + d) = n$   
واذا كان  $m = (a + b) > n$  يكون  $m = (s + d) < n$  فاذا (حده لكه)  
 $a + b : b :: s + d : d$

## القضية التاسعة عشرة: ن

اذا كانت نسبة مقدار كـ الى مقدار اخر كـ كمقدار ماخوذ من الاول الى  
مقدار ماخوذ من الثاني تكون نسبة البقية الى البقية كالكل الى الكل  
(جبر ع ١٨)

إذا كان ا: ب :: س: د وكان س اصغر من ا يكون ا- س: ب- د :: ا: ب  
 بما ان ا: ب :: س: د فبالقلب (ق ١٦ ك ٥) ا: س :: ب: د وبالقسمه  
 (ق ١٧ ك ٥) ا- س: س: ب- د: د وبالقرب ايضاً ا- س: ب- د :: س: د  
 ولكن ا: ب :: س: د فاذا (ق ١١ ك ٥) ا- س: ب- د :: ا: ب  
 فرع ا- س: ب- د :: س: د

## قضيه دين

اذا كان اربعة مقادير متناسبة فهي متناسبة ايضاً بالطرح اي الاول

الى زيادته عن الثاني كالثالث الى زيادته عن الرابع (حد ١٨ كه)

مفروض ا: ب :: س : د فبالطرح ا: ا-ب :: س : س-د

لان ا: ب :: س : د فبالقسمة (ق ١٧ كه) ا-ب : ب :: س-د : د

وبالقلب (ق ١٨ كه) ب : ا-ب :: د : س-د ثم بالتركيب (ق ١٨ كه)

ا: ا-ب :: س : س-د

فرع. وهكذا يبرهن ان ا: ا+ب :: س : س+د

### القضية العشرون

اذا فرض ثلاثة مقادير مناسبة لثلاثة مقادير آخر اية كل اثنين من

الأول مناسبان لكل اثنين من الآخر فاذا كان الأول اعظم من

الثالث يكون الرابع اعظم من السادس واذا كان مساوياً له يكون

الرابع مساوياً للسادس واذا كان اصغر منه يكون الرابع اصغر من

السادس (جبر ع ١٩٢)

اذا فرض ثلاثة مقادير ا ب س وثلاثة آخر د ي ف وكانت نسبة

ا: ب :: د: د ي وايضاً ب: س :: د ي فاذا كان ا < س

يكون د < ف واذا كان ا = س يكون د = ف واذا كان

ا > س يكون د > ف

اولاً ليكن ا < س ثم ا: ب < س: ب (ق ٨ كه) ولكن ا: ب :: د: د ي

فاذا د: د ي < س: ب (ق ١٢ كه) وقد فرض ب: س :: د ي ف وبالقلب

(ق ١٨ كه) س: ب :: د ي وقد تبرهن ان د: د ي < س: ب فاذا د: د ي <

ف: د ي (ق ١٢ كه) وبالضرورة د < ف (ق ١٠ كه)

ثم لنفرض ا = س ثم ا: ب :: س: ب (ق ٧ كه) ولكن ا: ب :: د: د ي

فاذا س: ب :: د: د ي ولكن س: ب :: ف: د ي فاذا د: د ي :: ف: د ي (ق ١١

كه) ود = ف (ق ٩ كه). اخيراً ليكن ا > س اي س < ا وقد تبرهن ان



س : ب :: ف : ي وب : ا :: ي : د فاذا كان س < ا يكون ف < د اي اذا  
كان ا > س يكون د > ف

### القضية الحادية والعشرون

اذا فرض ثلاثة مقادير مناسبة لثلاثة آخر بحيث يكون الاول الى  
الثاني كالخامس الى السادس والثاني الى الثالث كالرابع الى الخامس  
فان كان الاول اعظم من الثالث فيكون الرابع اعظم من السادس وان  
كان مساويا له فيكون الرابع مساويا للسادس وان كان اصغر منه  
فيكون الرابع اصغر من السادس (جبر ع<sup>١٩٢</sup>)

مفروض ثلاثة مقادير ا ب س وثلاثة آخر د ي ف وتناسب ا : ب :: ي : ف  
وب : س :: د : ي فاذا كان ا < س يكون د < ف واذا  
كان ا = س يكون د = ف واذا كان ا > س يكون د > ف

ا	ب	س
د	ي	ف

اولا ليكن ا < س ثم ا : ب < س : ب (ق ٨ كه) وقد فرض ا : ب :: ي : ف  
فاذا ا : ب < س : ب (ق ١٢ كه) وب : س :: د : ي بالمفروض وبالقلب  
س : ب :: ي : د فاذا ا : ب < س : ب (ق ١٢ كه) ود : س < ف (ق ١٠ كه)  
ثم ليكن ا = س فلنا (ق ٧ كه) ا : ب :: س : ب وبالمفروض ا : ب :: ي : ف  
فاذا س : ب :: ي : ف (ق ١١ كه) وبالمفروض ب : س :: د : ي وبالقلب  
س : ب :: ي : د فاذا (ق ١١ كه) ي : ف :: ي : د ود = ف (ق ٩ كه)  
اخيرا ليكن ا > س اي س < ا فقد تبهرن ان س : ب :: ي : د وب :  
ا : ف :: ي : ف فحسبنا تقدم اذا كان س < ا فيكون ف < د اي د > ف

### القضية الثانية والعشرون

اذا فرضت عدة مقادير مناسبة لعدة اخرى من المقادير على ترتيبها  
فيكون تناسب الاول الى الاخير من الاول كتناسب الاول من  
الاخر الى الاخير (جبر ع<sup>١٨٤</sup>)

مفروض ثلاثة مقادير ا ب س مناسبة لثلاثة اخرى د ي ف على ترتيبها

اي ا : ب :: د : ي وب : س :: ي : ف	ا	ب	س
فيكون ا : س :: د : ف	د	ي	ف
خذ مضروبين متساويين من ا و د اي	م	ن	ق
م ا م د وكذلك ن ب ن ي من ب و ي	م د	ن ي	ق ف

وق س ق ف من س وف . فلكون ا : ب :: د : ي فيكون م ا : ن ب :: م د : ن ي (ق ٤ ك ٥) وايضا ن ب : ق س :: ن ي : ق ف فاذا (ق ٢٠ ك ٥) حسبما كان م اعظم من ق س او مساويا له او اصغر منه يكون م د اعظم من ق ف او مساويا له او اصغر منه . ولكن م ا م د هما مضروبان متساويان من ا و د وق س ق ف مضروبان متساويان من س وف فاذا (ح ٥ ك ٥) ا : س :: د : ف

ثم لنفرض اربعة مقادير ا ب س د واربعة اخرى ف غ ح متناسبة على

ا	ب	س	د
ي	ف	غ	ح

ترتيبها اي ا : ب :: ي : ف  
وب : س :: ف : غ وس :  
د :: غ : ح فيكون ا : د :: ي : ح

ي : ح

لأنه حسبما تقدم في المقادير الثلاثة المتقدم ذكرها مع الثلاثة الاخر المتقدم ذكرها ا : س :: ي : غ وبالمفروض س : د :: غ : ح فيكون ا : د :: ي : ح وهكذا هما تعددت المقادير

### القضية الثالثة والعشرون

اذا كانت عدة مقادير مناسبة لعدة اخرى على ترتيب المذكور في القضية الحادية والعشرين يكون تناسب الاول الى الاخير من الاولى كتناسب الاول من الاخرى الى اخيرها (جبر ع ١٨٦)

اولا لنفرض ثلاثة مقادير ا ب س متناسبة لثلاثة اخرى د ي ف بان





لأن ي: ب :: ف: د فيا قلب ب: ي :: د: ف وبالمفروض ا: ب :: س: د  
 فيا المساواة (ق ٢٢ ك ٥) ا: ي :: س: ف وبالتركيب (ق ١٨ ك ٥) ا+ ي: ي: س ::  
 س+ ف: ف وبالمفروض ايضاً ي: ب :: ف: د فيا المساواة (ق ٢٢ ك ٥) ا+ ي:  
 ب :: س+ ف: د

قضية ٥٠ ن

إذا كان أربعة مقادير متناسبة فجميع الأولين الى فضلتها كجميع  
 الآخرين الى فضلتها

مفروض ا: ب :: س: د وإذا كان ا < ب فيكون ا+ ب: ا- ب :: س+ د: س- د  
 د: س- د وإذا كان ا > ب ا+ ب: ب- ا :: س+ د: د- س  
 لانه إذا كان ا < ب فن حيث ان ا: ب :: س: د فيا القسمة (ق ١٧ ك ٥)  
 ا- ب: ب :: س- د: د وبالقرب (ق ١٥ ك ٥)  
 ب: ا- ب :: د: س- د وبالتركيب (ق ١٨ ك ٥)  
 ا+ ب: ب :: س+ د: د فيا المساواة (ق ٢٢ ك ٥)  
 ا+ ب: ا- ب :: س+ د: س- د  
 وهكذا إذا كان ا > ب اوب < ا يبرهن ان  
 ا+ ب: ب- ا :: س+ د: د- س

قضية ٥١ ن

التناسبات المركبة من تناسبات متساوية هي متساوية بعضها لبعض  
 لنفرض ان تناسب ا الى س قد تركيب من تناسبين اي تناسب ا: ب وتناسب  
 ب: س وان تناسب د الى ف قد تركيب من تناسب د: ي وتناسب ي: ف  
 المساويين للأولين اي ا: ب وب: س فيكون ا: س: د: ف

اولاً اذا كان تناسب ا: ب = د: ي  
 وتناسب ب: س = ي: ف فيا المساواة  
 (ق ٢٢ ك ٥) ا: س: د: ف

ا	ب	س
د	ي	ف



ثانياً إذا كن  $a : b = c : d$  ف  $b : c = d : a$  في المساواة بالقلب (ق ٢٢)  
 لكه  $a : c :: d : b$  وهكذا تعددت التناسبات

### قضية ز. ن

إذا قاس مقداراً كلاً من مقدارين آخرين يقيس أيضاً مجتمعهما وفضلتهما  
 لنفرض ان  $a$  يقيس  $a$  اي يتعدد فيه تسع مرات مثلاً وايضا ليقس  $b$  خمس  
 مرات مثلاً فلنا  $a = 9$  و  $b = 5$  فيكون  $a$  و  $b$  معاً  $14$  مرة  $a$  اي  $a$  يقيس  
 مجتمع  $a$  و  $b$  وفضلتهما هي اربعة امثال  $a$  فاذا  $a$  يقيس هذه الفضلة ايضاً. وهكذا  
 مها كانت الاعداد المفروضة. فلنفرض  $a = m$  و  $b = n$  ثم  $a + b = (m + n)$   
 $a - b = (m - n)$  و  
 فرع. إذا كان  $a$  قياساً للمقدار  $b$  وايضاً للمقدار  $a - b$  او  $a + b$  فانه يقيس  
 المقدار ايضاً لان مجتمع  $b$  و  $a - b$  هو  $a$  وفضلته  $b$  و  $a + b$  هي ايضاً

# اصول الهندسة

## الكتاب السادس

### حدود

١ اشكال ذات اضلاع مستقيمة متشابهة هي ما كانت زواياها متساوية

كل واحدة تعدل نظيرها. والاضلاع

المحيطة بالزوايا المتساوية متناسبة



في شكلين متناسين الاضلاع التي

تلي الزوايا المتساوية تسمى متشابهة. والزوايا تسمى الزوايا المتشابهة. وفي الدوائر

الاقواس المتشابهة والقطع المتشابهة والقطعان المتشابهة هي التي تقابل زوايا متساوية

عند المركز

٢ اذا كانت نسبة ضلع شكل الى ضلع شكل آخر كنسبة ضلع اخر من

الثاني الى اخر من الاول يقال انها متناسبة بالتكافؤ

٣ اذا انقسم خط مستقيم بحيث تكون نسبة الكل الى القسم الاطول كالقسم

الاطول الى الاقصر يقال انه قد انقسم على نسبة متوسطة



٤ علو مثلث هو البعد العمودي من رأسه الى قاعدته

علو شكل متوازي الاضلاع هو البعد العمودي بين

ضلعيه المتقابلين محسولين قاعدتين وعلو شبه المربع هو

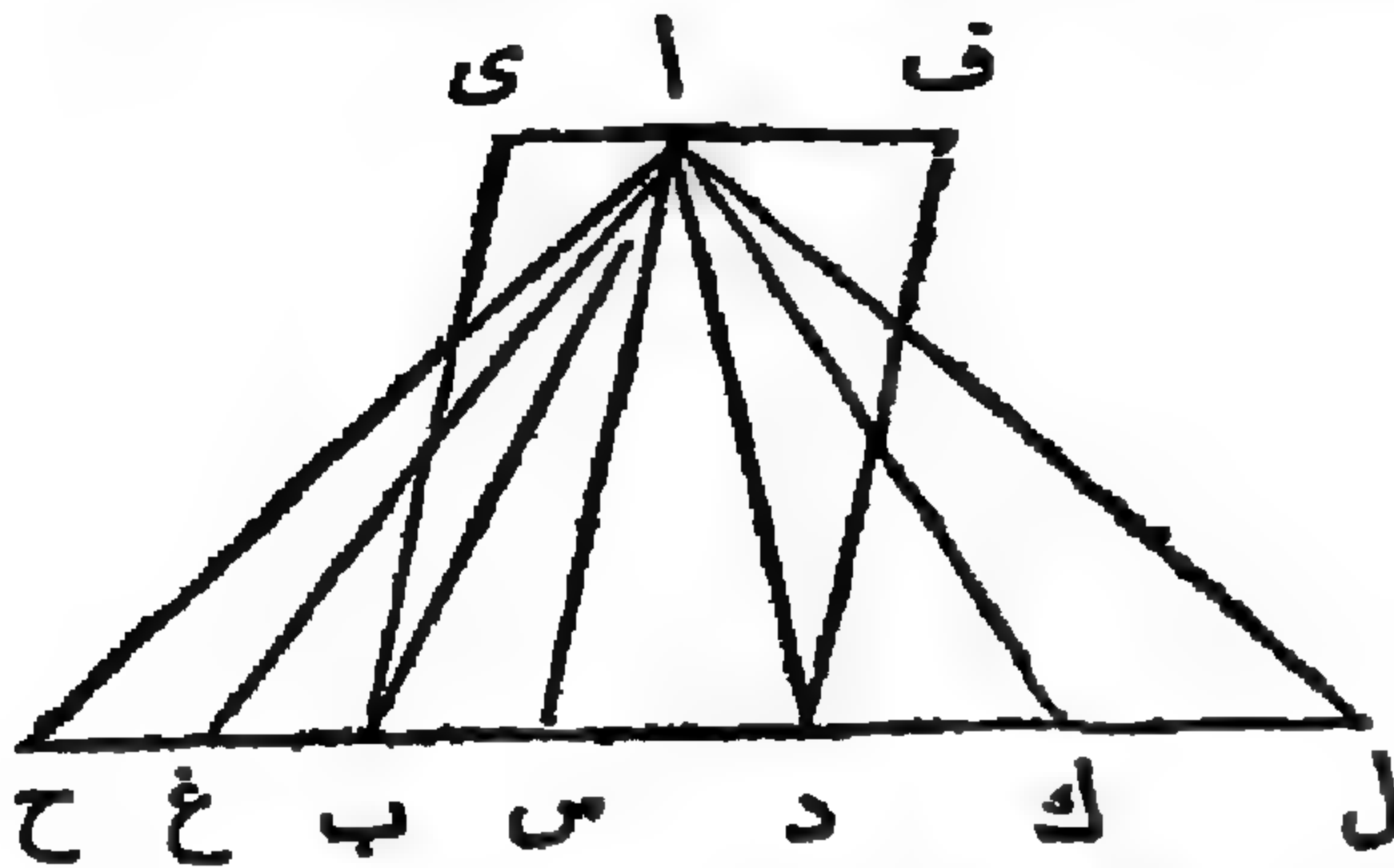
البعد العمودي بين ضلعيه المتوازيين



القضية الاولى ن

نسبة مثلثات واشكال متوازية الاضلاع على علو واحد بعضها الى بعض كنسبة قواعدها بعضها الى بعض

ليكن المثلثان اب س اس د والشكلان المتوازي الاضلاع ي س س ف



على علو واحد اي عمود من ا

الى ب د فنسبة المثلث اب س

الى المثلث اس د ونسبة الشكل

ي س الى شكل س ف كنسبة

القاعدة ب س الى القاعدة س د

اخرج ب د الى الجهتين الى ح ول حتى ينقسم ح ب الى اقسام تعدل ب س

مثل ح غ غ ب واقسم د ل الى اقسام تعدل س د مثل ل ك ك د وارسم ا غ ا ح

ا ك ا ل

فلكون س ب ب غ غ ح متساوية تكون المثلثات ا ح غ ا غ ب اب س

متساوية (ق ٢٨ ك ا) وكما تعددت القاعدة ب س في القاعدة ح س هكذا يتعدّد

المثلث اب س في المثلث ا ح س وكذلك كما تتعدّد القاعدة د س في القاعدة س ل

هكذا يتعدّد المثلث اس د في المثلث اس ل. واذا كانت القاعدة ح س تعدل

القاعدة س ل يكون المثلثان ا ح س ا ل س متساويين (ق ٢٨ ك ا) واذا كانت

القاعدة ح س اكبر من س ل يكون المثلث ا ح س اكبر من المثلث ا ل س وان

كانت اصغر فاصغر. فلنا اربعة مقادير وهي القاعدتان ب س س د والمثلثان

اب س اس د وقد أخذ مضروبان متساويان من الاول والثالث اية القاعدة

ب س والمثلث اب س وهما القاعدة ح س والمثلث ا ح س وهكذا من القاعدة

س د والمثلث اس د وهما القاعدة س ل والمثلث ا ل س وقد تبهرن انه اذا كانت

القاعدة ح س اكبر من س ل يكون المثلث ا ح س اكبر من ا ل س وان كانت

متساوية لها فالمثلث ا ح س يعدل المثلث ا ل س وان كانت اصغر فاصغر منه

فنسبة القاعدة ب س الى القاعدة س د كنسبة المثلث اب س الى المثلث اس د

(حد ه ك ه)

ثم لكون الشكل المتوازي الاضلاع س ي هو مضاعف المثلث ا ب س  
(ق ٤١ ك ١) والشكل س ف مضاعف المثلث ا س د وبين المقادير ذات النسبة  
الكائنة بين مضاربيها المتساوية (ق ١٥ ك ٥) يكون الشكل ي س الى الشكل س ف  
كالمثلث ا ب س الى المثلث ا س د. وقد تبهرن ان ب س : س د :: ا ب س :  
ا س د فبالمساواة الشكل س ي الى الشكل س ف كالقاعدة ب س الى القاعدة  
س د (ق ١١ ك ٥)

فرع. نسبة المثلثات الى الاشكال المتوازية الاضلاع هي كنسبة قواعدها  
بعضها الى بعض اذا كانت المثلثات والاشكال على علو واحد

### القضية الثانية. ن

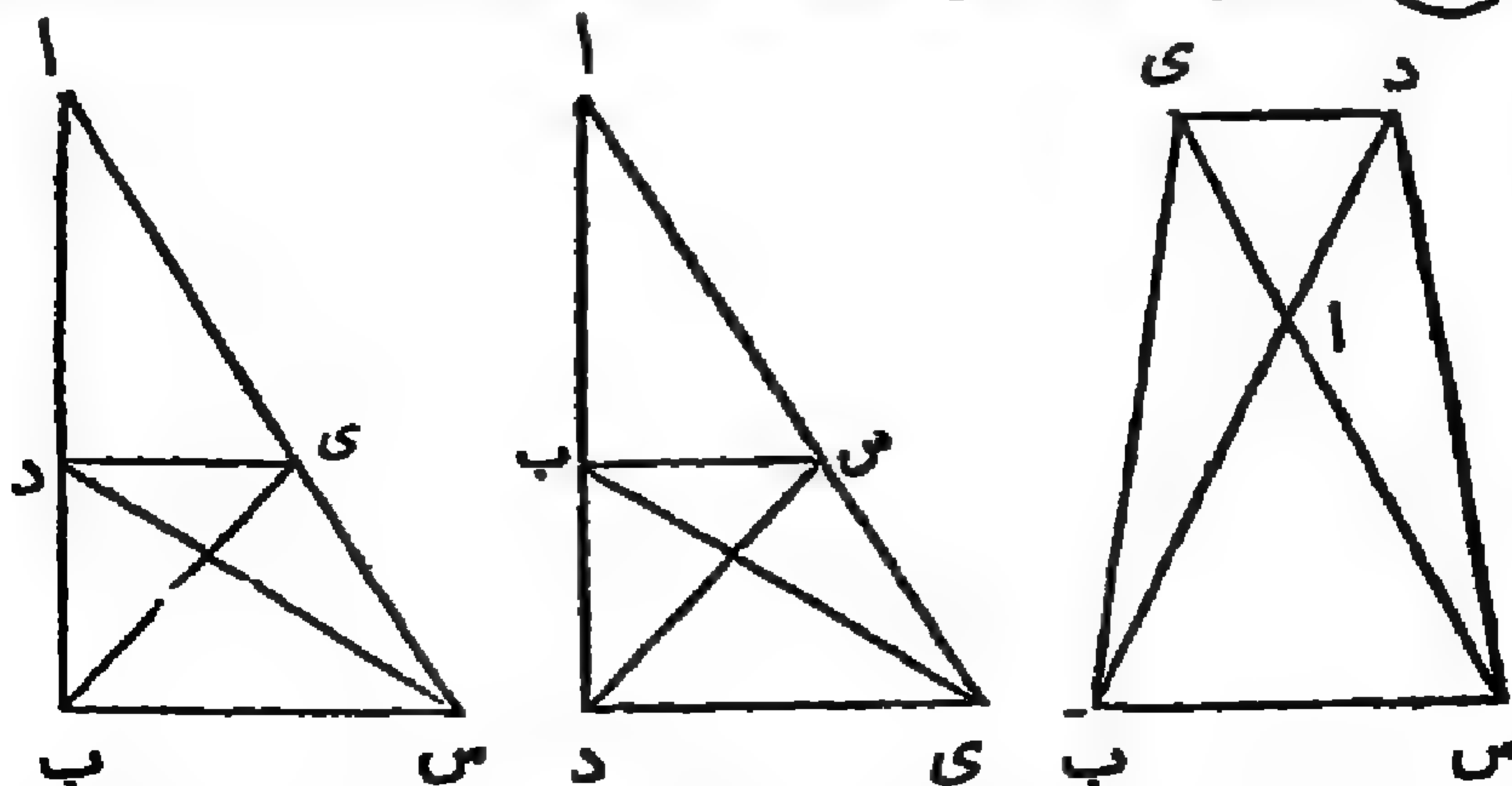
اذا رسم خط مستقيم حتى يوازي ضلع مثلث فانه يقطع الضلعين  
الاخرين او الخطين الحاصلين من اخراجها حتى تكون اقسامها  
متناسبة. واذا قطع الضلعان او الخطان الحاصلان من اخراجها حتى  
تكون اقسامها متناسبة فالخط المستقيم الذي يقطعها يوازي الضلع  
الاخر من المثلث

ليكن ا ب س مثلثا ويرسم د ي حتى يوازي ب س فتكون نسبة ب د : د ا ::

س ي : ي ا

ارسم ب ي س د. فالمثلث ب د ي يعدل المثلث س د ي (ق ٣٧ ك ١)

لانها على قاعدة واحدة د ي وبين خطين متوازيين ب س د ي. وادى مثلث



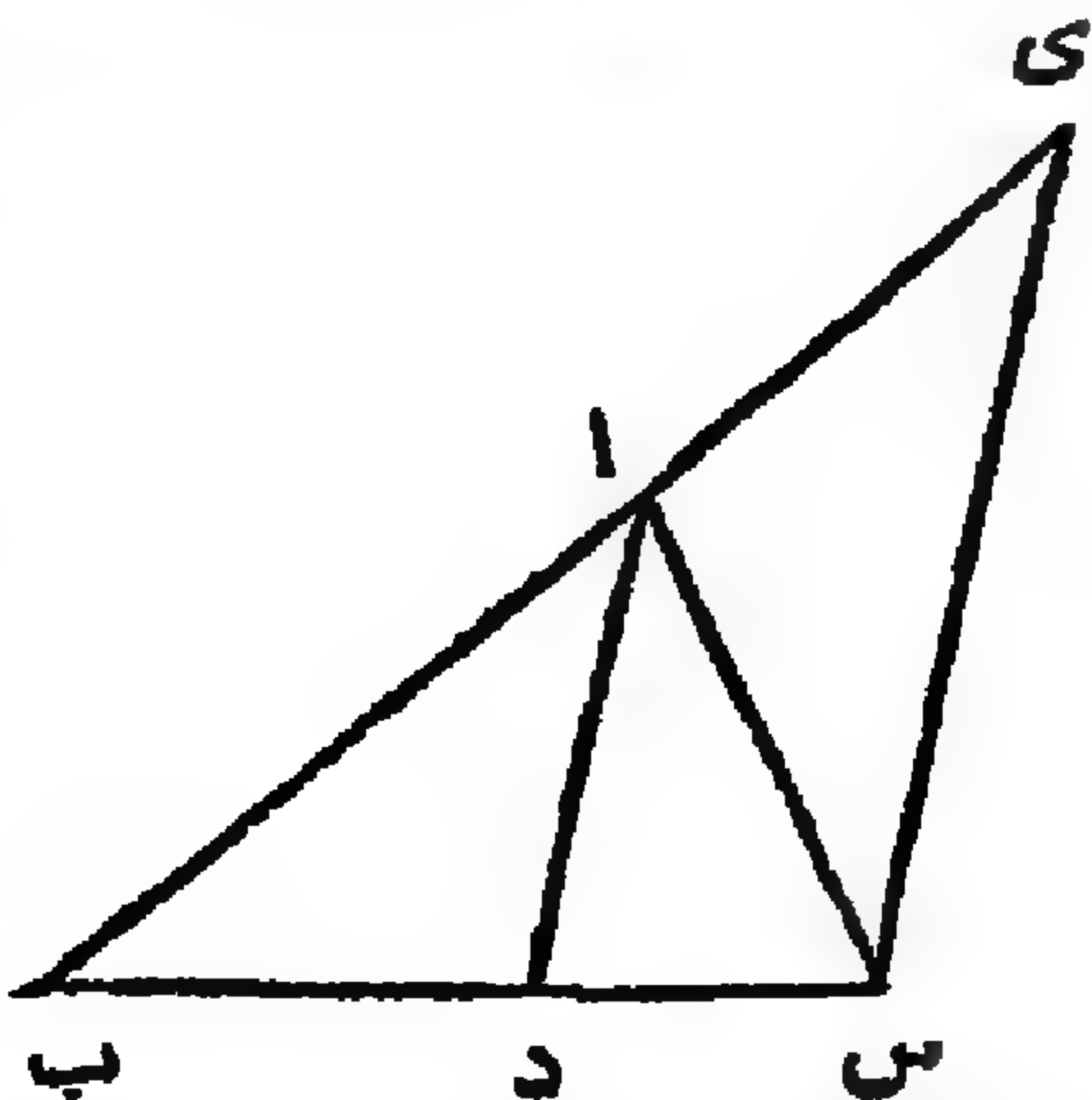


آخر والمقادير المتساوية لها نسبة واحدة الى مقدار آخر (ق ٧ ك ٥) اي المثلث ب د ي الى المثلث ا د ي كالمثلث س د ي الى المثلث ا د ي ولكن ب د ي : ا د ي :: ب د : دا (ق ١ ك ٦) لان لها علواً واحداً اي عموداً من ي الى ب ا ولهذا السبب ايضاً س د ي : ا د ي :: س ي : ي ا فاذا ب د : دا :: س ي : ي ا ثم لنفرض ان الضلعين ا ب ا س او الخطين الحاصلين من اخراجها قد قطعاً في دوي حتى تكون نسبة ب د : دا :: س ي : ي ا فالخط المستقيم د ي الموصل بين نقطتي القطع يوازي ب س . ثم الشكل كما تقدم . فلكون ب د : دا :: س ي : ي ا ولكون ب د : دا :: ب د ي : ا د ي (ق ١ ك ٦) وس ي : ي ا :: س د ي : ا د ي يكون المثلث ب د ي : ا د ي :: س د ي : ا د ي اي المثلثان ب د ي وس د ي لها نسبة واحدة الى مثلث آخر ا د ي فالمثلث ب د ي = س د ي (ق ٩ ك ٥) وهما على قاعدة واحدة د ي وللمثلثات المتساوية اذا كانت على قاعدة واحدة هي بين خطين متوازيين (ق ٢٩ ك ١) فالخط د ي يوازي الخط ب س

### القضية الثالثة . ن

اذا تنصفت زاوية مثلث بخط مستقيم يقطع القاعدة ايضاً فقسمها القاعدة بينها النسبة الكائنة بين الضلعين الآخرين من المثلث . واذا كانت نسبة قسمة القاعدة بعضها الى بعض كنسبة الضلعين الآخرين من المثلث بعضها الى بعض فالخط المستقيم المرسوم من نقطة القطع الى الزاوية المقابلة ينصف تلك الزاوية

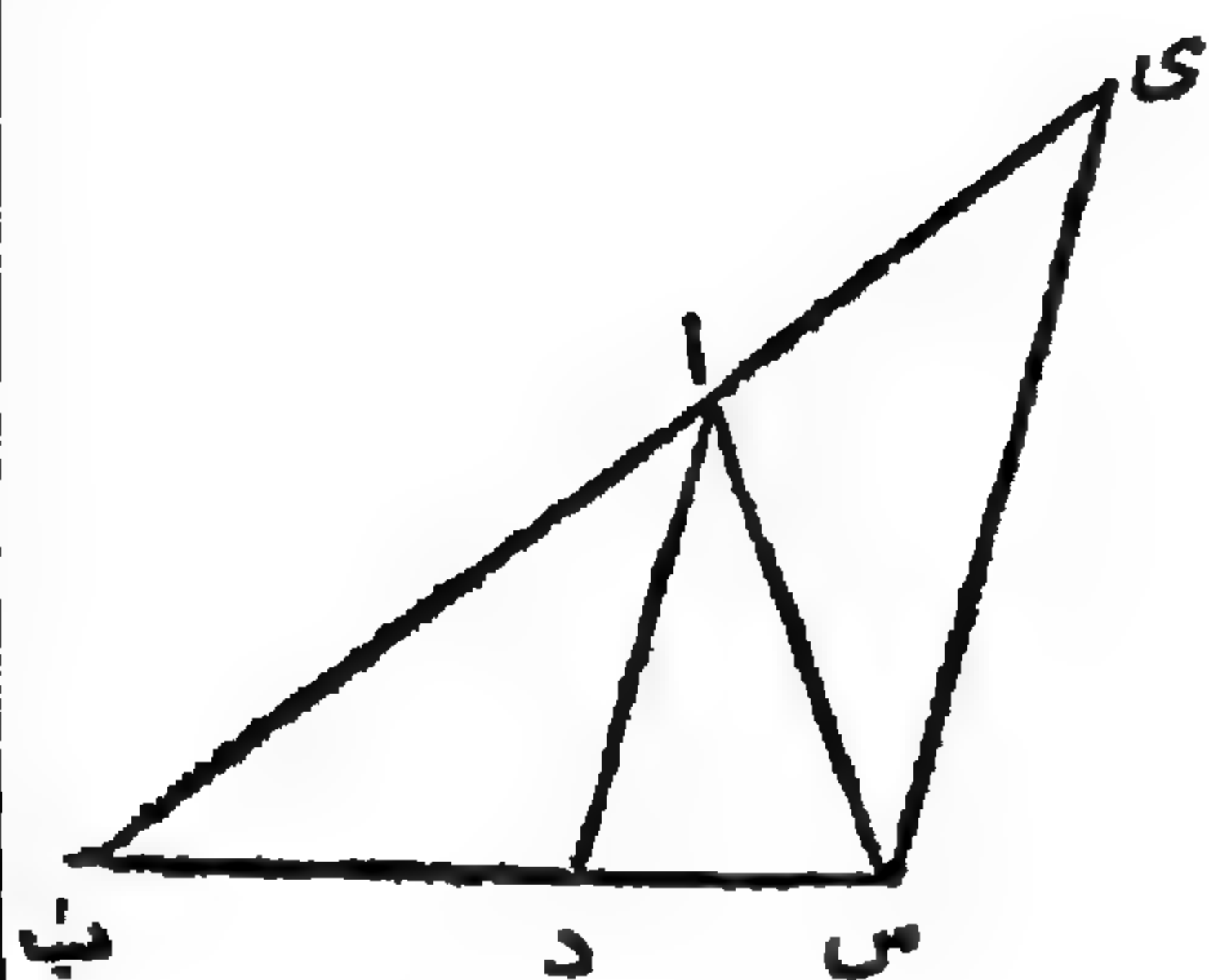
ليكن ا ب س مثلثاً ولتنصف الراوية ب ا س منه بالخط المستقيم ا د الذي يقطع القاعدة في د فنسبة ب د : د س ::



من النقطة س ا رسم س ي حتي يوازي دا وليلاق ب ا بعد اخراجه في ي . فلان الخط المستقيم ا س يلاقي الخطين المتوازيين ا د ي س فالزاوية ا س ي تعدل المتبادلة

س ا د (ق ٢٩ ك ١) وس ا د حسب المفروض تعدل ب ا د فالزاوية ب ا د تعدل  
اس ي. ولأن الخط المستقيم ب ا ي يلاقي المتوازيين ا د ي س فالزاوية الخارجة  
ب ا د تعدل الداخلة المقابلة ا ي س. ولكن ب ا د تعدل اس ي فالزاوية اس ي  
تعدل ا ي س فالضلع ا ي يعدل الضلع س ا (ق ٦ ك ١) ولكون ا د قد رسم  
حتى يوازي ي س احد اضلاع المثلث ب ي س فنسبة ب د : د س :: ب ا : ا ي  
(ق ٢ ك ٦) و ا ي = اس فاذا ب د : د س :: ب ا : اس (ق ٧ ك ٥)

ثم لنفرض ب د : د س :: ب ا : اس. ا رسم ا د فالزاوية ب ا س قد تنصفت  
بالخط المستقيم ا د



ثم الشكل كما تقدم. فلكون  
ب د : د س :: ب ا : اس وب د :  
د س :: ب ا : ا ي (ق ٢ ك ٦) لأن  
ا د يوازي ي س فنسبة ا ب : اس ::  
ا ب : ا ي (ق ١ ك ٥) فاذا اس =  
ا ي (ق ٩ ك ٥) والزاوية ا ي س =

اس ي (ق ٥ ك ١) و ا ي س تعدل الخارجة المقابلة ب ا د واس ي تعدل المتبادلة  
س ا د (ق ٢٩ ك ١) فالزاوية ب ا د = س ا د فقد تنصفت الزاوية ب ا س بالخط  
المستقيم ا د

### قضية ألف. ن

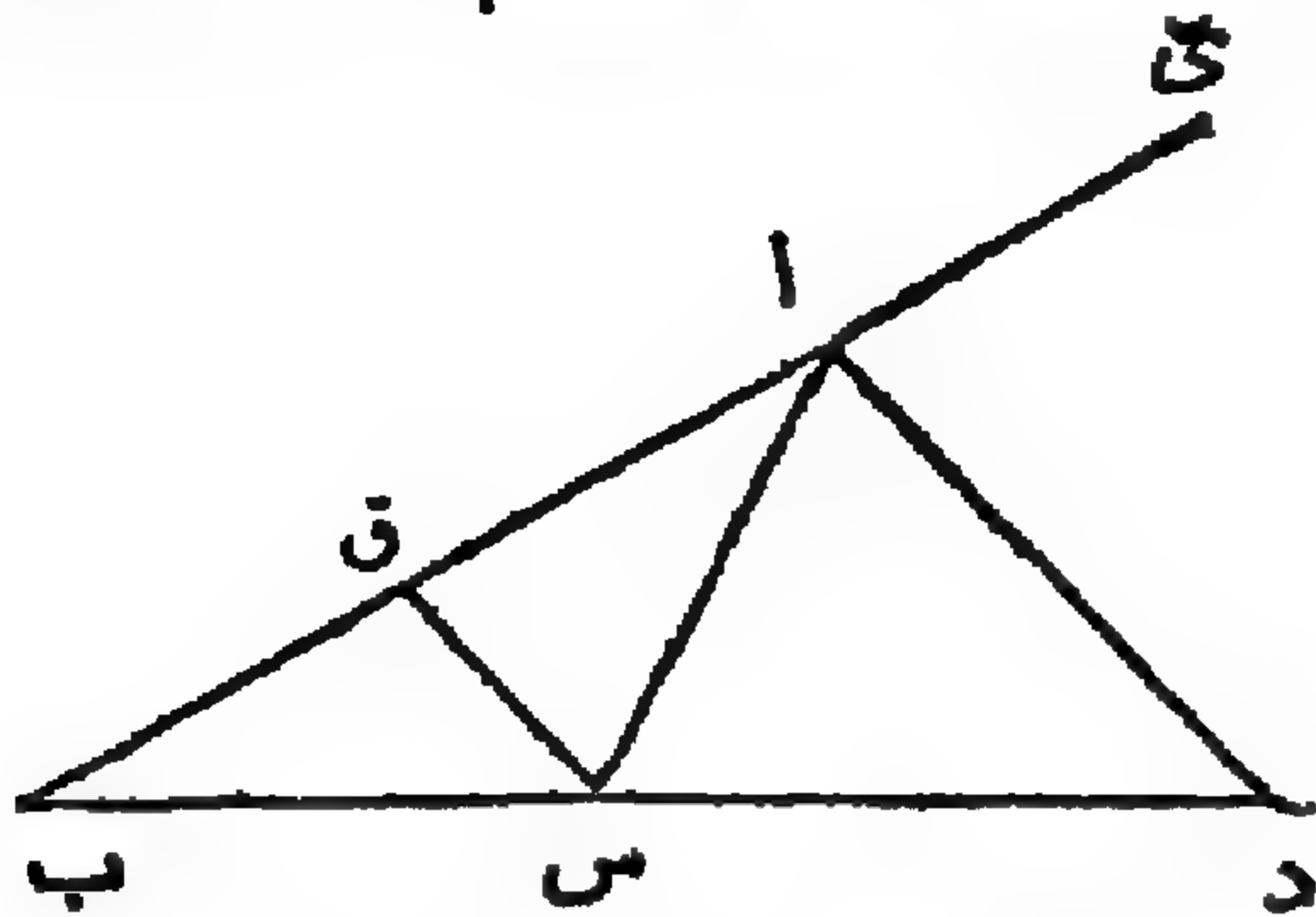
اذا تنصفت الزاوية الخارجة من مثلث بخط مستقيم يقطع القاعدة  
بعد اخراجها فنسبة القسمين بين الخط القاطع وطرفي القاعدة  
بعضها الى بعض كنسبة الضلعين الاخرين من المثلث بعضها الى  
بعض. واذا كانت نسبة قسمي القاعدة بعد اخراجها بعضها الى بعض  
كنسبة الضلعين الاخرين من المثلث بعضها الى بعض فالخط



الموصل بين نقطة القطع والزاوية المقابلة ينصف الزاوية الخارجة من  
المثلث

ليكن  $AB$  مثلثاً ولتتوسط زاوية الخارجة بالخط المستقيم  $AD$  الذي يلاقي  
القاعدة بعد اخراجها في د فنسبة  $B$  د :

د س ::  $B$  ا : ا س



من النقطة س ارسم س ق حتى

يوازي  $DA$  (ق ٢١ ك ١) فلكون الخط

المستقيم  $AS$  يلاقي المتوازيين  $AD$  س ق

فالزاوية  $AS$  ق تعدل المتبادلة س  $AD$  (ق ٢٩ ك ١) وس  $AD$  تعدل  $DA$  حسب

المفروض فالزاوية  $DA$  س ق تعدل  $AS$  ق. ولكون الخط المستقيم  $CA$  يلاقي

المتوازيين س ق  $DA$  فالزاوية الخارجة  $DA$  س ق تعدل الداخلة المتقابلة س ق  $CA$  وقد

تبين ان  $AS$  ق تعدل  $DA$  س ق فالزاوية  $AS$  ق تعدل الزاوية س ق  $CA$  والضلع

س  $AC$  يعدل الضلع  $CA$  (ق ٦ ك ١) ولكون  $AD$  يوازي س ق ضلعاً من المثلث

$AS$  ق فنسبة  $B$  د الى د س كنسبة  $B$  الى ا ق (ق ٢ ك ٦) و  $AC$  يعدل  $AS$

فنسبة  $B$  د : د س ::  $B$  ا : ا س

ثم لنفرض  $B$  د : د س ::  $B$  ا : ا س. ارسم  $AD$ . فالزاوية س  $AD$  تعدل الزاوية

$DA$  س ق. ثم الشكل كما تقدم. فلكون  $B$  د : د س ::  $B$  ا : ا س وب  $B$  د : د س ::  $B$  ا

: ا ق (ق ٢ ك ٦) فنسبة  $B$  ا : ا س ::  $B$  ا : ا ق (ق ١١ ك ٥) و  $AS$  يعدل ا ق

(ق ٩ ك ٥) والزاوية ا ق س تعدل الزاوية ا س ق (ق ٥ ك ١) والزاوية ا ق س

تعدل الخارجة  $DA$  و  $AS$  ق تعدل المتبادلة س  $AD$  فالزاوية  $DA$  س  $AD$

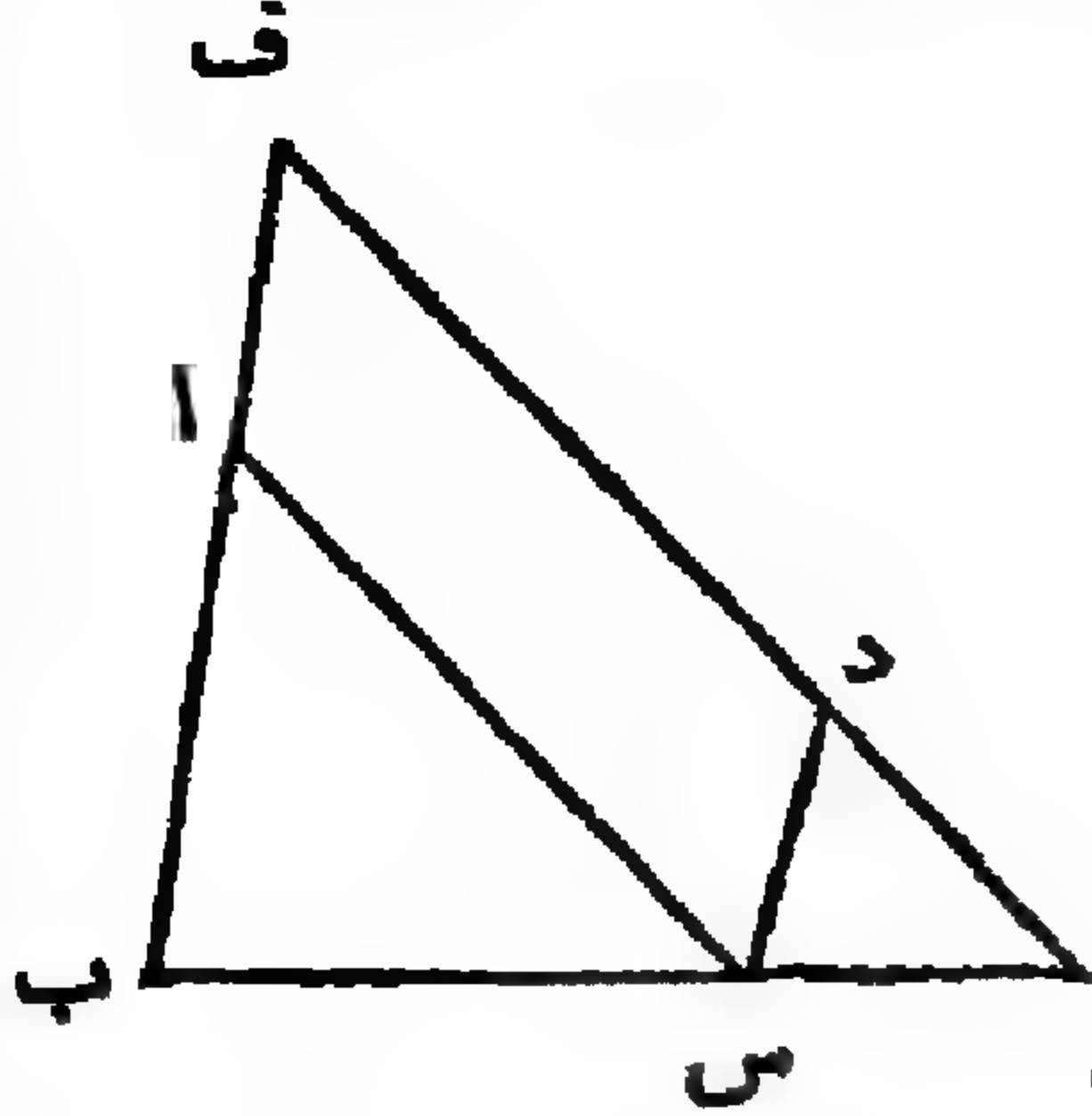
### القضية الرابعة. ن

في مثلثات متساوية الزوايا الاضلاع التي تلي الزوايا المتساوية هي

متناسبة والاضلاع المقابلة الزوايا المتساوية هي متشابهة اي هي

سوايق نسب وتواليها

ليكن  $ا ب س$  دس  $ي$  مثلثين متشابهين اي متساويي الزوايا ا ب س الزاوية  
 $ا ب س$  تعدل دس  $ي$  والزاوية  $ا س ب$  تعدل دس  $ي$  وبالنسبة (فرع ق ٢٢ ك ١)



الزاوية  $ب ا س$  تعدل دس  $ي$  فالاضلاع  
 التي تلي هذه الزوايا المتساوية هي متناسبة  
 والاضلاع التي تقابلها هي متشابهة

ليوضع المثلثان حتى يمس احدهما  
 الآخر ويكون الضلع  $ب س$  من الواحد  
 و  $ي س$  من الاخر على استقامة واحدة

فالزاويتان  $ا ب س$   $ا ب س$  معاقل من قائمتين (ق ١٧ ك ١) و دس  $ي س = ا س ب$   
 فالزاويتان  $ا ب س$   $ا ب س$  دس  $ي س$  معاقل من قائمتين فاذا اخرج  $ب ا$  و  $ي د$  يلتقيان  
 (فرع اول ق ٢٩ ك ١) فلينجرا حتى يلتقيا في  $ف$ . فلكون الزاوية  $ا ب س$  تعدل  
 دس  $ي$  فالخط  $ب ف$  يوازي  $س د$  (ق ٢٨ ك ١) ولكون  $ا س ب$  تعدل دس  $ي س$   
 فالخط  $ا س$  يوازي  $ف ي$  (ق ٢٨ ك ١) فالشكل  $ا س د$  متوازي الاضلاع و  $ا ف$   
 يعدل  $س د$  و  $ا س$  يعدل  $ف د$  (ق ٢٤ ك ١) ولكون  $ا س$  يوازي  $ف ي$  احد اضلاع  
 المثلث  $ف ب ي$  فسيب  $ا : ف :: ب : س :: ي : س$  (ق ٢ ك ٦) و  $ا ف = س د$   
 فاذا  $ب ا : س د :: ب : س :: ي : س$  (ق ٧ ك ٥) وبالمباداة  $ب ا : ب : س :: س د : ا س$   
 (ق ١٦ ك ٥)

ولان  $س د$  يوازي  $ب ف$  فتنسبة  $ب : س :: ي : س :: ف : د :: د : ي$  (ق ٢ ك ٦)  
 ولكن  $ف د = ا س$  فتنسبة  $ب : س :: ي : س :: ا : س :: د : ي$  وبالمباداة  $ب : س :: ا : س :: د : ي$   
 $س : ي :: د : ي$  وقد تبهرن ان  $ا ب : ب : س :: د : س :: ي : و ب : س :: ا : س :: ي : ي$   
 فبالمساواة  $ب ا : ا س :: س د : د ي$

### القضية الخامسة. ن

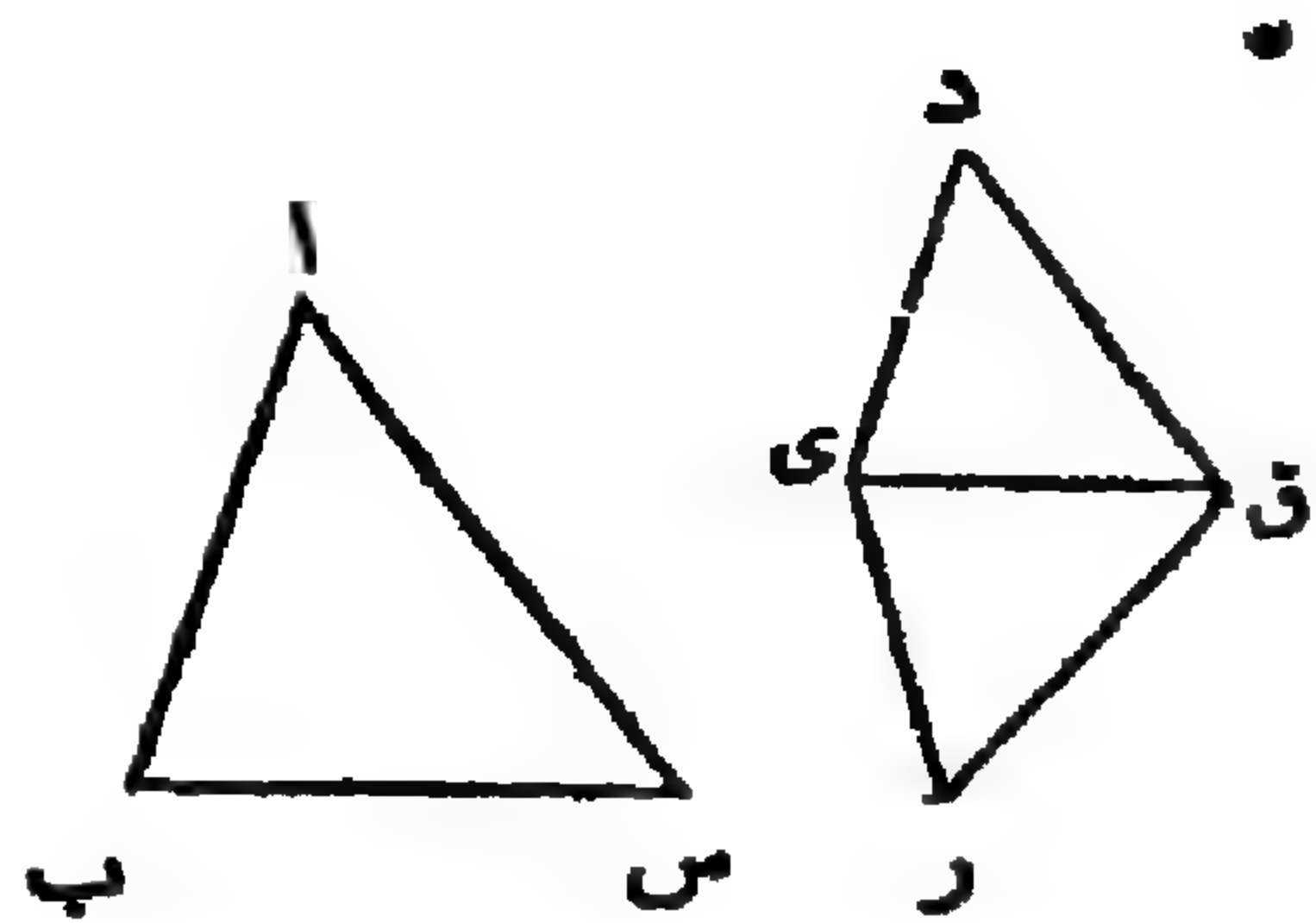
اذا كانت الاضلاع المحيطة بزوايا مثلثين متناسبة فالمثلثان متشابهان

وزواياها المتساوية تقابل اضلاعها المتناسبة

ليكن  $ا ب س$  دس  $ي$  ق مثلثين اضلاعها متناسبة اي  $ا ب : ب : س :: د : ي :$



ي ق وب س : س ا :: ي ق : ق د وب المساواة ب ا : س :: ي د : د ق فالمثلث  
ا ب س يشبه المثلث د ي ق اي زواياها متساوية والزوايا المتساوية تقابل الاضلاع  
المتناسبة اي الزاوية ا ب س تعدل د ي ق وب س ا تعدل ي ق د وب ا س  
تعدل ي د ق



في النقطتين ي وق من الخط  
المستقيم ي ق ا جعل الزاوية ق ي ر  
تعدل ا ب س (ق ٢٢ ك ١) والزاوية  
ي ق ر تعدل ا س ب فالباقية  
ب س ا تعدل الباقية ي ر ق (فرع

٤ ق ٢٢ ك ١) وزوايا المثلث ا ب س تعدل زوايا المثلث ي ر ق والاضلاع التي  
تقابل الزوايا المتساوية هي متناسبة (ق ٤ ك ٦) اي

ا ب : ب س :: ر ي : ي ق ولكن بالمفروض

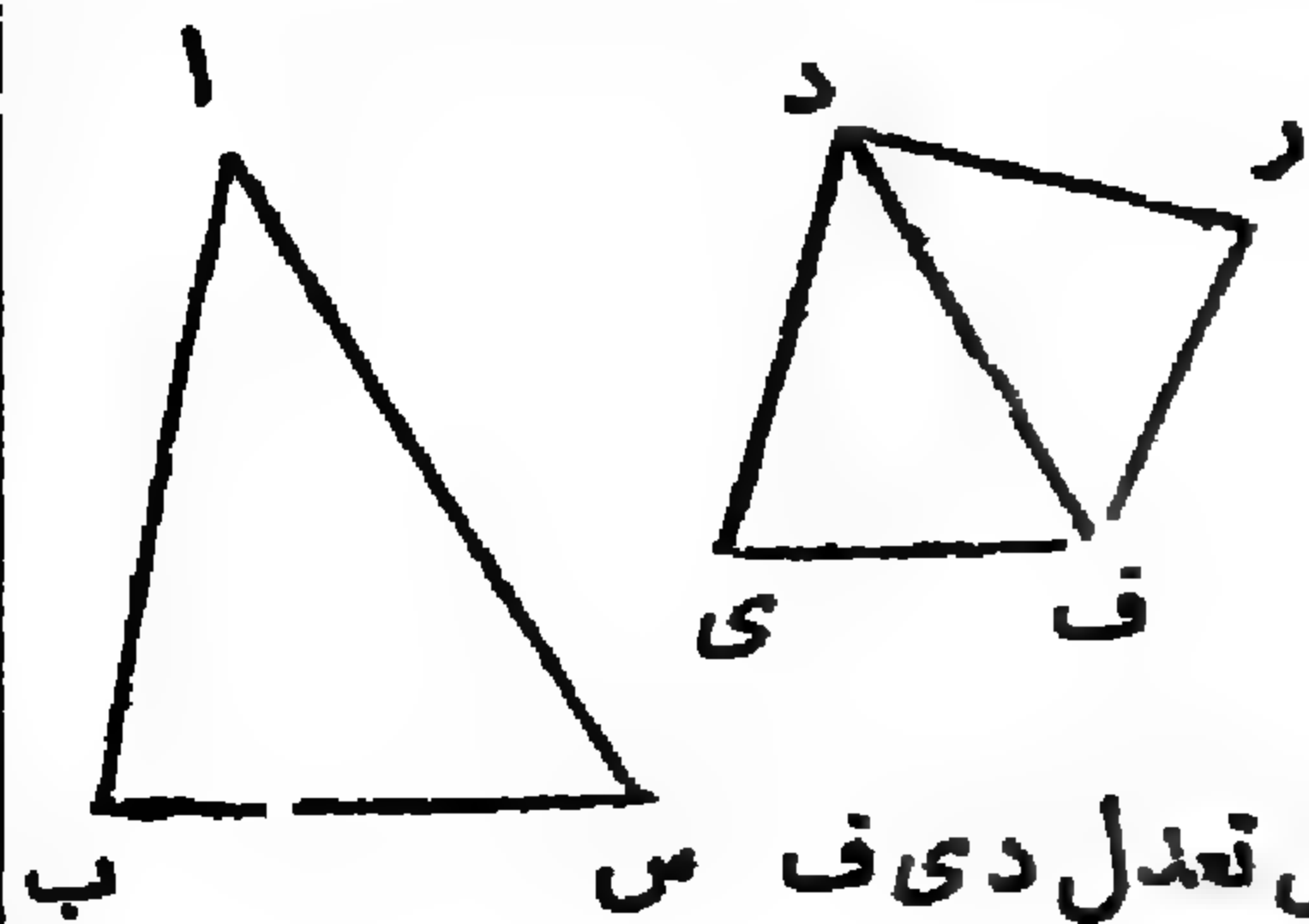
ا ب : ب س :: د ي : ي ق فاذا

د ي : ي ق :: ر ي : ي ق اي (ق ١١ ك ٥) د ي و ر ي

بينها وبين ي ق تناسب واحد فها متساويان (ق ٩ ك ٥) ولهذا السبب ايضاً  
د ق يعدل ق ر . ثم في المثلثين د ي ق ر ي ق الضلع د ي = ي ر و ي ق مشترك  
بينها والقاعدة د ق تعدل القاعدة ق ر فالزاوية د ي ق تعدل ر ي ق (ق ٨ ك ١)  
وبقية زوايا الواحد تعدل بقية زوايا الاخر اي التي تقابلها الاضلاع المتساوية  
(ق ٤ ك ١) فالزاوية د ق ي = ر ق ي و ي د ق = ي ر ق ولكن ر ي ق = ا ب س  
فاذا ا ب س = د ي ق ولهذا السبب ايضاً ا س ب = د ق ي والزاوية عندا تعدل  
الزاوية عند د فزوايا المثلث ا ب س تعدل زوايا المثلث د ي ق

### القضية السادسة. ن

في مثلثين اذا عدلت زاوية من الواحد زاوية من الآخر وكانت  
الاضلاع المحيطة بهما متناسبة فالمثلثان متشابهان والزوايا التي تقابل  
الاضلاع المتناسبة متساوية



ليكن ا ب س د ي ف مثلثين  
ولكن الزاويتان ب ا س ي د ف  
متساويتين والاضلاع المحيطة بهما  
متناسبة اي ب ا : س ي :: د ي : د ف

د ف فالمثلثان متشابهان والزاوية ا ب س تعدل د ي ف س  
واس ب تعدل د ف ي

في النقطتين د و ف من الخط المستقيم د ف ا جعل الزاوية ف د ر تعدل  
احدى الزاويتين ب ا س او ي د ف (ق ٢٢ ك ١) واجعل الزاوية د ف ر تعدل  
اس ب فالباقيـة ا ب س تعدل الباقيـة د ر ف (فرع ٤ ق ٢٢ ك ١) والمثلث ا ب س  
يشبه المثلث د ر ف فلنا (ق ٤ ك ٦)

ب ا : س ي :: د ف : د ر وبالمفروض

ب ا : س ي :: د ف : د ف فاذا (ق ١١ ك ٥)

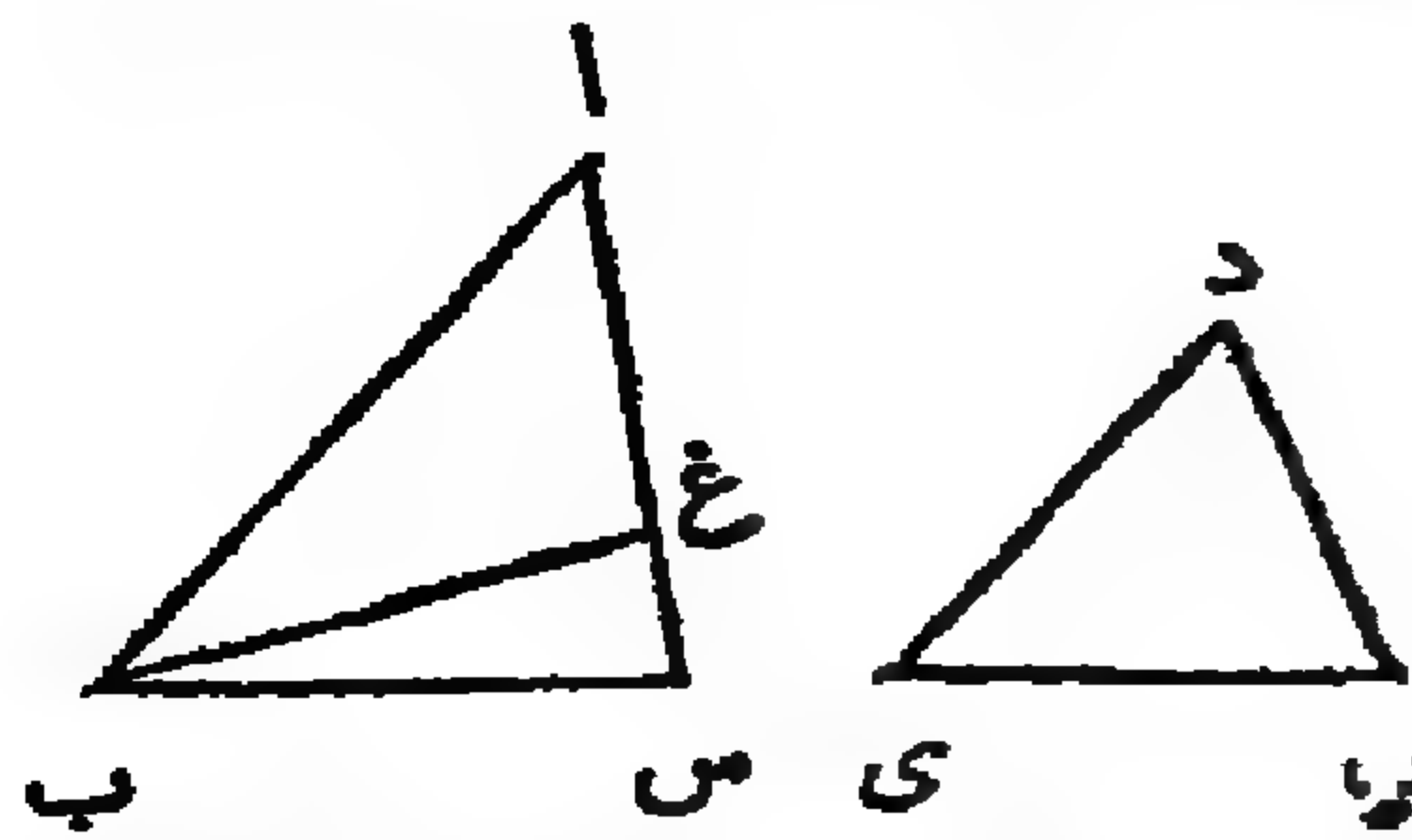
ي د : د ف :: د ر : د ف اي ي د = د ر (ق ٩ ك ٥)

ود ف مشترك بين المثلثين ي د ف ر د ف فالضلعان ي د د ف يعدلان  
الضلعين ر د د ف. ولكن الزاوية ي د ف = ر د ف فالقاعدة ي ف تعدل القاعدة  
ر ف (ق ٤ ك ١) والمثلث ي د ف يعدل المثلث ر د ف وبقية الزوايا من الواحد  
تعدل بقية الزوايا من الاخر اي التي تقابلها الاضلاع المتساوية. فالزاوية د ف ر  
تعدل د ف ي و د ر ف تعدل د ي ف. ولكن الزاوية د ف ر تعدل اس ب  
فالزاوية اس ب تعدل د ف ي وبالمفروض ب ا س = ي د ف فالاخرى ا ب س  
تعدل الاخرى د ي ف فالمثلث ا ب س يشبه المثلث د ي ف

### القضية السابعة. ن

في مثلثين اذا عدلت زاويةً من الواحد زاويةً من الآخر والاضلاع  
المحيطة بزاويتين اخريين متناسبة فاذا كانت كل واحدة من بقية الزوايا  
اصغر من قائمة او لم تكن اصغر من قائمة فالمثلثان متشابهان والزاويا  
التي تليها الاضلاع متناسبة متساوية





ليكن اب س دى ف مثلثين  
والزاوية ب اس فلتعدل ي د ف  
وليكن الاضلاع المحيطة بزائويتين

اخرين اب س دى ف متناسبة اى  
اب : ب س :: دى : ي ف واولا لتكن كل واحدة من الزائويتين الباقيتين عند  
س وف اصغر من قائمة فالمثلث اب س يشبه المثلث دى ف اى الزاوية اب س  
= دى ف والزاوية الباقية عند س تعدل الباقية عند ف

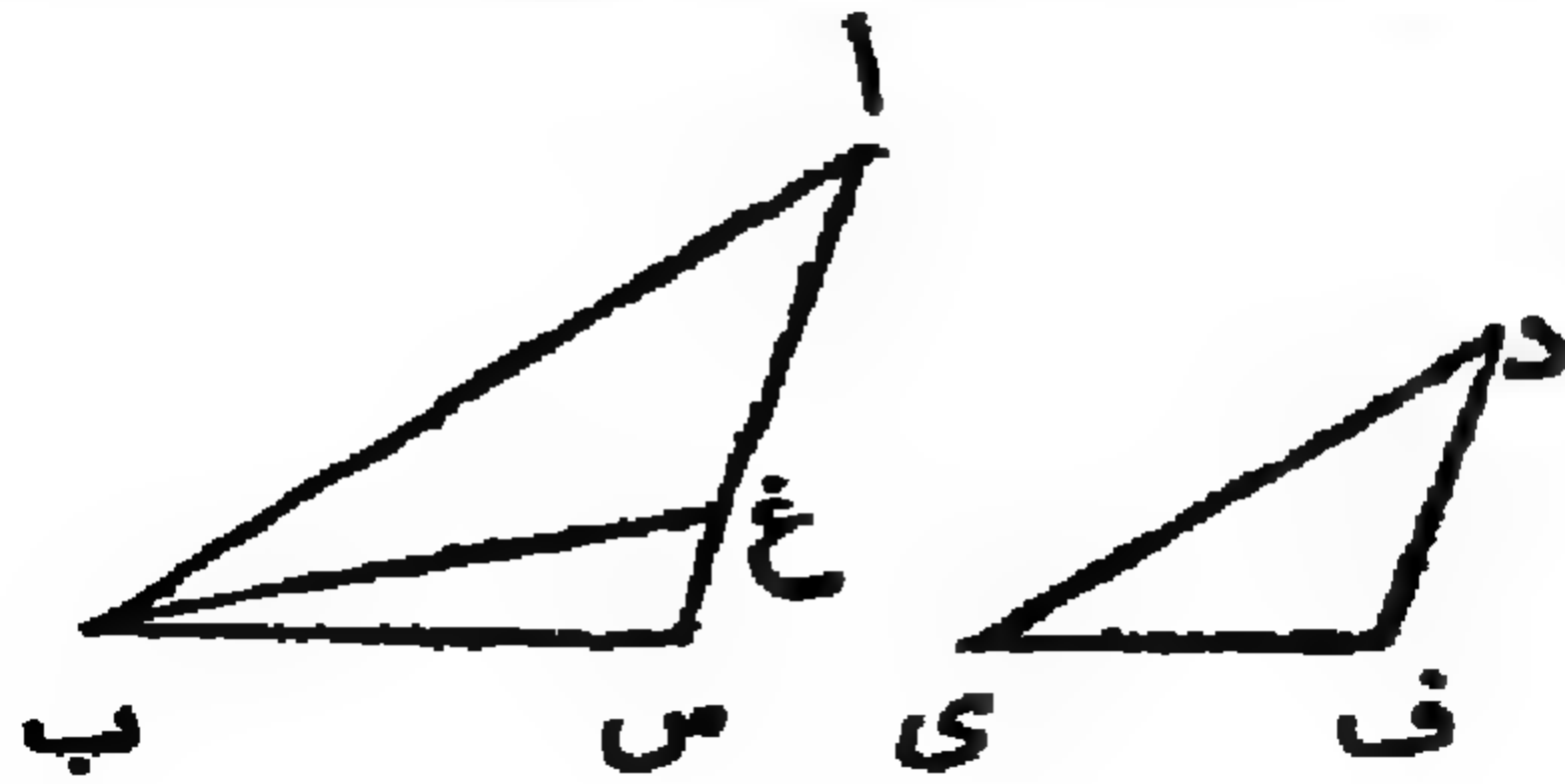
لانه ان لم تكن الزائويتان اب س دى ف متساويتين فاحداها اكبر من الاخرى  
لتكن اب س اكبرها وعند النقطة ب في الخط المستقيم اب اجعل الزاوية اب غ  
تعدل دى ف (ق ٢٢ ك ١) فحسب المفروض الزاوية ب اب غ تعدل ي د ف وقد  
جعلت اب غ = دى ف فالباقية اب غ ب تعدل الباقية دى ف (فرع ٤ ق ٢٢  
ك ١) وزوايا المثلث اب غ تعدل زوايا المثلث دى ف فلنا (ق ٤ ك ١)

اب : ب غ :: دى : ي ف وبالمفروض

دى : ي ف :: اب : ب س فاذا (ق ١١ ك ٥)

اب : ب س :: اب : ب غ اى بين اب والنقطتين ب س ب غ  
تناسب واحد فاذا ب س = ب غ (ق ٩ ك ٥) فالزاوية ب غ س = ب س غ  
(ق ٥ ك ١) ولكن بالمفروض ب س غ اصغر من قائمة فتكون ب غ س اصغر من  
قائمة فتكون الزاوية المتوالية اب غ ب اعظم من قائمة (ق ١٢ ك ١) وقد تبهرن ان  
اب غ = دى ف فتكون دى ف اعظم من قائمة وقد فرض انها اصغر من قائمة  
وذاك محال. فلا تكون الزائويتان اب س دى ف غير متساويتين اى هما متساويتان.  
والزاوية عند ا تعدل الزاوية عند د فالباقية عند س تعدل الباقية عند ف فالمثلث  
اب س يشبه المثلث دى ف

ثم ان لم تكن كل واحدة من الزائويتين عند س وف اصغر من قائمة فالمثلث



اب س يشبه المثلث دى ف. لانه اذا

رسم الشكل كما تقدم يبرهن ان ب س

= ب غ وب س غ = ب غ س

وب س غ ليست اصغر من قائمة فلا

تكون ب غ س اصغر من قائمة وزاويتان من المثلث ب غ س معاً لا تكونان اصغر من قائمتين وذاك غير ممكن (ق ١٧ ك ١) فيُبرهن ان المثلث ا ب س يشبه المثلث د ي ف حسباً تقدم



### القضية الثامنة. ن

في مثلث ذي قائمة اذا رُسم خط عمودي من القائمة الى القاعدة فالمثلثان الحادتان على جانبي العمود متشابهان ويشبهان ايضاً المثلث الاول

ليكن ا ب س مثلثاً ذا قائمة ب ا س ومن النقطة ا يرسم ا د عموداً على القاعدة ب س فالمثلثان ا ب د ا س د متشابهان ويشبهان ايضاً المثلث ا ب س. لأن الزاوية ب ا س تعدل الزاوية ا د ب لكون كل واحدة منها قائمة والزاوية عند ب مشتركة بين المثلثين ا ب س ا ب د فالزاوية الاخرى ا س ب تعدل الاخرى ب ا د (فرع ٤ ق ٢٢ ك ١) فالمثلثان ا ب س ا ب د متساويا الزوايا والاضلاع التي تلي الزوايا المتساوية متناسبة (ق ٤ ك ٦) فالمثلثان متشابهان (حد ١ ك ٦) وهكذا يبرهن ان المثلث ا د س يشبه المثلث ا ب س فالمثلثان ا د س ا ب د يشبهان المثلث ا ب س فيها متشابهان

فرع. يتضح من هذه القضية ان العمود على القاعدة من قائمة مثلث ذي قائمة هو متناسب متوسط بين قسَمَي القاعدة وان كل ضلع هو متناسب متوسط بين القاعدة والقطعة من القاعدة التي تلي ذلك الضلع. لان في المثلثين ب د ا ا د س لنا (ق ٤ ك ٦)

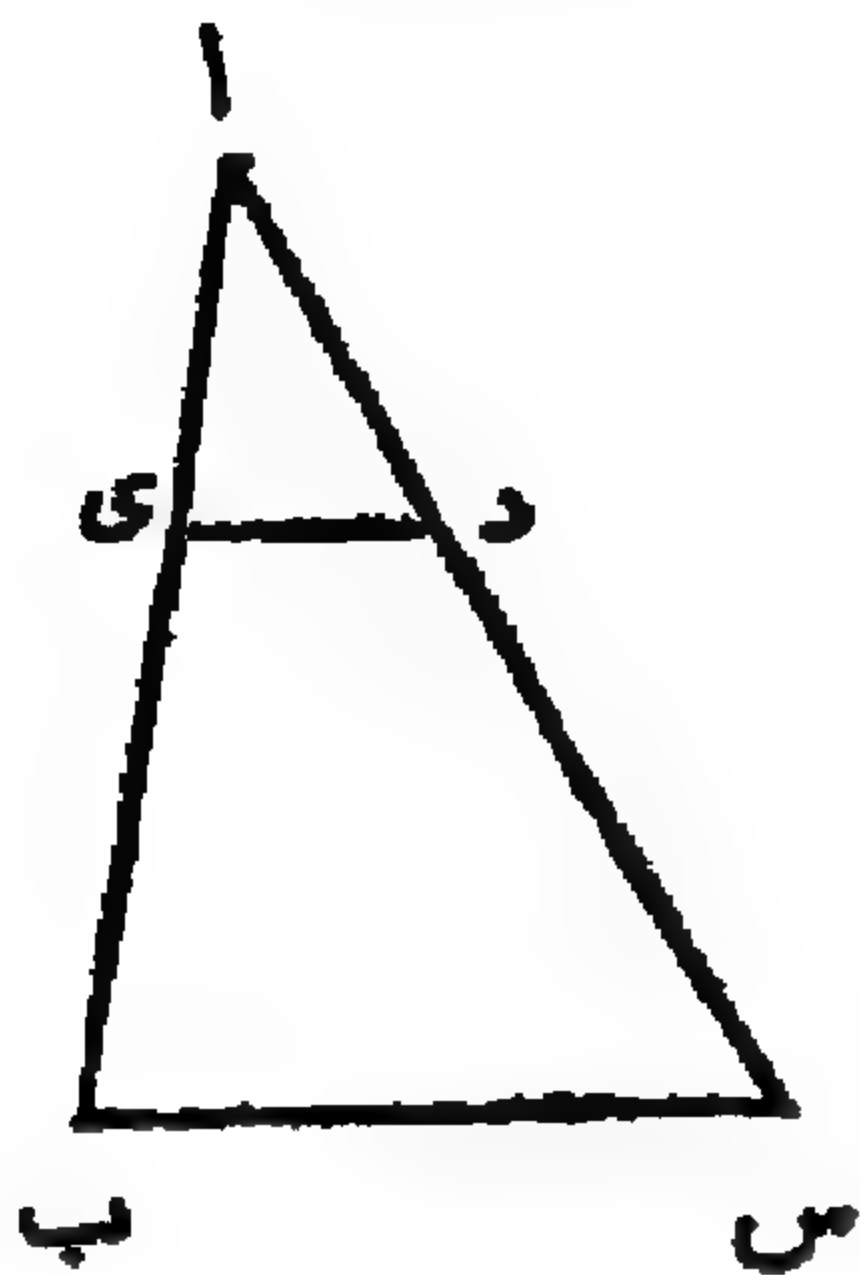
ب د : د ا :: د ا : د س	وفي المثلثين ا ب س ب د ا لـ (ق ٤ ك ٦)
ب س : ب ا :: ب ا : ب د	وفي المثلثين ا ب س ا س د (ق ٤ ك ٦)
ب س : س ا :: س ا : س د	



### القضية التاسعة. ع

علينا ان تقطع من خطٍ مستقيم جزءًا معينًا اب جزءًا بعدد الخط مرارًا  
مفروضة

ليكن اب الخط المستقيم المفروض. فعليًا ان تقطع منه جزءًا بعدد اب مرارًا  
مفروضة



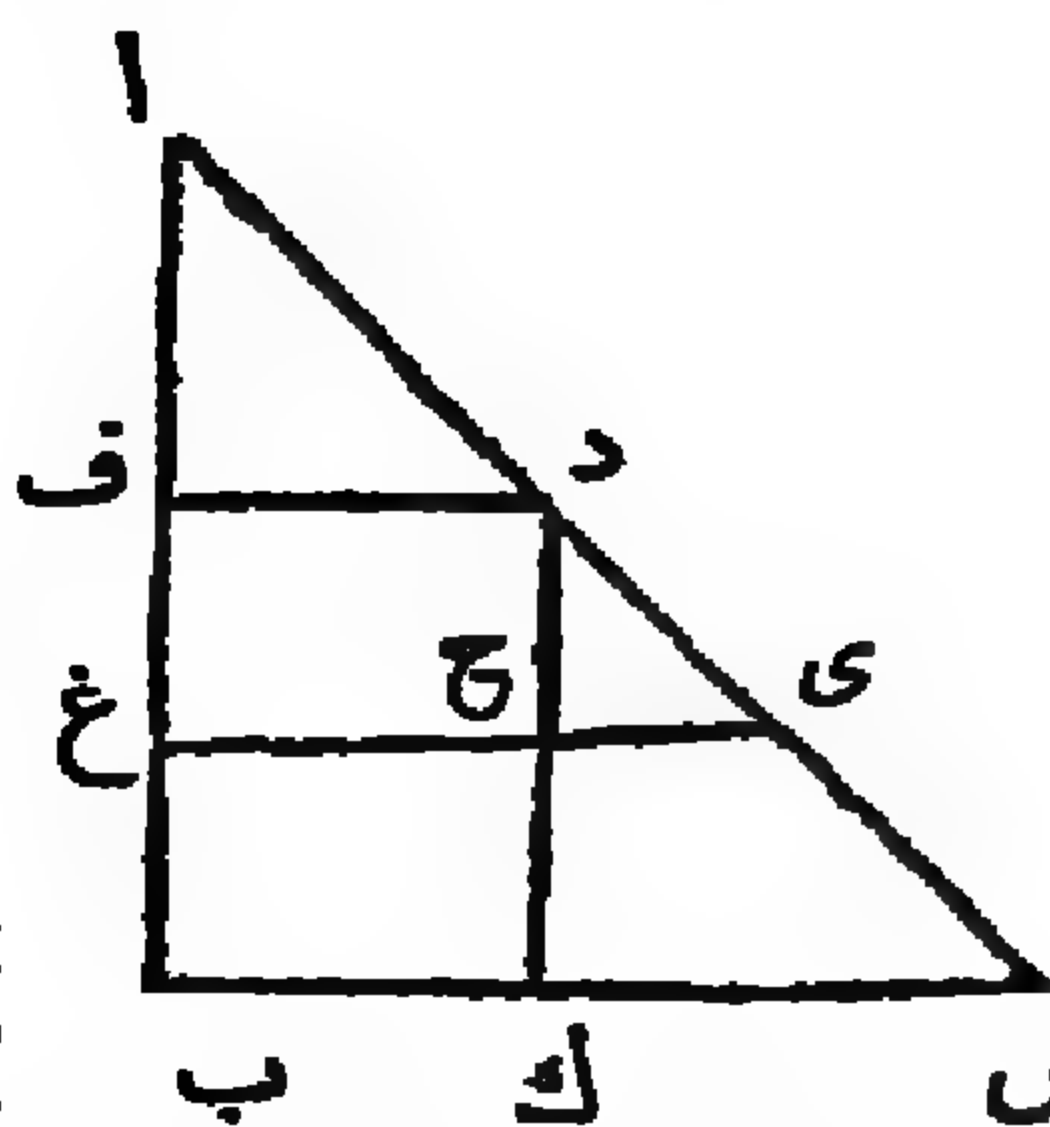
من النقطة ا ارسم الخط المستقيم اس حتى يجعل مع  
اب زاوية وفي اس افرض نقطة مثل د حتى ان اس  
بعدد ا د مرارًا تعدل المراس المفروضة للخط اب ان بعدد  
الجزء المطلوب قطعة. ارسم ب س ثم ارسم د ي حتى  
يوازي ب س

فلان د ي د يوازي ب س احد اضلاع المثلث فنسبة س د : د ا :: ب ي : ي ا  
(ق ٢ ك ٦) وبالتركيب (ق ١٨ ك ٥) س ا : ا د :: ب ا : ا ي. ولكن س ا هو  
مضروب من ا د فيكون ب ا ذات هذا المضروب من ا ي (ق ج ك ٥) اي بعدد ا ي  
كما ان اس بعدد ا د فاي جزء كان ا د من اس يكون ا ي ذات ذلك الجزء من  
اب فقد قطع من اب الجزء المفروض

### القضية العاشرة. ع

علينا ان تقسم خطًا مستقيمًا مفروضًا الى اقسام بينها النسبة الكائنة بين  
اقسام خط مستقيم مفروض

ليكن اب الخط المستقيم المفروض واس الخط المقسوم. علينا ان تقسم اب  
الى اقسام بينها النسبة الكائنة بين اقسام الخط اس



ليقسم اس في د ي وليضع اب اس حتى  
تحدث بينها زاوية وارسم ب س. ثم من المنطتين د  
وي ارسم د ف ي غ حتى يوازي ب س (ق ٢١ ك ١)  
ومن د ارسم د ح ك حتى يوازي اب. فكل واحد من  
الشكلين د غ ح ب متوازي الاضلاع ود ح = ف غ

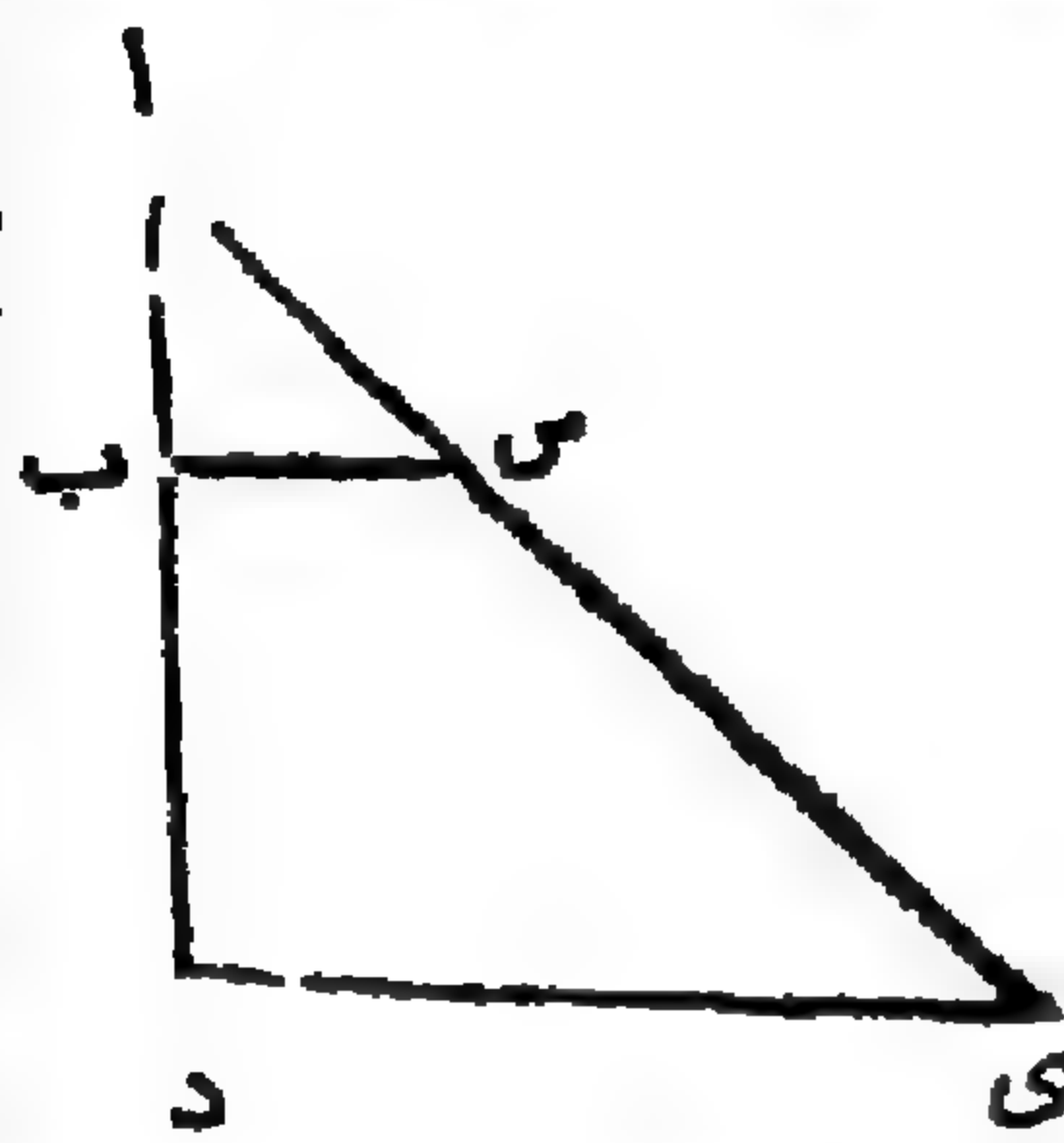
(ق ٢٤ ك ١) وح ك = غ ب . ولكون ح ي يوازي ك س احد اضلاع المثلث د ك س  
فنسبة س ي : ي د :: ك ح : ح د (ق ٢ ك ٦) ولكن ك ح = ب غ وح د = غ ف  
فتكون س ي : ي د :: ب غ : غ ف . ولكون ف د يوازي غ ي احد اضلاع المثلث  
اغ ي فنسبة ي د : د ا :: غ ف : ف ا وقد تبين ان س ي : ي د :: ب غ : غ ف  
وقد انقسم الخط المستقيم ا ب مثل انقسام الخط ا س

### القضية الحادية عشرة . ع

علينا ان نجد خطاً ثالثاً مناسباً لخطين مستقيمين مفروضين

ليكن ا ب ا س الخطين المستقيمين المفروضين فليوضعا حتى يتحدث بينهما

زاوية . علينا ان نجد خطاً ثالثاً يناسبها



اخرج ا ب ا س الى دوى واجعل ب د

يعدل ا س . ا رسم ب س ثم من النقطة د ا رسم د ي

حتى يوازي ب س . فلأن ب س يوازي د ي

ضلعاً من المثلث ا د ي فنسبة ا ب : ب د :: ا س :

س ي (ق ٢ ك ٦) ولكن ب د = ا س فنسبة

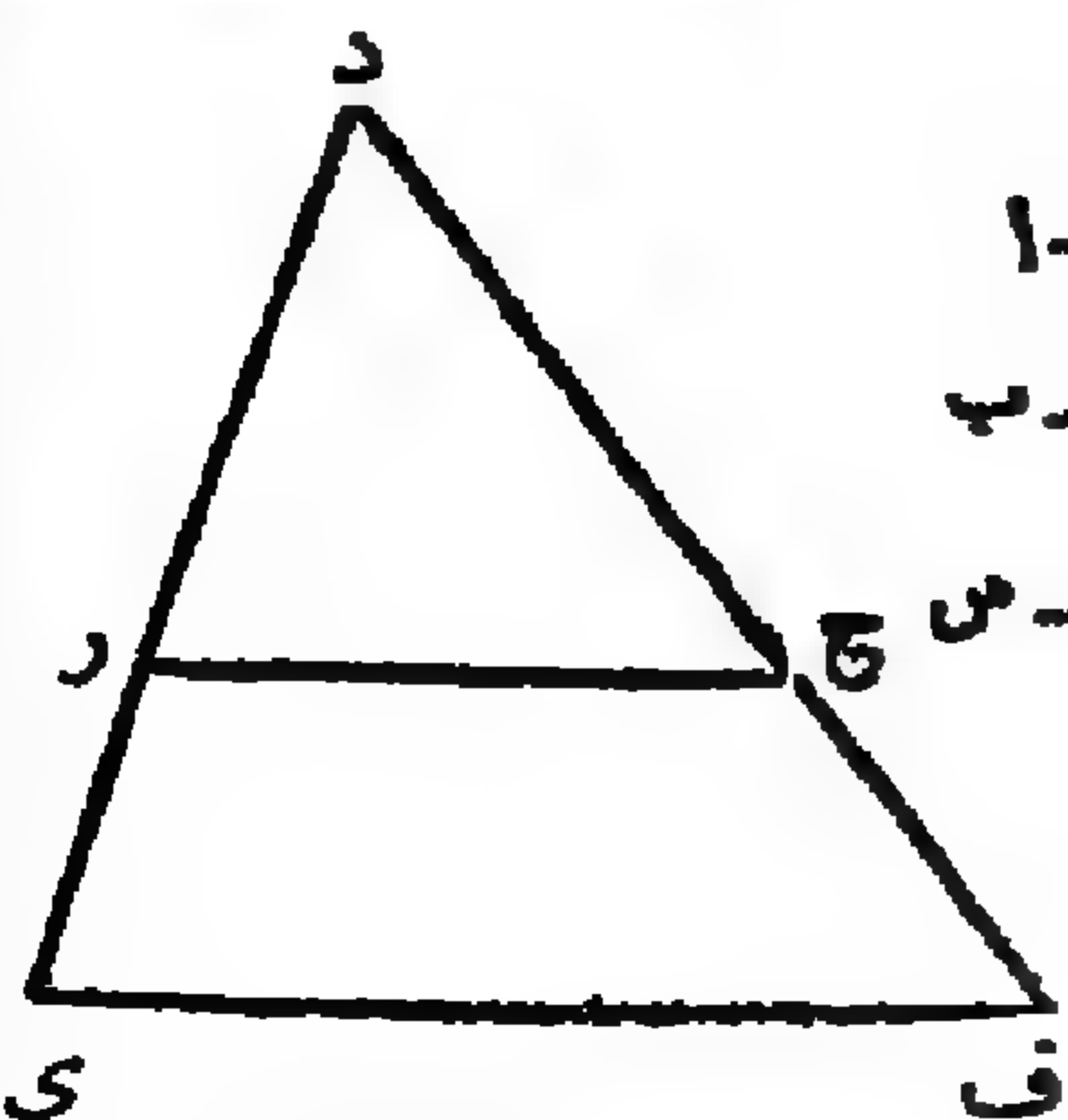
ا ب : ا س :: ا س : س ي فالخط س ي انما هو مناسب ثالث للخطين المفروضين

### القضية الثانية عشرة . ع

علينا ان نجد مناسباً رابعاً لثلاثة خطوط مستقيمة مفروضة

ليكن ا و ب و س الخطوط الثلاثة المستقيمة المفروضة . علينا ان نجد خطاً

رابعاً يناسبها



ا —————

ب —————

س —————

لفرض خطين

مستقيمين د ي د ف

بينها زاوية ي د ف .

ومنها افصل د ر حتى

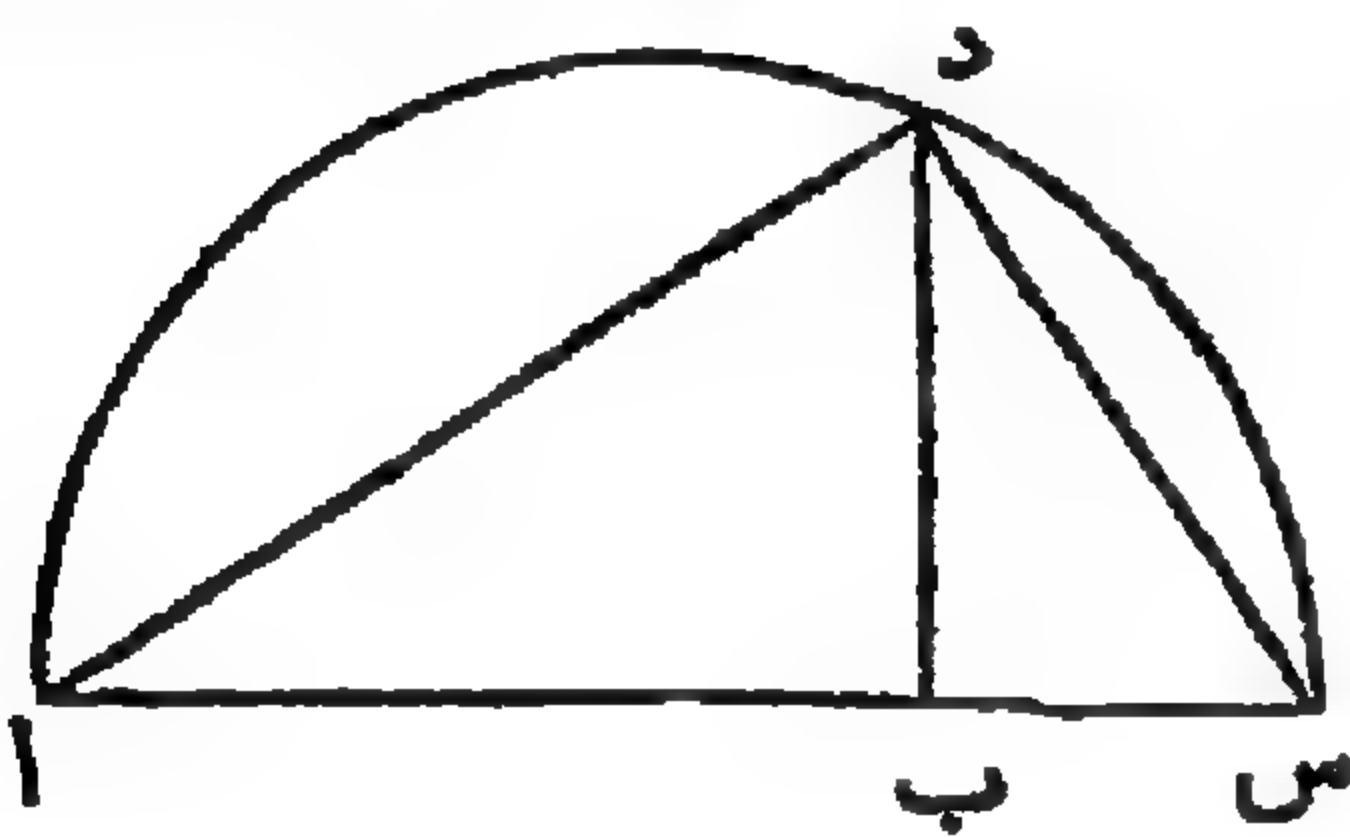
يعدل ا و رى حتى



يعدل ب ودح حتى يعدل س . ا رسم رح ثم ا رسم ي ف حتى يوازي رح (ق ٢١ ك ١) . فلأن رح يوازي ي ف احد اضلاع المثلث د ي ف فنسبة در : ر ي :: دح : ح ف (ق ٢ ك ٦) ولكن در = ا ور ي = ب ودح = س فنسبة ا : ب :: س : ح ف . فالخط ح ف انما هو مناسب رابع للخطوط الثلاثة المفروضة

### القضية الثالثة عشرة . ع

علينا ان نجد متناسباً متوسطاً بين خطين مستقيمين مفروضين  
ليكن ا ب ب س الخطين المستقيمين المفروضين . علينا ان نجد متناسباً



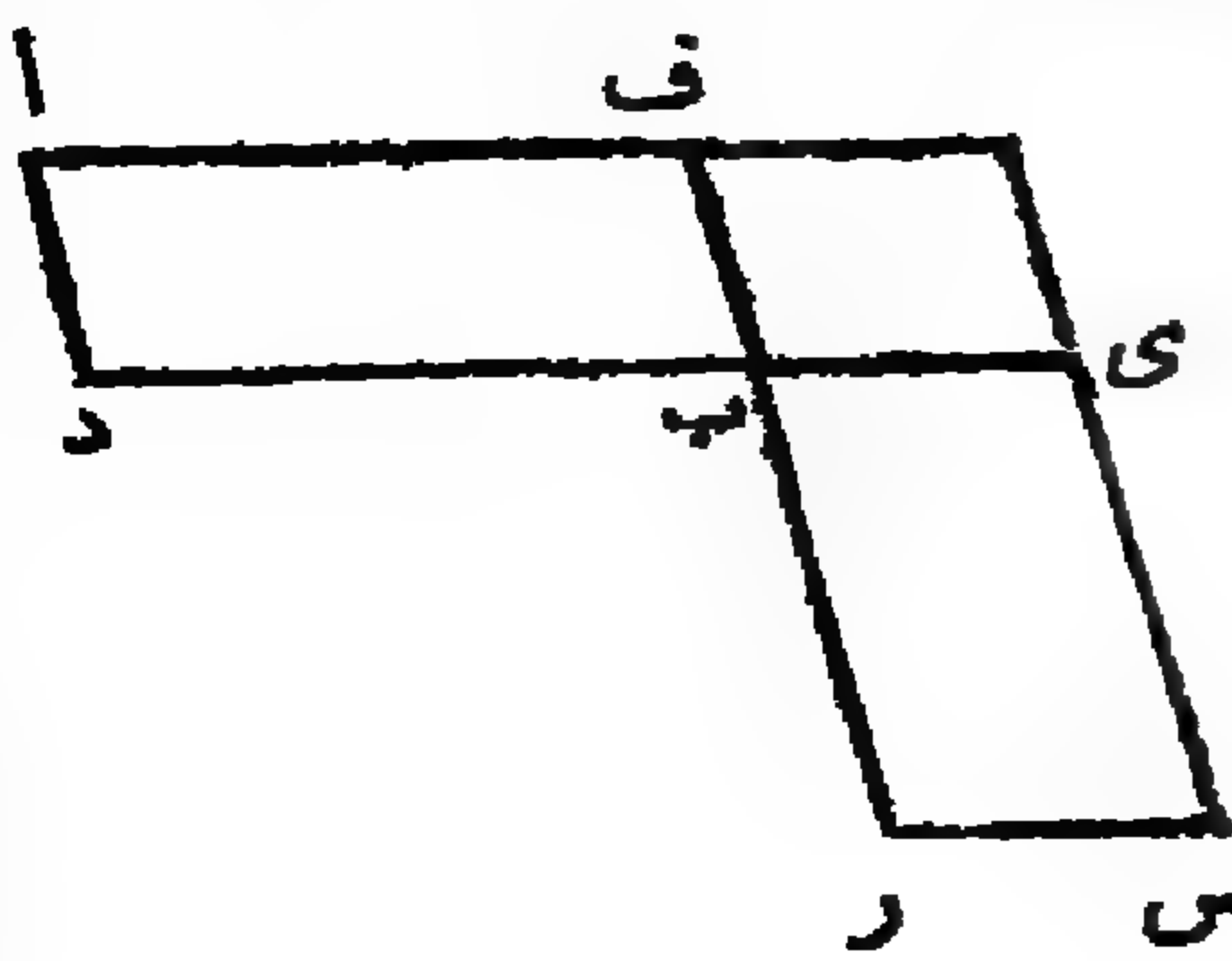
متوسطاً بينهما . اجعل ا ب ب س على استقامة واحدة وعلى ا س ا رسم نصف دائرة ا د س . ومن النقطة ب ا رسم ب د عموداً على ا س (ق ١١ ك ١) ثم ا رسم ا د و د س

لأن ا د س قائمة لكونها في نصف دائرة (ق ٢١ ك ٢) وقد رسم د ب عموداً من القائمة على القاعدة فالخط د ب انما هو متناسب متوسط بين قسبي القاعدة (فرع ق ٨ ك ٦) فقد وجدنا د ب متناسباً متوسطاً بين الخطين المفروضين ا ب ب س

### القضية الرابعة عشرة . ن

في شكلين متوازيي الاضلاع متساويين اذا عدلت زاوية من الواحد زاوية من الآخر تكون الاضلاع المحيطة بالزاويتين المتساويتين متناسبة بالتكافؤ . واذا عدلت زاوية من شكل متوازي الاضلاع زاوية من اخر متوازي الاضلاع وكانت الاضلاع المحيطة بالزاويتين المتساويتين متناسبة بالتكافؤ فالشكلان متساويان

ليكن ا ب ب س شكلين متوازيي الاضلاع متساويين لهما الزاويتان عند ب



متساويتان وليكن الضلعان د ب ب ي  
على استقامة واحدة فيكون الضلعان ر ب  
ب ف ايضاً على استقامة واحدة (ق ١٤ ك)  
فاضلاع الشكلين ا ب ب ي  
المحيطة بالزاويتين المتساويتين هي متناسبة  
بالتكافؤ اي نسبة د ب : ب ي :: ر ب : ب ف

ثم الشكل ف ي. فلان الشكلين ا ب ب ي متساويان وف ي شكل  
اخر متوازي الاضلاع فلنا ا ب : ف ي :: ب ي : ف ي (ق ٧ ك ه)  
والشكلان ا ب ب ي لهما علو واحد فلنا

ا ب : ف ي :: د ب : ب ي (ق ١ ك ٦) وايضاً

ب ي : ف ي :: ر ب : ب ف (ق ١ ك ٦) فاذا

د ب : ب ي :: ر ب : ب ف (ق ١ ك ه) فاضلاع

الشكلين ا ب ب ي المحيطة بالزاويتين المتساويتين متناسبة بالتكافؤ.

ثم لنفرض ان هذه الاضلاع متناسبة بالتكافؤ اي د ب : ب ي :: ر ب : ب ف

فالشكل ا ب يعدل الشكل ب ي. لان د ب : ب ي :: ر ب : ب ف وايضاً

د ب : ب ي :: ا ب : ف ي وايضاً ر ب : ب ف :: ب ي : ف ي فاذا

ا ب : ف ي :: ب ي : ف ي (ق ١ ك ه)

فالشكل ا ب يعدل الشكل ب ي (ق ٩ ك ه)

### القضية الخامسة عشرة.

في مثلثين متساويين لهما زاوية من الواحد تعدل زاوية من الآخر تكون

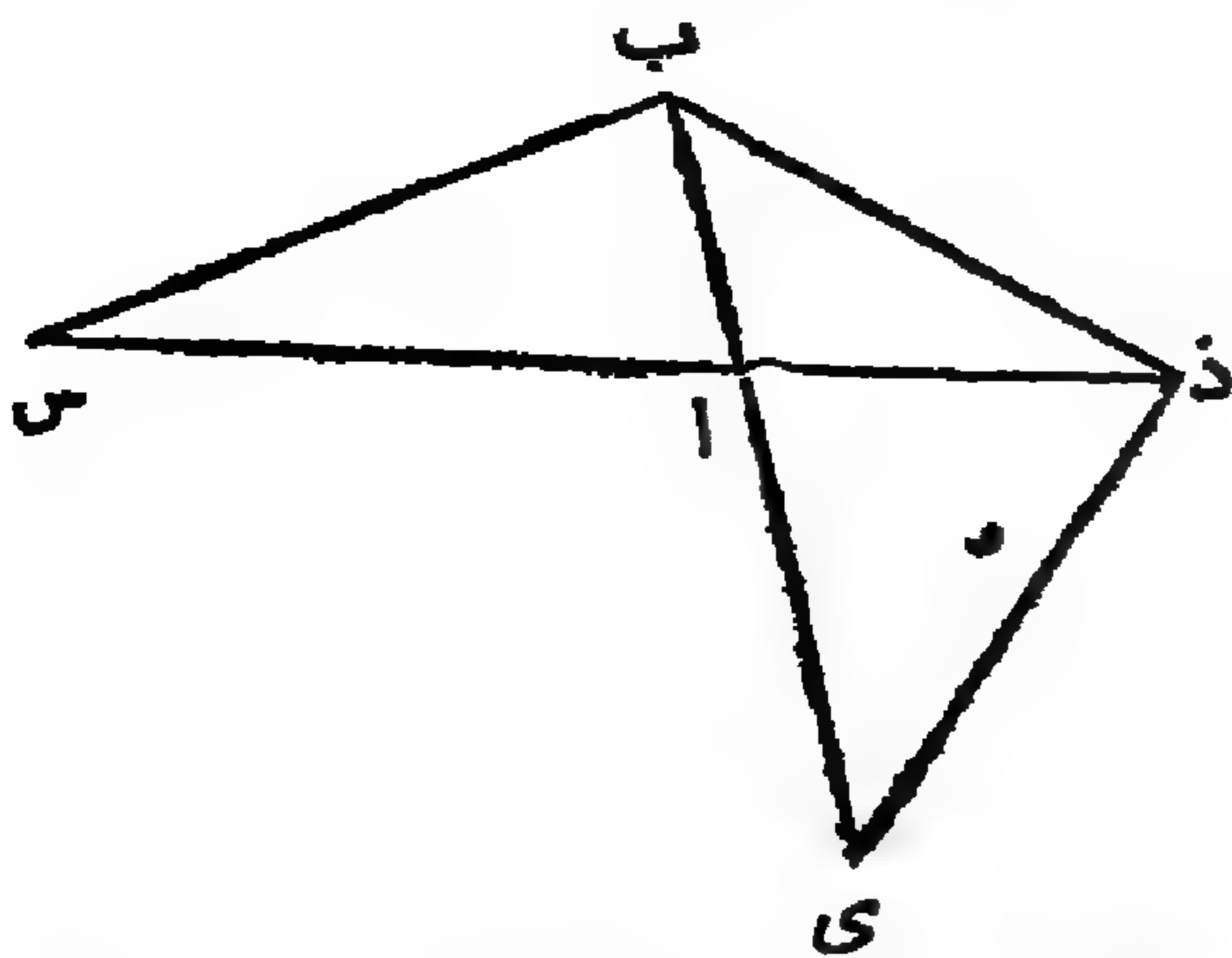
الاضلاع المحيطة بالزاويتين المتساويتين متناسبة بالتكافؤ. واذا عدلت

زاوية من الواحد زاوية من الآخر وكانت الاضلاع المحيطة بهاتين

الزاويتين متناسبة بالتكافؤ فالمثلثان متساويان

ليكن ا ب ي ا د ي مثلثين متساويين والزاوية ب ا ي فلتعدل الزاوية





داى فالاضلاع المحيطة بهاتين  
الزاويتين المتساويتين متناسبة  
بالتكافؤ اي س ا : ا د :: د س ا : ا ب

ليوضع المثلثان حتى يكون  
الضلعان س ا ا د على استقامة

واحدة فيكون س ا ا ب ايضاً على استقامة واحدة (ق ١٤ ك ١) ارسم ب د. فليكون  
المثلث ا ب س يعدل المثلث ا د س فنسبة المثلث س ا ب الى المثلث ب ا د  
كالمثلث س ا د الى ب ا د ولكن س ا ب : ب ا د :: س ا : ا د ونسبة س ا د :  
ب ا د :: س ا : ا ب فاذا س ا : ا د :: س ا : ا ب (ق ١١ ك ٥) فالاضلاع المحيطة  
ب الزاويتين المتساويتين متناسبة بالتكافؤ

ثم لنفرض ان هذه الاضلاع المحيطة بالزاويتين المتساويتين متناسبة بالتكافؤ  
فالمثلث ا ب س يعدل المثلث ا د س. ارسم ب د كما تقدم. فلان س ا : ا د :: س ا :  
ا ب وايضاً لان س ا : ا د :: المثلث ا ب س : المثلث ب ا د (ق ١١ ك ٦) وايضاً  
س ا : ا ب :: المثلث س ا د : المثلث ب ا د. فالمثلث ا ب س : المثلث ب ا د ::  
المثلث س ا د : المثلث ب ا د (ق ١١ ك ٥) فالمثلث ا ب س يعدل المثلث س ا د  
(ق ٩ ك ٥)

### القضية السادسة عشرة. ن

اذا كانت اربعة خطوط مستقيمة متناسبةً فالقائم الزوايا الذي هو  
مسطح الطرفين يعدل القائم الزوايا الذي هو مسطح الوسطين.  
والقائم الزوايا الذي هو مسطح الطرفين اذا عدل القائم الزوايا الذي  
هو مسطح الوسطين فالخطوط الاربعة متناسبة

ليكن ا ب س د س د ي ف خطوطاً مستقيمة متناسبة اي ا ب : س د :: س د : ي ف  
فالقائم الزوايا ا ب في ف يعدل القائم الزوايا س د في ي

من النقطة ا رسم اغ عموداً على اب  
ومن س ارسم س ح عموداً على س د واجعل  
اغ يعدل ف وس ح يعدل ي ونم  
الشكلين المتوازي الاضلاع غ ب ح د  
فلكون اب : س د :: ي : ف وي = س ح  
وف = اغ فنسبة اب : س د :: س ح : اغ (ق ٧ ك ٥) فاضلاع الشكلين  
المحيطة بالزوايا المتساوية هي متناسبة بالتكافؤ فالشكل ح د يعدل الشكل غ ب  
(ق ١٤ ك ٦) وب غ هو مسطح اب في ف لأن اغ = ف وح د مسطح س د في ي لأن  
س ح = ي فالقائم الزوايا اب في ف يعدل القائم الزوايا س د في ي ثم اذا فرض  
ان القائم الزوايا اب في ف يعدل القائم الزوايا س د في ي فالخطوط الاربعة  
متناسبة اي اب : س د :: ي : ف ثم الشكلين كما تقدم فلان القائم الزوايا اب  
× ف = القائم الزوايا س د × ي والقائم الزوايا ب غ هو مسطح اب × ف لان اغ  
= ف والقائم الزوايا ح د هو مسطح س د × ي لان س ح = ي فالقائم الزوايا  
ب غ يعدل القائم الزوايا د ح وزواياها متساوية ايضاً فالاضلاع المحيطة بالزوايا  
المتساوية هي متناسبة بالتكافؤ (ق ١٤ ك ٦) فنسبة اب : س د :: س ح : اغ  
وس ح = ي واغ = ف فنسبة اب : س د :: ي : ف

### القضية السابعة عشرة

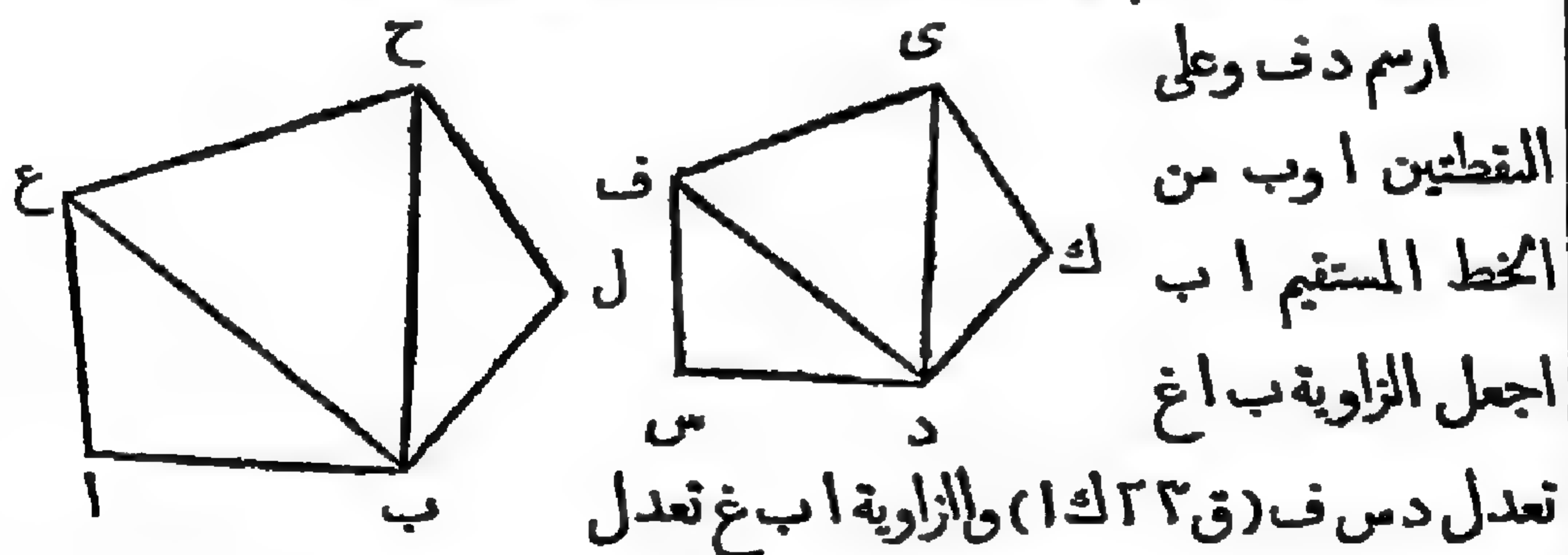
اذا كانت ثلاثة خطوط مستقيمة متناسبة فالقائم الزوايا الذي هو مسطح  
الطرفين يعدل مربع الوسط والقائم الزوايا الذي هو مسطح  
الطرفين اذا عدل مربع الوسط فالخطوط الثلاثة متناسبة  
ليكن اوب وس ثلاثة خطوط متناسبة ا ب : ب : س فالقائم الزوايا  
ا × س يعدل مربع ب افرض خطاً اخر يعدل ب  
مثل د فلكون ا : ب : س وقد فرض ان ب  
يعدل د فنسبة ا : ب : د :: س (ق ٧ ك ٥) واذا  
كانت اربعة خطوط مستقيمة متناسبة فالقائم الزوايا مسطح الطرفين يعدل القائم



الزوايا سطح الوسطين (ق ١٦ ك ٦) فالقائم الزوايا  $\times$  س يعدل القائم الزوايا  
 $\times$  ب  $\times$  د والقائم الزوايا  $\times$  د يعدل مربع ب لأن  $\times$  د يعدل ب فالقائم الزوايا  
 $\times$  س = ب. ثم اذا فرض ان  $\times$  س = ب تكون نسبة ا : ب :: ب : س  
 ليفرض كما تقدم ان  $\times$  د يعدل ب فلان القائم الزوايا  $\times$  س = ب = د  
 فالقائم الزوايا  $\times$  س = ب = د واذا كان القائم الزوايا سطح الطرفين يعدل القائم  
 الزوايا سطح الوسطين فالخطوط الاربعة متناسبة (ق ١٦ ك ٦) ا : ب :: د :  
 س ولكن ب = د فتكون ا : ب :: ب : س

### القضية الثامنة عشرة. ع

علينا ان نرسم على خط مستقيم مفروض شكلاً ذا اضلاع مستقيمة  
 شبيهاً بشكل مفروض ذي اضلاع مستقيمة ومثله في الوضع  
 ليكن ا ب الخط المستقيم المفروض وس د ي ف الشكل المفروض ذا اضلاع  
 مستقيمة. علينا ان نرسم على ا ب مثل س د ي ف شكلاً ووضعاً



ارسم د ف وعلى  
 النقطتين ا و ب من  
 الخط المستقيم ا ب  
 اجعل الزاوية ب ا غ  
 تعدل د س ف (ق ٢٢ ك ١) والزاوية ا ب غ تعدل  
 س د ف فالزاوية الاخرى س ف د تعدل ا غ ب (فرع ٤ ق ٢٢ ك ١) فالمثلث  
 ف س د يشبه المثلث غ ا ب. ثم عند النقطتين ب و غ من الخط المستقيم ب غ  
 اجعل الزاوية ب غ ح تعدل د ف ي (ق ٢٢ ك ١) والزاوية غ ب ح تعدل  
 ف د ي فالزاوية الاخرى ف ي د تعدل الاخرى غ ح ب والمثلث ف د ي يشبه  
 المثلث غ ب ح. فلان الزاوية ا غ ب تعدل س ف د والزاوية ب غ ح تعدل د ف ي  
 فكل الزاوية ا غ ح يعدل الكل س ف ي. وهكذا يبرهن ايضاً ان ا ب ح تعدل  
 س د ي. ولكن الزاوية عند ا تعدل الزاوية عند س والزاوية غ ح ب تعدل ف ي د  
 فالشكل ا ب ح غ يشبه الشكل س د ي ف. واضلاع الشكلين المحيطة بالزوايا

المتساوية متناسبة. لأن المثلثين غ ا ب ف س د متساويي الزوايا فنسبة ب ا : غ ::  
د س : س ف (ق ٤ ك ٦) وهكذا أيضاً

اغ : غ ب :: س ف : ف د وفي المثلثين المتشابهين ب غ خ د ف ي  
غ ب : غ خ :: ف د : ف ي في المساواة (ق ٢٢ ك ٥)  
اغ : غ خ :: س ف : ف ي وهكذا يبرهن ان  
اب : ب ح :: س د : د ي وايضاً (ق ٤ ك ٦)

غ خ : ح ب :: ف ي : ي د فالتشاكلان متساويي الزوايا والاضلاع  
المحيطة بالزوايا المتساوية منها متناسبة فالتشاكلان متشابهان (حد ١ ك ٦)

ثم اذا فرض ان يرسم على ا ب شكلاً يشبه س د ك ي ف ا رسم د ي وعلى  
الخط المفروض ا ب ا رسم الشكل ا ب ح غ حسباً تقدم حتى يشبه س د ي ف وعند  
المقطعين ب و ح من الخط المستقيم ب ح اجعل الزاوية ح ب ل تعدل ي د ك  
والزاوية ب ح ل تعدل د ي ك فالزاوية الاخرى عند ل تعدل الاخرى عند ك.  
ولان الشكليين ا ب ح غ س د ي ف متشابهان فالزاوية غ خ ب تعدل ف ي د  
وب ح ل تعدل د ي ك فالكل غ خ ل يعدل الكل ف ي ك. وهكذا يبرهن ان  
اب ل تعدل س د ك والشكل ذو الخمسة اضلاع ا غ خ ل ب يعدل الشكل ذا  
الخمسـة اضلاع س د ي ك د. ولأن الشكليين ا غ خ ب س ف ي د متساويي  
الزوايا فنسبة غ خ : ح ب :: ف ي : ي د وايضاً ح ب : ح ل :: ي د : ي ك  
(ق ٤ ك ٦) في المساواة (ق ٢٢ ك ٥) غ خ : ح ل :: ف ي : ي ك. ولهذا السبب  
ايضاً اب : ب ل :: س د : د ك وب ل : ل ح :: د ك : ك ي (ق ٤ ك ٦) لأن  
المثلثين ب ل ح د ك ي متساويي الزوايا. فالتشاكلان ا ب ل ح غ س د ك ي ف  
متساويي الزوايا والاضلاع المحيطة بالزوايا المتساوية متناسبة فهما متشابهان. وعلى هذه  
الكيفية يرسم على خط مستقيم مفروض شكل ذو ستة اضلاع فاكثر شبيه بشكل  
مفروض

### القضية التاسعة عشرة. ن

نسبة المثلثات المتشابهة بعضها الى بعض كبريات اضلاعها المتشابهة



ليكن  $AB$  من  $DE$  مثلثين متشابهين ولتكن الزاويتان عند  $B$  و  $E$

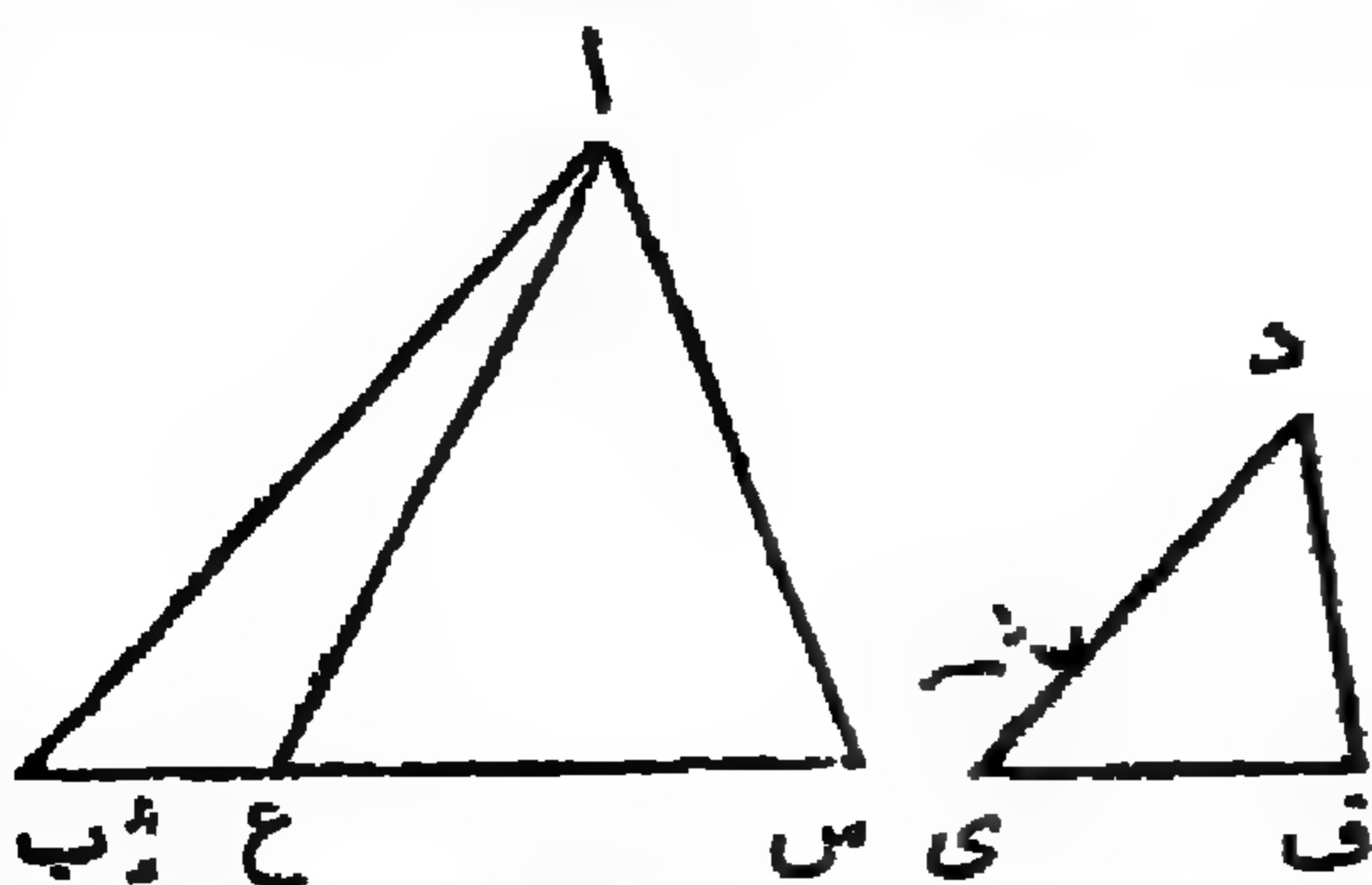
متساويتين ولتكن نسبة  $AB$  :

$B$  من  $DE$  :  $E$  ف حتى

يكون  $B$  من  $E$  ف ضلعين

متشابهين (حد ١٢ ك ٥)

فنسبة المثلث  $AB$  من الى



المثلث  $DE$  ف كنسبة مربع  $B$  من الى مربع  $E$  ف. استعلم متناسبا ثالثا بين  $B$  من

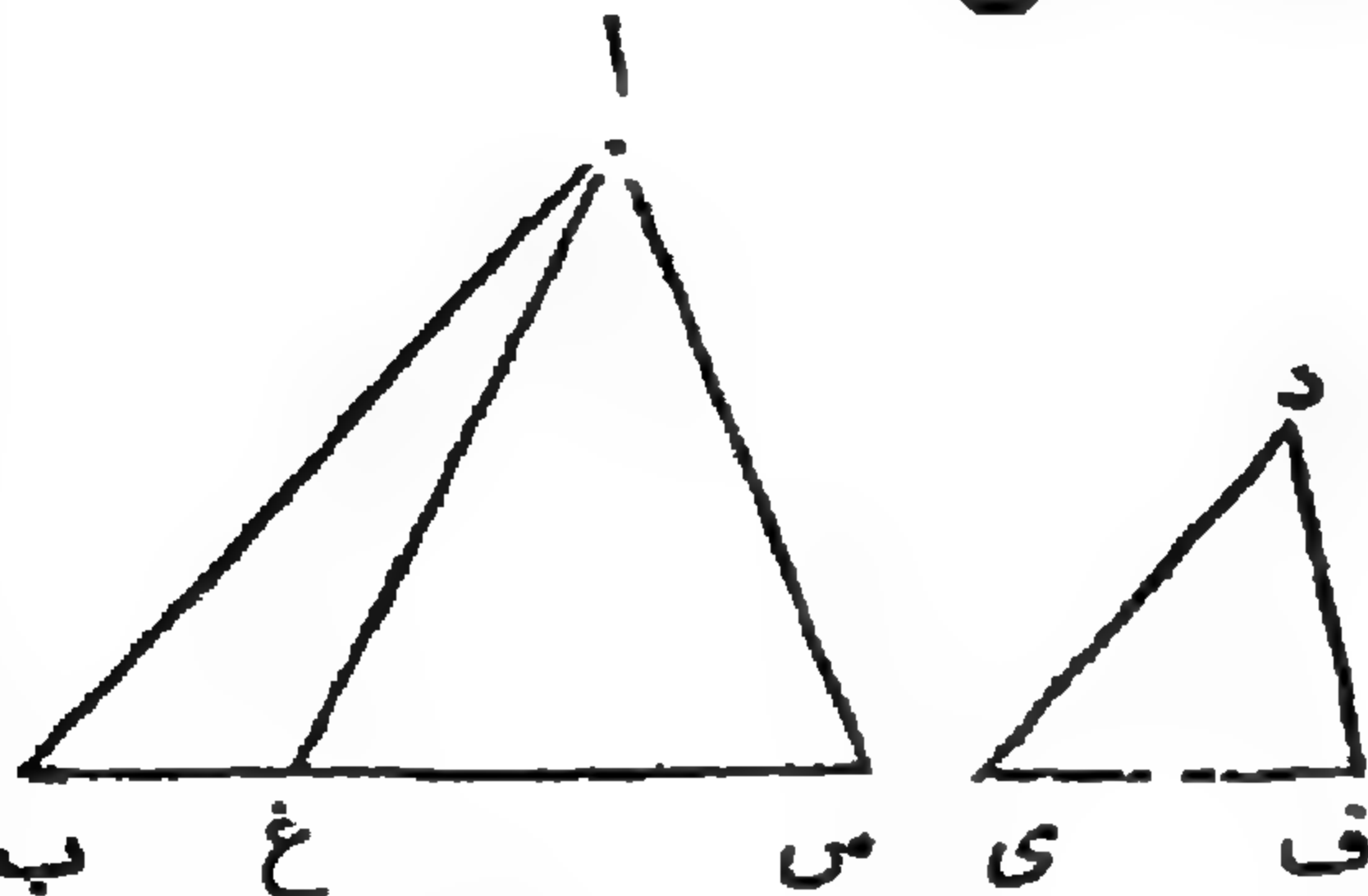
و  $E$  ف اي  $B$  غ (ق ١١ ك ٦) حتى يكون  $B$  من  $E$  ف :  $E$  ف :  $B$  غ. ارم

اغ فلان  $AB$  من  $DE$  :  $E$  ف ف بالمباداة (ق ١٦ ك ٥)

$AB$  من  $DE$  :  $B$  من  $E$  ف و لكن

$B$  من  $E$  ف :  $E$  ف :  $B$  غ فاذا (ق ١١ ك ٥)

$AB$  من  $DE$  :  $E$  ف :  $B$  غ



فاضلاع المثلثين  $AB$  غ

$DE$  ف المحيطة بالزاويا

المتساوية منها هي متناسبة

بالتكافؤ فالمثلثان متساويان

(ق ١٥ ك ٦) فالمثلث  $AB$  غ

يعدل المثلث  $DE$  ف. ولان  $B$  من  $E$  ف :  $E$  ف :  $B$  غ فتناسب  $B$  من الى

$B$  غ هو مربع تناسبه الى  $E$  ف. و  $B$  من  $E$  ف :  $E$  ف :  $B$  غ : المثلث  $AB$  من : المثلث  $AB$  غ

(ق ١١ ك ٦) فالمثلث  $AB$  من : المثلث  $AB$  غ : مربع  $B$  من : مربع  $E$  ف. والمثلث

$AB$  غ يعدل المثلث  $DE$  ف فنسبة  $AB$  من الى  $E$  ف ك مربع  $B$  من الى مربع

$E$  ف

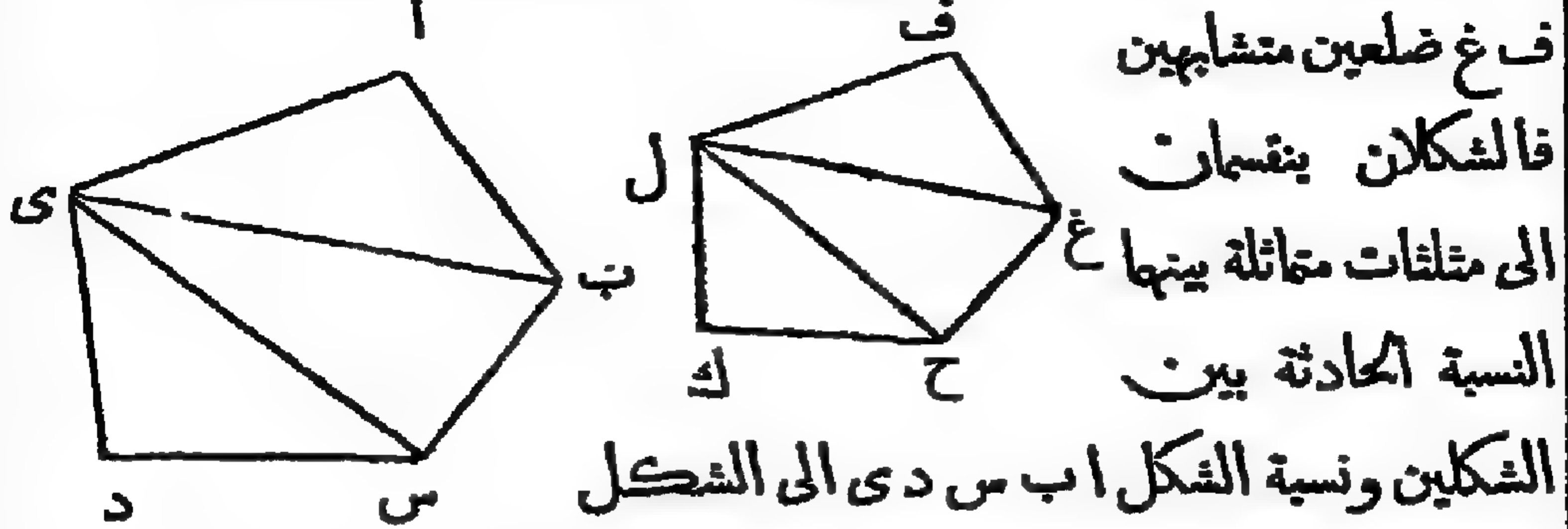
فرع. يتضح من هذه القضية انه اذا كان ثلاثة خطوط متناسبة فنسبة الاول

الى الثالث كنسبة مثلث مبني على الاول الى مثلث مثله مبني على الثاني

### القضية العشرون

اشكال متشابهة ذات اضلاع كثيرة تنقسم الى مثلثات متماثلة عددا

ومتشابهة بينها نفس النسبة الحادثة بين الاشكال الاصلية. ونسبة  
الاشكال الاصلية بعضها الى بعض هي كبريات اضلاعها المتشابهة  
ليكن  $ا ب س د ي$  في  $خ ح ك ل$  شكلين لها اضلاع كثيرة وليكن  $ا ب$



ف  $خ ح ك ل$  كنسبة مربع  $ا ب$  الى مربع  $ف غ$ . ارسم  $ب ي س ي غ ل ح ل$ .  
فلكون الشكل  $ا ب س د ي$  يشبه الشكل  $ف غ خ ح ك ل$  فالزاوية  $ب ا ي$  تعدل  
الزاوية  $غ ف ل$  (حدا ك ٦) وب  $ا : ا ي :: غ : ف$  فللمثلثان  $ا ب ي$   
 $ف غ ل$  لها زاوية من الواحد تعدل زاوية من الاخر والاضلاع المحيطة بالزاويتين  
المتساويتين متناسبة فزوايا المثلث  $ا ب ي$  تعدل زوايا المثلث  $ف غ ل$  (ق ٦ ك ٦)  
فالمثلثان متشابهان (ق ٤ ك ٦). ولكون الشكلين متشابهين فالزاوية  $ا ب س$   
تعدل الزاوية  $ف غ خ$  (حدا ك ٦) فالزاوية الباقية  $ي ب س$  تعدل الباقية  $ل غ خ$   
ولكون المثلثين  $ا ب ي$   $ف غ ل$  متشابهين فنسبة  $ي ب : ب ا :: ل غ : غ ف$   
ولأن الشكلين متشابهان فنسبة  $ا ب : ب س :: ف غ : غ خ$  (حدا ك ٦) فبالمساواة  
(ق ٢٢ ك ٥)  $ي ب : ب س :: ل غ : غ خ$  فالضلعان المحيطان بالزاويتين المتساويتين  
متناسبان وزوايا المثلث  $ي ب س$  تعدل زوايا المثلث  $ل غ خ$  (ق ٦ ك ٦) فها  
متشابهان (ق ٤ ك ٦) وهكذا يبرهن ان المثلثين  $ي س د ل ح ك$  متشابهان  
فقد انقسم الشكلان الى مثلثات متماثلة متشابهة

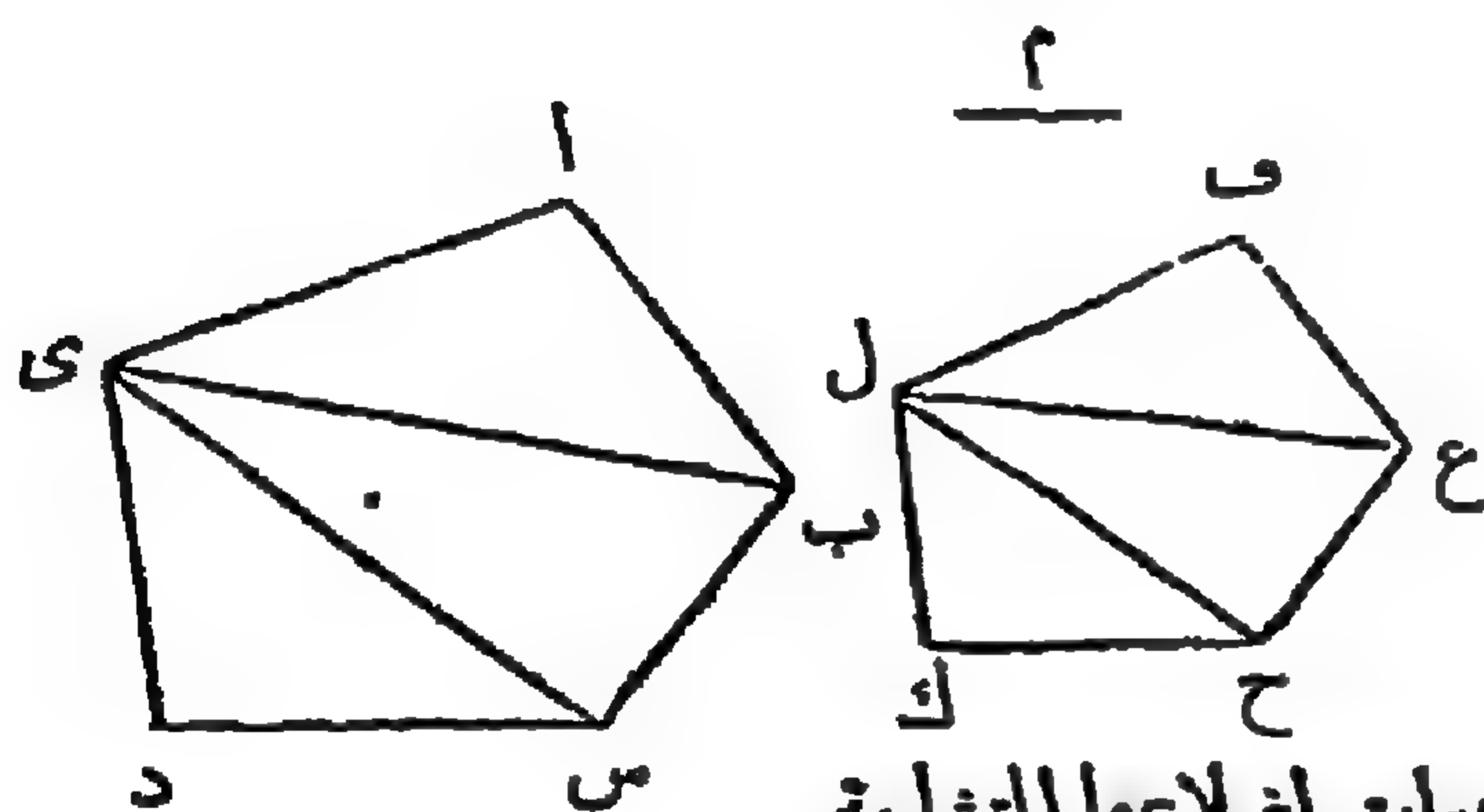
ونسبة هذه المثلثات بعضها الى بعض كنسبة الاشكال بعضها الى بعض  
فالسوايق هي المثلثات  $ا ب ي ي ب س س ي د$  والتوالي هي المثلثات  $ف غ ل$   
 $ل غ خ ل ح ك$ . ونسبة الشكل  $ا ب س د ي$  الى الشكل  $ف غ خ ح ك ل$  كنسبة  
مربع  $ا ب$  الى مربع الضلع المشابه  $ف غ$   
لان المثلث  $ا ب ي$  يشبه المثلث  $ف غ ل$  فنسبة  $ا ب ي$  الى  $ف غ ل$  كنسبة



مربع الضلع ب ي الى مربع الضلع غ ل (ق ١٩ ك ٦) وهكذا المثلث ب ي س :  
المثلث غ ل ح :: مربع ب ي : مربع غ ل فنسبة ا ب ي : ف غ ل :: ب ي س :  
غ ل ح (ق ١١ ك ٥) وعلى هذا الاسلوب يبرهن ان

ي ب س : ل غ ح :: ي س د : ل ح ك

وقد تبرهن ان ي ب س : ل غ ح :: ا ب ي : ف غ ل . فنسبة ا ب ي :  
ف غ ل :: ي ب س : ل غ ح :: ي س د : ل ح ك اي نسبة احد السوايق الى احد  
النوايق ككل السوايق الى كل النوايق (ق ١٢ ك ٥) فالمثلث ا ب ي : المثلث ف غ ل  
:: الشكل ا ب س د ي : الشكل ف غ ح ك ل ونسبة ا ب ي : ف غ ل :: ا ب :  
ف غ فنسبة الشكل ا ب س د ي : ف غ ح ك ل :: مربع ا ب : مربع ف غ



فرع اول . هكذا  
يبرهن في اشكال  
ذات اربعة او ستة  
اضلاع فاكثر ان نسبة

بعضها الى بعض كنسبة مربعات اضلاعها المتشابهة

فرع ثان . اذا استقيم متناسب ثالث بين الضلعين المتشابهين ا ب ف غ مثل  
خط م اي ا ب : ف غ :: ف ع : م فلان الشكل على ا ب : الشكل على ف غ ::  
مربع ا ب : مربع ف غ فنسبة ا ب : م :: الشكل على ا ب : الشكل على ف غ حسبما  
تقدم في المثلثات (فرع ق ١٩ ك ٦) فاذا كانت ثلاثة خطوط متناسبة تكون نسبة  
الاول الى الثالث كنسبة شكل على الاول الى شكل مثله على الثاني

فرع ثالث . المربعات متشابهة . فنسبة مربع الى مربع كنسبة مربع ضلع من  
الواحد الى مربع ضلع من الاخر . وهكذا في كل الاشكال المتشابهة ذات اضلاع  
مستقيمة اي احدها الى الاخر كمربعات اضلاعها المتشابهة

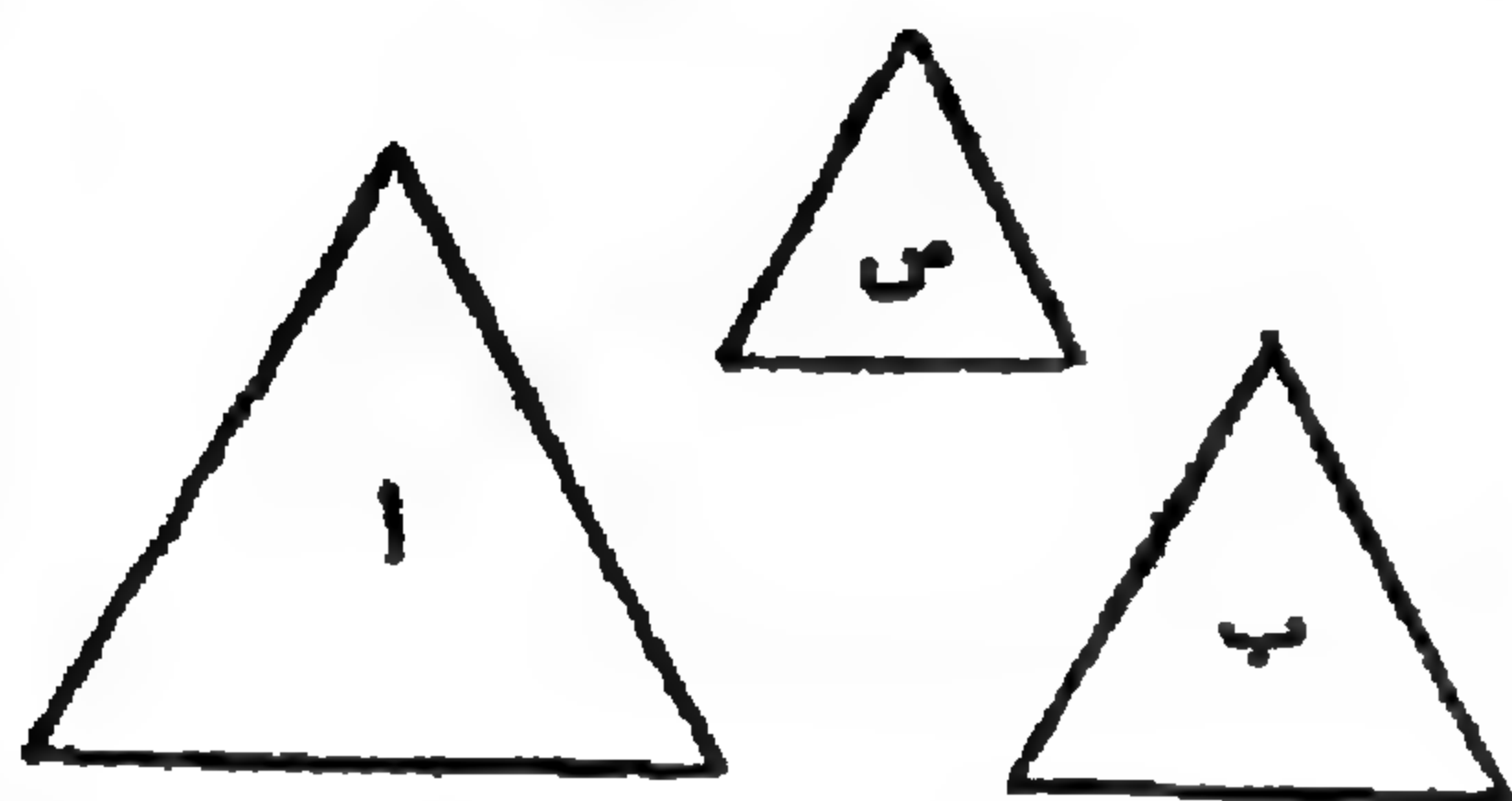
تعليقة . شكلان مركبان من مثلثات متماثلة متشابهة هما متشابهان . فمثال  
المثلثين لنا ي ا ب = ل ف غ ا ب ي - ف غ ل ي ب س = ل غ ح فاذا  
ا ب س = ف غ ح و ب س د = ف غ ح ك وهما جراً وايضاً ي ا : ل ف :: ا ب :

ف غ :: ي ث : ل غ :: ب س : غ ح وهلم جرا فالزوايا والاضلاع متناسبة  
فالشكلان متشابهان

### القضية الحادية والعشرون

اشكال ذات اضلاع مستقيمة متشابهة بشكل واحد ذي اضلاع  
مستقيمة هي متشابهة بعضها لبعض

ليكن ا وب شكلين مستقيمي الاضلاع شبيهين بشكلي آخر ذي اضلاع  
مستقيمة مثل س فيها متشابهان



لأن ا يشبه س فيها متساويا  
الزوايا والاضلاع المحيطة بالزوايا  
المتساوية متناسبة (حد ا ك ٦)  
ولأن ب يشبه س فيها متساويا

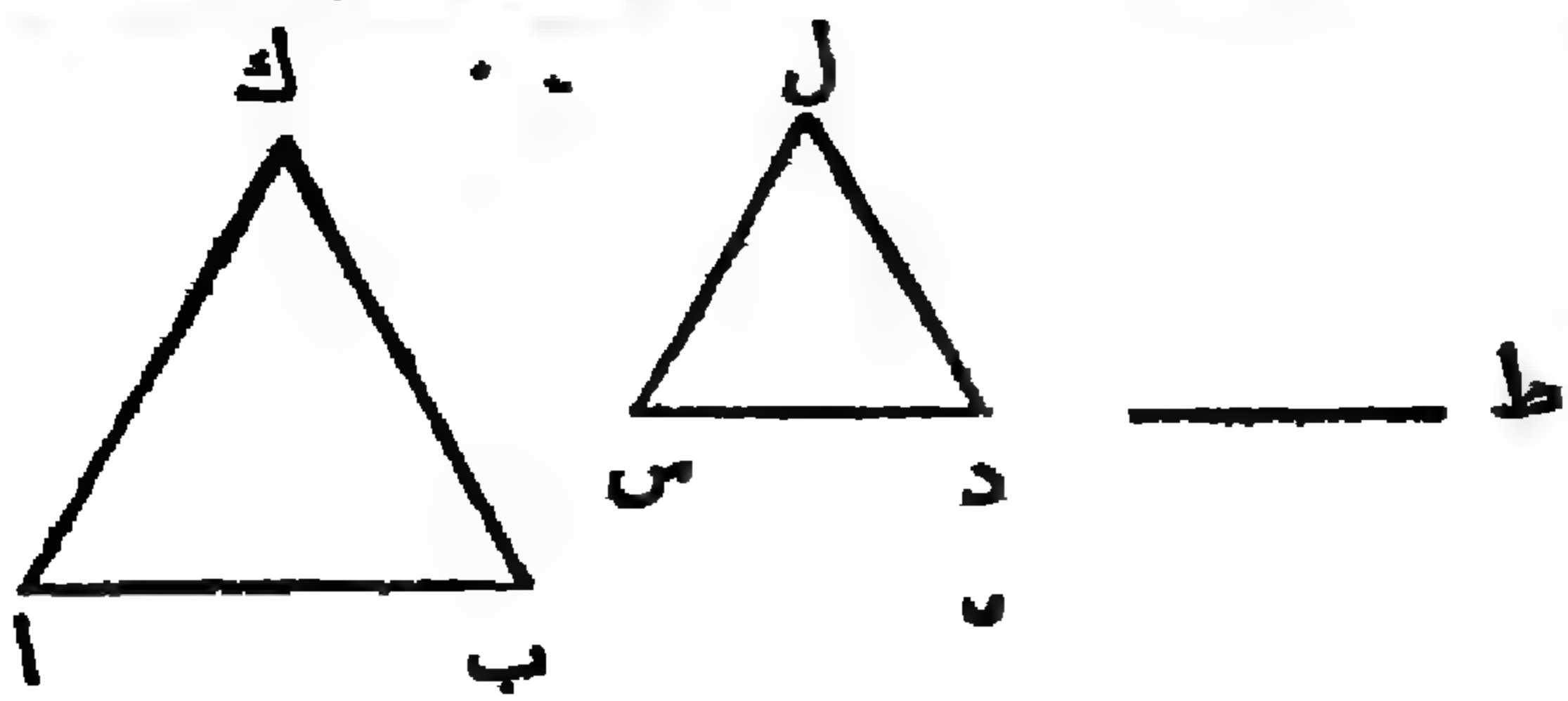
الزوايا والاضلاع المحيطة بالزوايا المتساوية متناسبة (حد ا ك ٦) فزوايا كل واحد  
من الشكلين ا وب تعدل زوايا الشكل س والاضلاع المحيطة بالزوايا المتساوية  
منها متناسبة فالشكلان متساويا الزوايا (حد ا ك ١) واضلاعهما الموائية لهذه الزوايا  
متناسبة (ق ا ا ك ٥) فالشكل ا يشبه الشكل ب (حد ا ك ٦)

### القضية الثانية والعشرون

اذا كانت اربعة خطوط مستقيمة متناسبة فالاشكال المتشابهة ذات  
الاضلاع المستقيمة المبنية على هذه الخطوط تكون متناسبة ايضاً. واذا  
كانت هذه الاشكال متناسبة فالخطوط التي بُنيت عليها تكون  
متناسبة ايضاً

ليكن ا ب س د ي ف غ ح اربعة خطوط مستقيمة متناسبة اي ا ب : س د





ي: ف: غ: ح وليرسم

على ا ب و س د

شكلان متشابهان

لها اضلاع مستقيمة

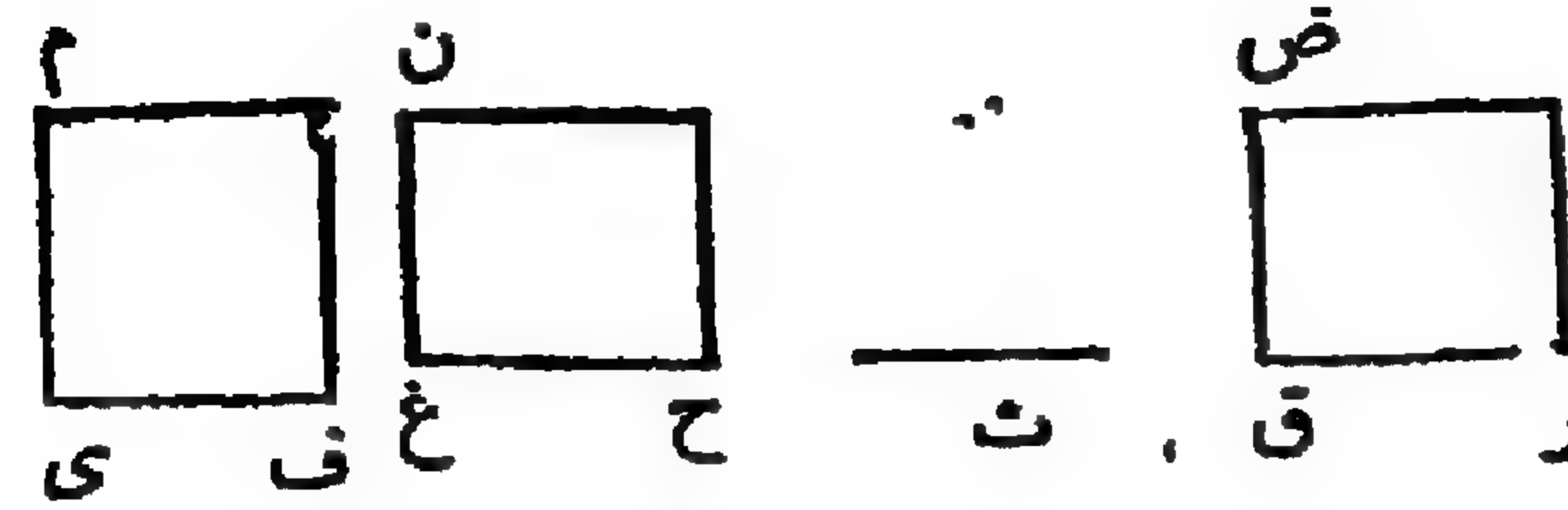
ك: ا ب: ل: س: د

وليبرسم على ي: ف:

غ: ح شكلان

متشابهان لهما

اضلاع مستقيمة



م: ف: ن: ح فتكون نسبة ك: ا ب: ل: س: د: م: ف: ن: ح

ليكن ط خطا مستقيما ومتناسبا ثالثا للخطين ا ب س د والخط المستقيم ت

متناسبا ثالثا للخطين ي: ف: غ: ح (ق ١١ ك ٦) فلكون

ا ب: س: د: ي: ف: غ: ح وايضا

س: د: ط: غ: ح: ت (ق ١١ ك ٥) فبالمساواة (ق ٢٢ ك ٥)

ا ب: ط: ي: ف: ت ولكن

ا ب: ط: ك: ا ب: ل: س: د (فرع ٢ ق ٢٠ ك ٦) فاذا

ي: ف: ت: م: ف: ن: ح فيكون

ك: ا ب: ل: س: د: م: ف: ن: ح (فرع ٢ ق ٢٠ ك ٦)

ثم اذا فرض ان نسبة ك: ا ب: ل: س: د: م: ف: ن: ح تكون نسبة ا ب: س: د: ي: ف: غ: ح

ي: ف: غ: ح

اجعل نسبة ا ب: س: د: ي: ف: ق: ر (ق ١٢ ك ٦) وعلى ق ر ارسم

الشكل المستقيم الاضلاع ص ر حتى يشبه م ف ا و ن ح شكلا ووضعنا (ق ١٨ ك ٦)

فالان ا ب: س: د: ي: ف: ق: ر وقد رسم على ا ب و س د شكلان متشابهان

شكلا ووضعنا ك: ا ب: و ل: س: د وهكذا على ي: ف: ق: ر قد رسم شكلان متشابهان

شكلا ووضعنا م: ف: و ص: ر فتكون نسبة ك: ا ب: ل: س: د: م: ف: ص: ر

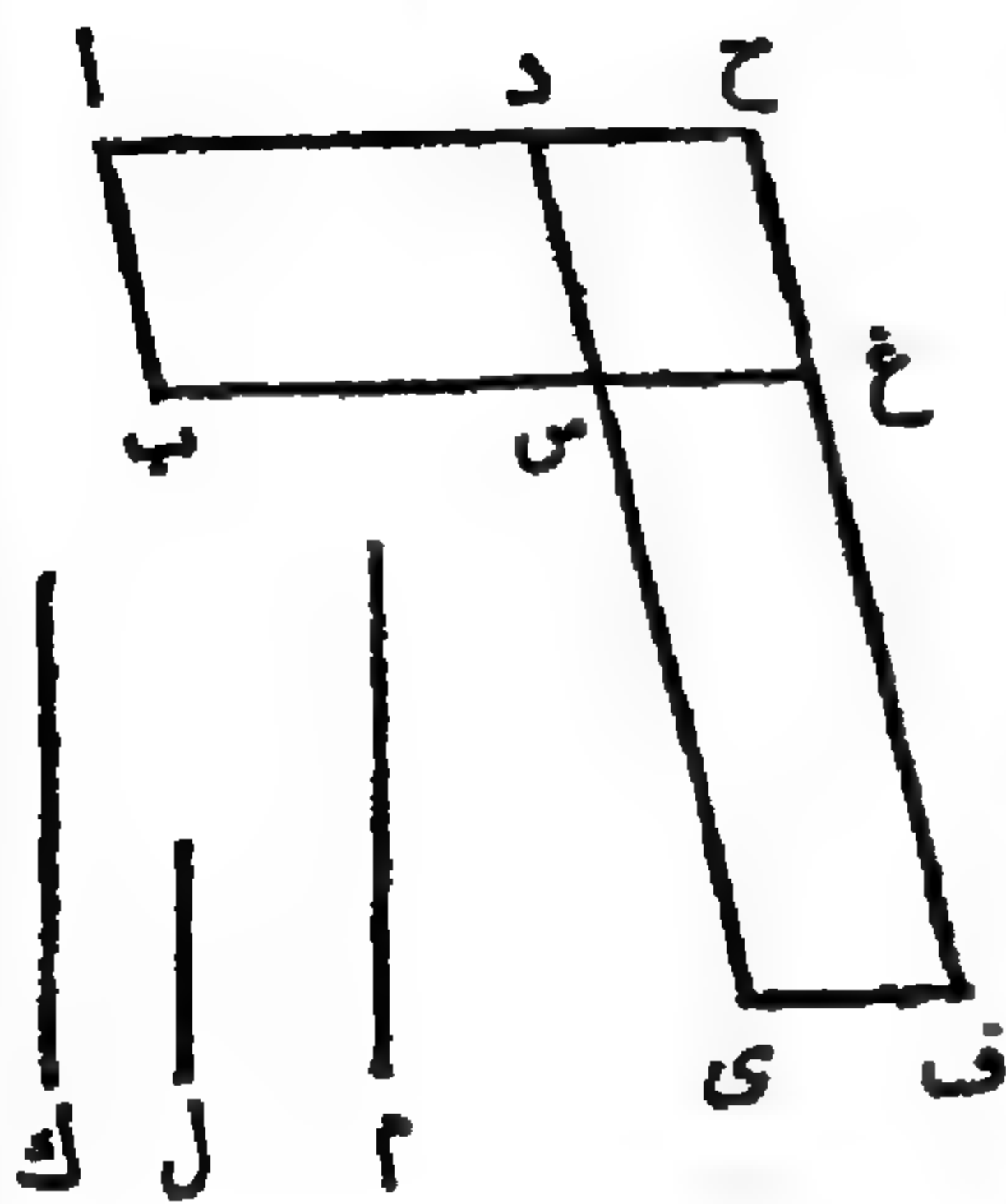
وبالمفروض ك: ا ب: ل: س: د: م: ف: ن: ح فبالشكل المستقيم الاضلاع م: ف: ل: ه

تناسب واحد للشكلين ن: ح: ص: ر فهما متساويان (ق ٩ ك ٥) وهما متشابهان

ايضا شكلا ووضعاً فالخط غ ح يعدل الخط ق ر ولان ا ب : س د :: ي ف : ق ر  
وقر = غ ح فتكون نسبة ا ب : س د :: ي ف : غ ح

### القضية الثالثة والعشرون

تناسب اشكال متوازية الاضلاع متساوية الزوايا بعضها الى بعض  
هو التناسب المركب من تناسبات اضلاعها



ليكن ا س س ف شكلين متوازيين  
الاضلاع. والزاوية ب س د فلتعدل الزاوية  
ي س غ فتناسب ا س الى س ف هو  
التناسب المركب من تناسبات اضلاعها.  
ليوضع ب س وس غ على استقامة واحدة  
فيكون ي س س د ايضا على استقامة واحدة  
(ق ١٤ ك ١) ثم الشكل د غ. ثم عين خطأ

مستقيما مثل ك واجعل تناسب ب س : س ع :: ك : ل (ق ١٢ ك ٦) وتناسب  
د س : س ي :: ل : م فتناسبات ك الى ل ول الى م هي مثل تناسبات الاضلاع  
اي تناسب ب س الى س غ وتناسب د س الى س ي. ولكن تناسب ك الى م هو  
المركب من تناسب ك الى ل مع تناسب ل الى م (حد ١٠ ك ٥) فتناسب ك الى م  
هو المركب من تناسبات اضلاع الشكلين. ولان ب س : س غ :: ا س : س ح  
(ق ١ ك ٦) وب س : س غ :: ك : ل فيكون ك : ل :: ا س : س ح (ق ١١ ك ٥)  
ولان د س : س ي :: س ح : س ف ود س : س ي :: ل : م فيكون ل : م ::  
س ح : س ف (ق ١١ ك ٥)

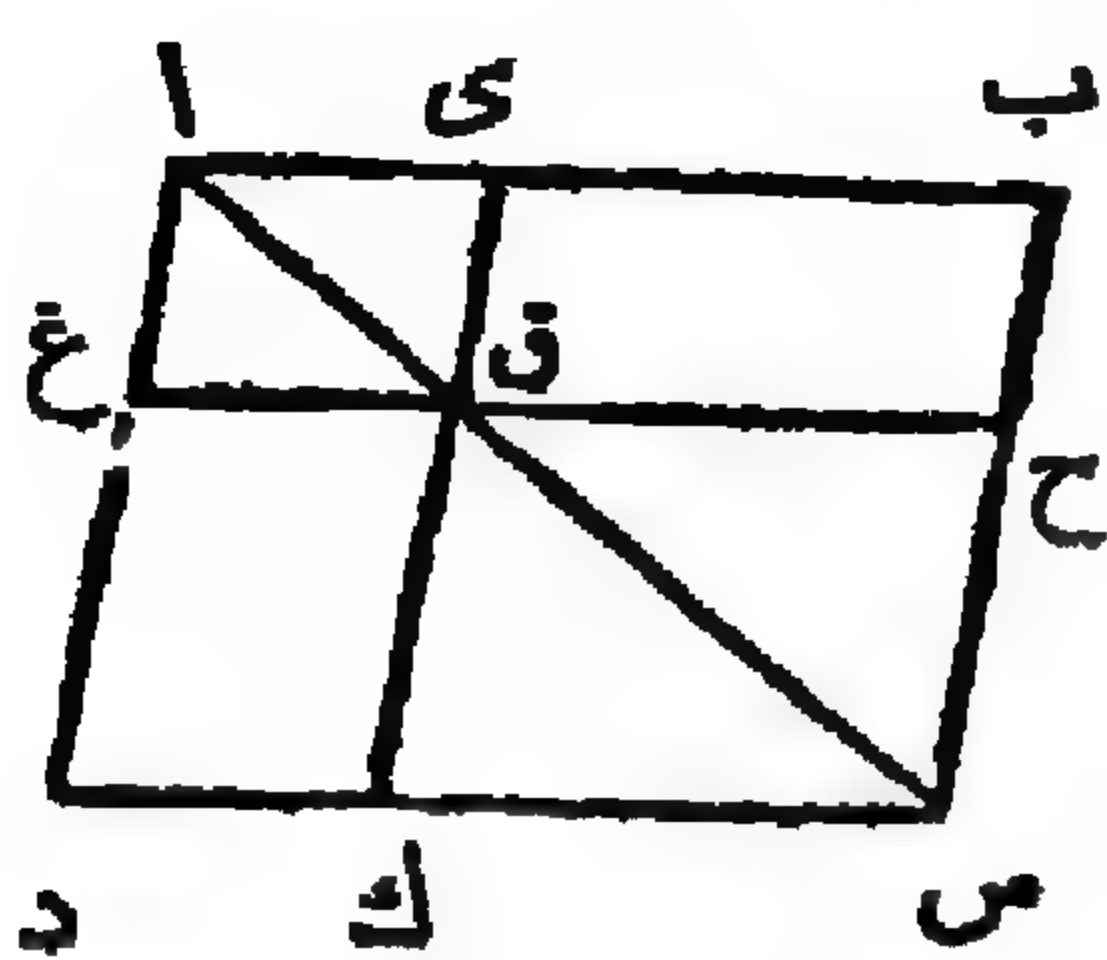
وقد نبرهن ان ك : ل :: ا س : س ح وان ل : م :: س ح : س ف فبالمساواة  
(ق ٢٢ ك ٥) ك : م :: ا س : س ف ولكن تناسب ك الى م هو المركب من  
تناسبات اضلاع الشكلين كما تقدم. فتناسب ا س الى س ف هو المركب من اضلاعها  
فرع اول. شكلان قائما الزوايا احدهما الى الاخر كحاصل قاعدتيها في علوها  
فرع ثان. مساحة شكل متوازي الاضلاع تعدل مسطح القاعدة في العلو



فرع ثالث. مساحة مثلث تعدل مسطح قاعدته في نصف طوله.

### القضية الرابعة والعشرون

الاشكال المتوازية الاضلاع على جانبي قطر شكل متوازي الاضلاع هي متشابهة بعضها لبعض وللشكل كله



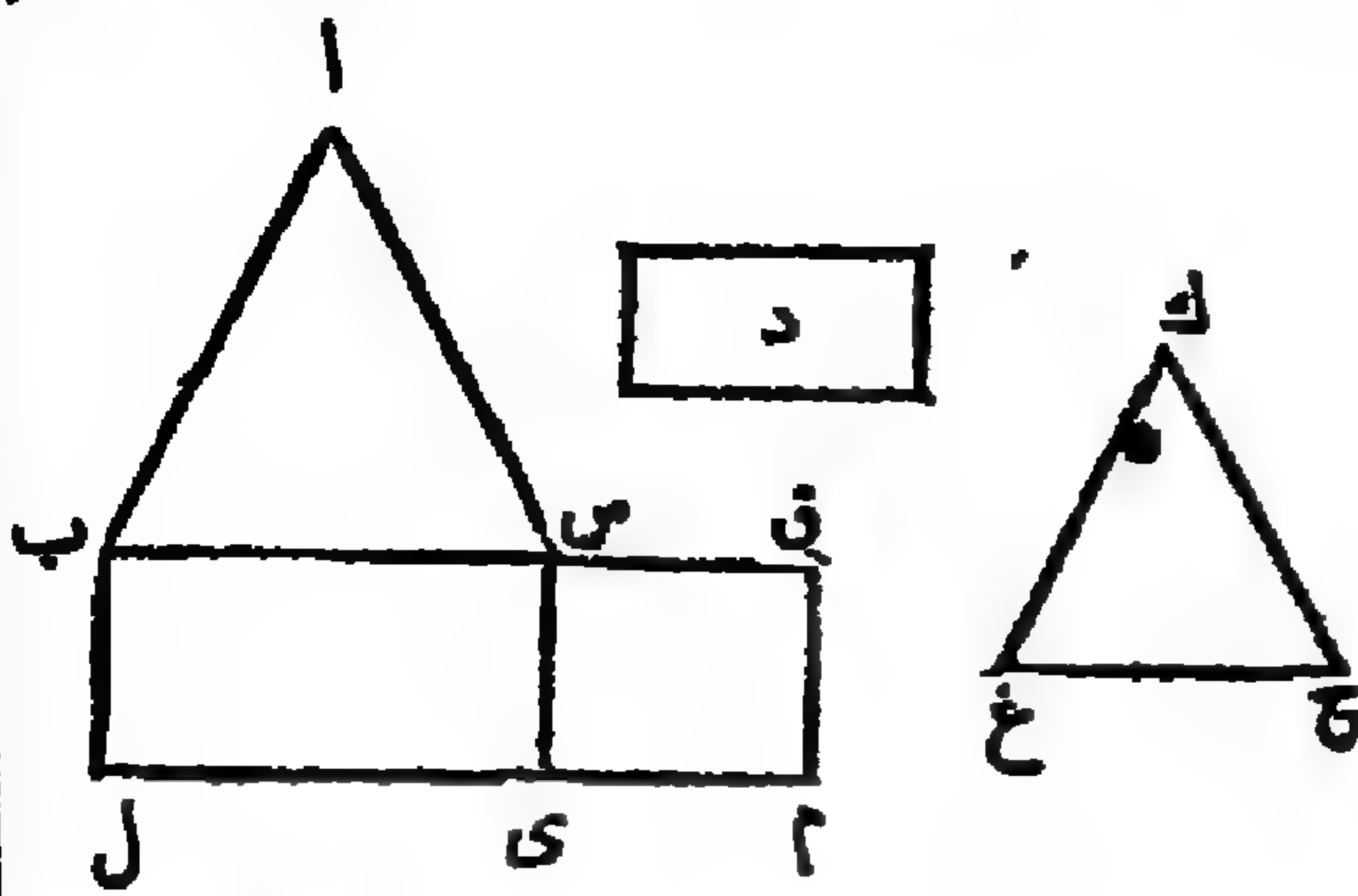
ليكن اب س د شكلاً متوازي الاضلاع واس قطره وى غ ح ك شكلين متوازي الاضلاع على جانبي القطر فهما متشابهان ويشبهان كل الشكل اب س د

لان د س بوازي غ ق والزوايا ا د س تعدل الزاوية ا غ ق (ق ٢٩ ك ١) ولان ب س بوازي ي ق والزوايا اب س تعدل الزاوية اى ق وكل واحدة من الزاويتين ب س د ي ق غ تعدل المقابلة د اب (ق ٢٤ ك ١) فهما متساويتان والشكلان اب س د اى ق غ متساويا الزوايا ولان الزاوية اب س تعدل الزاوية اى ق والزوايا س اب مشتركة بين المثلثين ب ا س ي ا ق فهما متساويا الزوايا و اب : ب س :: اى : ي ق (ق ٤ ك ٦) ولكون الاضلاع المتقابلة من شكل متوازي الاضلاع هي متساوية (ق ٢٤ ك ١) يكون اب : ا د :: اى : ا غ (ق ٧ ك ٥) و د س : س ب :: غ ق : ق ي و س د : د ا :: ق غ : غ ا فاضلاع الشكلين اب س د اى ق غ المحيطة بالزوايا المتساوية هي متناسبة فهما متشابهان (حد ١ ك ٦) ولهذا السبب ايضا الشكل اب س د يشابه الشكل ق ح س ك فكل واحد من الشكلين غ ي ك ح يشبه دب والاشكال المستقيمة الاضلاع التي تشبه شكلاً واحداً مستقيم الاضلاع هي متشابهة بعضها لبعض (ق ٢١ ك ٦) فالشكل غ ي يشبه الشكل ك ح

### القضية الخامسة والعشرون

علينا ان نرسم شكلاً مستقيم الاضلاع حتى يشبه شكلاً مفروضاً مستقيم الاضلاع ويعدل شكلاً اخر مفروضاً مستقيم الاضلاع

ليكن ا ب س شكلاً مفروضاً مستقيماً الاضلاع ود شكلاً اخر مفروضاً مستقيماً  
الاضلاع. علينا ان نرسم



شكلاً مستقيماً الاضلاع  
يعدل د ويشبه ا ب س  
ارسم الشكل  
المتوازي الاضلاع  
ب ي على الخط المستقيم

ب س حتى يعدل ا ب س (فرع ق ٤٥ ك ١) وعلى س ي ارسم شكلاً متوازيه  
الاضلاع س م حتى يعدل د (فرع ق ٤٥ ك ١) واجعل الزاوية ق س ي منه تعدل  
الزاوية س ب ل فيكون ب س وق س على استقامة واحدة ول ي و ي م كذلك  
(ق ٢٩ ك ١ او ق ١٤ ك ١) استعلم متناسباً متوسطاً بين ب س وس ق مثل غ ح  
(ق ١٣ ك ٦) وارسم على غ ح شكلاً مستقيماً الاضلاع ك غ ح حتى يشبه ا ب س  
شكلاً ووضعا (ق ١٨ ك ٦)

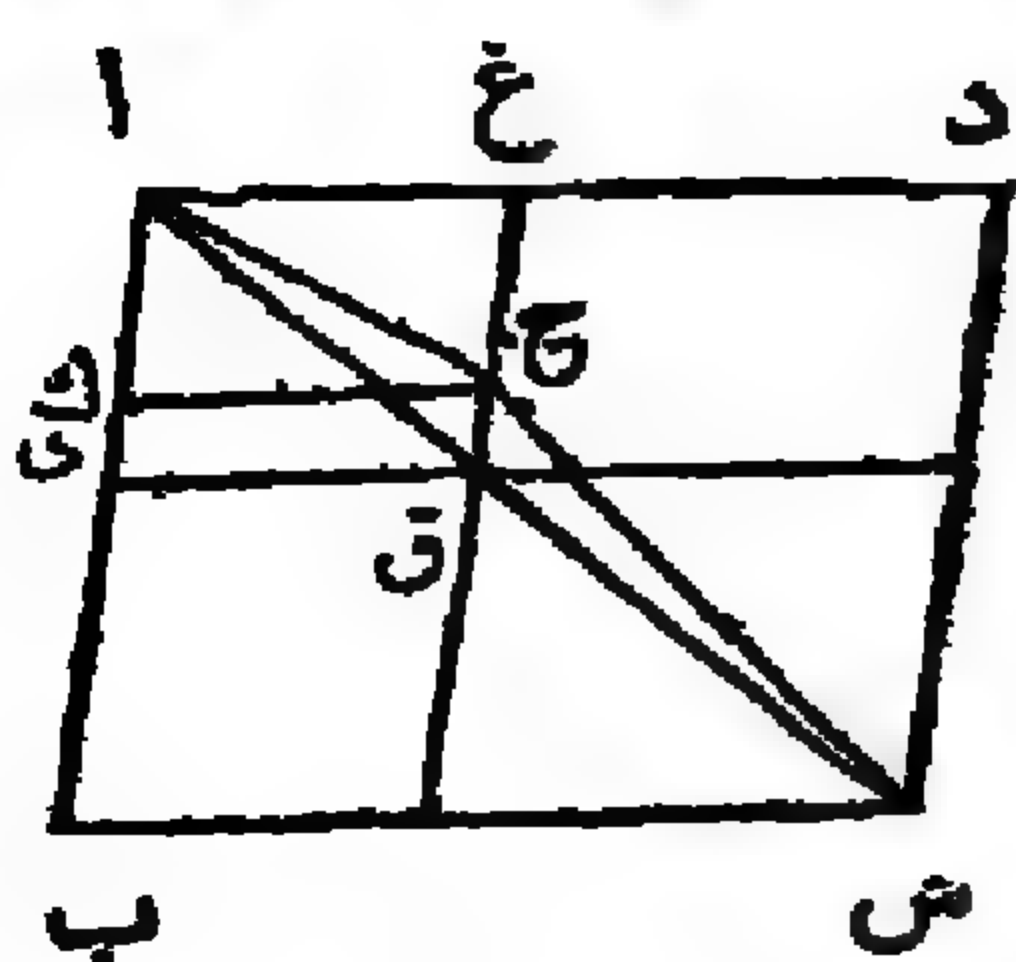
فلكون نسبة ب س : غ ح :: غ ح : س ق فالشكل ا ب س : ك غ ح ::  
ب س : س ق (فرع ثان ق ٢٠ ك ٦) وب س : س ق :: ب ي : س م (ق ١ ك ٦)  
فتكون نسبة ا ب س : ك غ ح :: ب ي : س م (ق ١١ ك ٥) والشكل ا ب س  
يعدل ب ي فالشكل ك غ ح يعدل س م (ق ١٤ ك ٥) والشكل س م يعدل د  
فالشكل ك غ ح يعدل د ايضاً وهو يشبه الشكل ا ب س وذلك ما كان علينا ان  
نعملة

### القضية السادسة والعشرون

شكلان متوازي الاضلاع متشابهان اذا كان لهما زاوية مشتركة وتشابهان  
وضعا فهما على جانبي قطر واحد

ليكن ا ب س د ا ي ق غ شكلين متوازيي الاضلاع متشابهين شكلاً ووضعا





ولتكن الزاوية د ا ب مشتركة بينهما فالشكلان على  
جانبَي قطر واحد

والا فليكن ا ح س قطر الشكل ب د و اق  
قطر الشكل ي غ والخط غ ق فليقطع ا ح س في  
النقطة ح ومن ح ارسم ح ك حتى يوازي ا د او

ب س. فالشكلان ا ب س د ا ك ح غ متشابهان لانها على جانبي قطر واحد  
(ق ٢٤ ك ٦) و د ا : ا ب :: غ ا : ا ك (ح د ا ك ٦) وقد فُرض ان ا ب س د  
اي ق غ متشابهان فتكون نسبة د ا : ا ب :: غ ا : ا ي فتكون نسبة غ ا : ا ي ::  
غ ا : ا ك (ق ١ ا ك ٥) فاذا ا ك = ا ي (ق ٩ ك ٥) ا ب ا الاصغر يعدل الاكبر  
وذاك محال فلا يكون ا ك ح غ ا ب س د على جانبي قطر واحد فبالضرورة يكون  
ا ب س د ا ي ق غ على جانبي قطر واحد

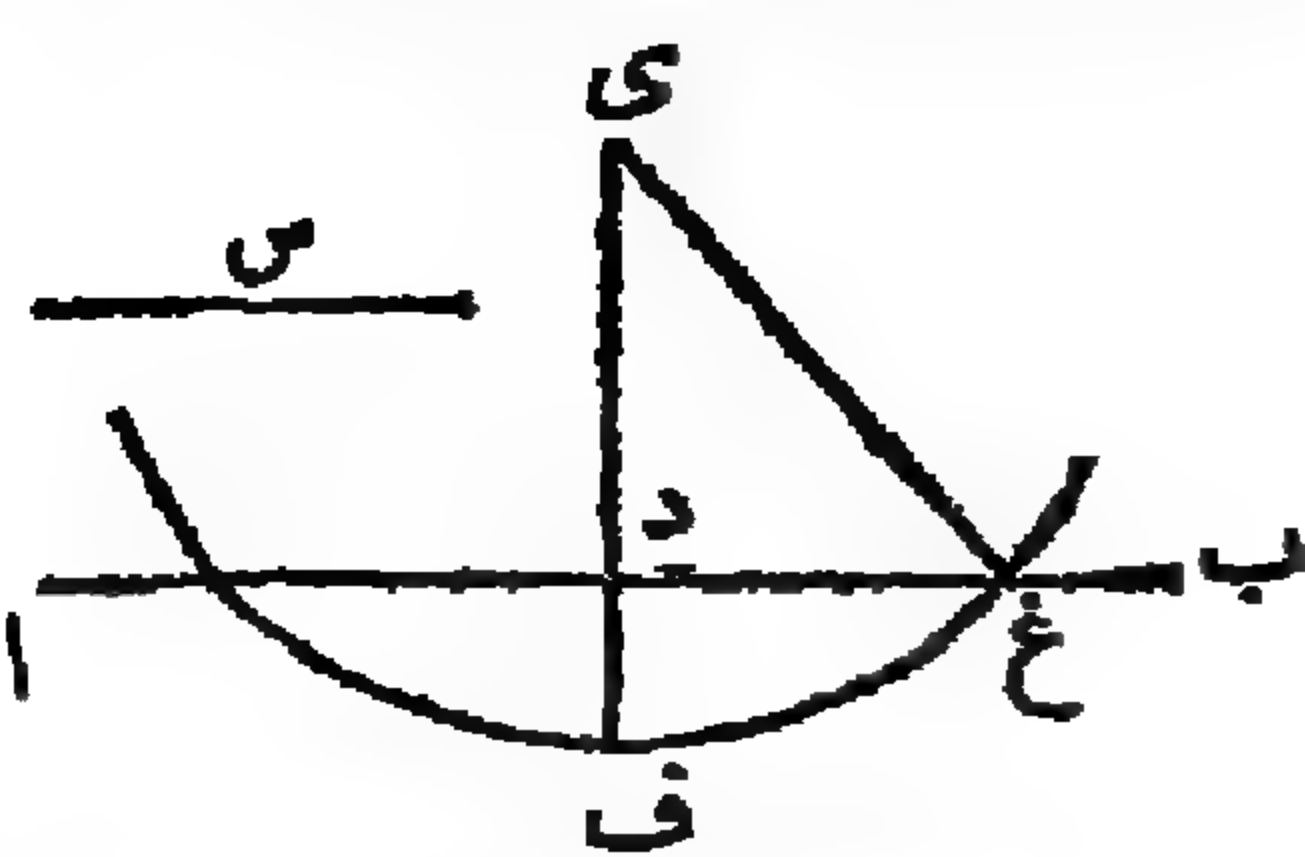
### القضية السابعة والعشرون

من جميع الاشكال القائمة الزوايا التي تحيط بها اقسام خط مستقيم  
فاعظمها مربع نصف الخط

ليكن ا ب خطا مستقيما ولينصف في س ولتكن د اية نقطة كانت فيه فالربع  
على ا س هو اعظم من القائم الزوايا ا د ب د ب د س  
فلكون الخط المستقيم ا ب قد اقسام الى قسمين متساويين في س وغير  
متساويين في د فالقائم الزوايا ا د ب د ب مع مربع س د يعدل مربع ا س (ق ١٥  
ك ٢) فاذا مربع ا س هو اكبر من القائم الزوايا ا د ب د ب

### القضية الثامنة والعشرون

علينا ان تقسم خطا مستقيما مفروضا حتى يعدل القائم الزوايا مسطح  
قسميه مساحة مفروضة ولا تكون تلك المساحة اعظم من مربع نصف  
الخط

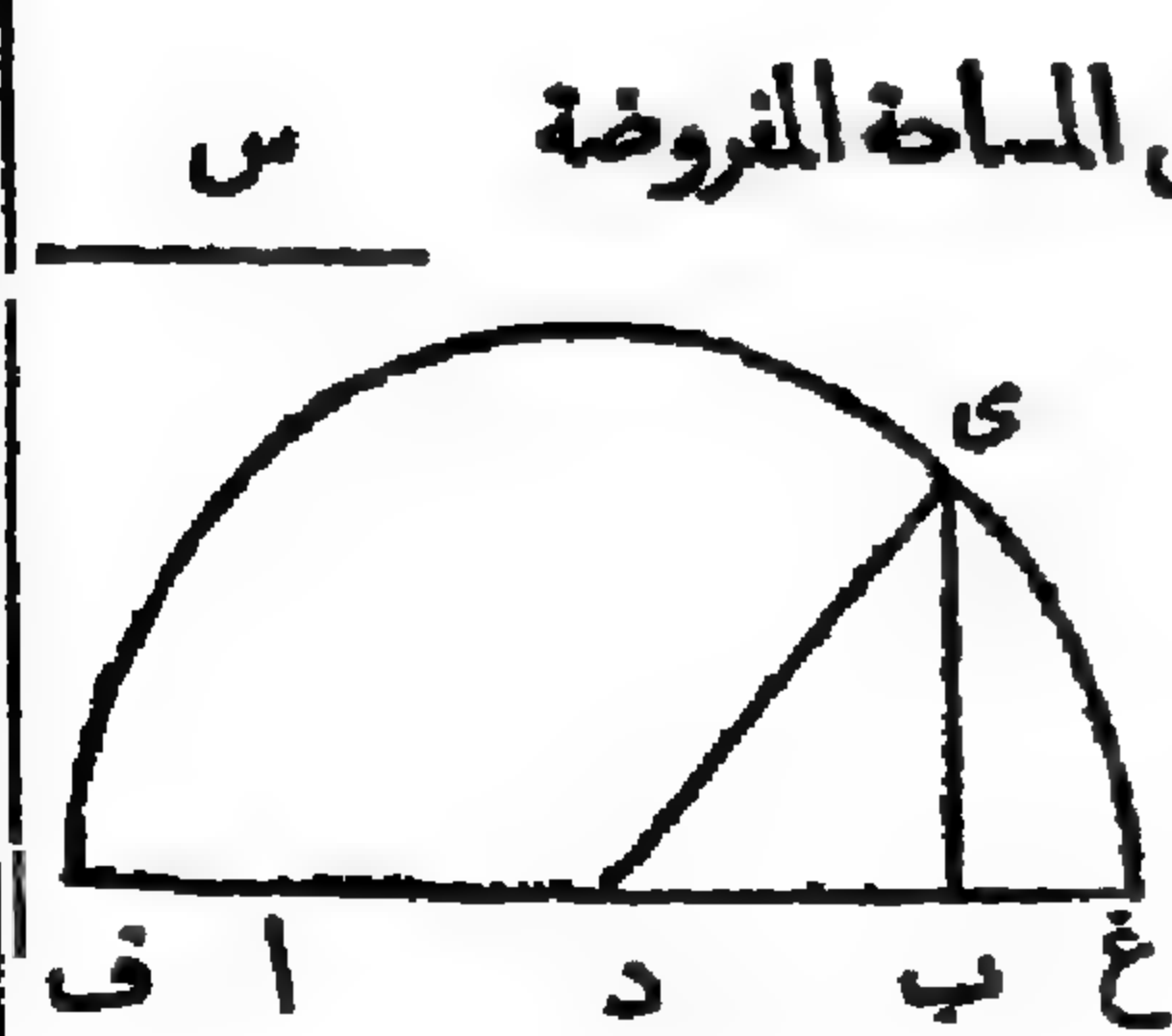


ليكن ا ب الخط المستقيم المفروض  
ومربع س المساحة المفروضة. علينا ان  
نقسم ا ب الى قسمين مسطهما يعدل مربع  
س ولا يكون اعظم من مربع نصف ا ب

نصف ا ب في د فمربع ا د اذا عدل مربع س فهو المطلوب ولا فيكون ا د  
اعظم من س حسب المفروض. ا رسم د ي عموداً على ا ب حتى يعدل س. اخرج  
ي د الى ف واجعل ي ف يعدل ا د او د ب. ومن المركز ي والبعدي ف ا رسم  
دائرة تقطع ا ب في غ وارسم ي غ. فلكون ا ب قد انقسم الى قسمين متساويين في  
د وغير متساويين في غ فالقائم الزوايا ا غ  $\times$  غ ب + د غ = د ب (ق ٥ ك ٢) =  
ي غ ولكن ي د + د غ = ي غ (ق ٤٧ ك ١) فاذا ا غ  $\times$  غ ب + د غ = ي د  
+ د غ اطرح د غ فالباقي ا غ  $\times$  غ ب = ي د وي د = س فالقائم الزوايا ا غ  $\times$   
غ ب = س وذلك ما كان علينا ان نعلمه

### القضية التاسعة والعشرون ع

علينا ان نخرج خطاً مستقيماً مفروضاً حتى ان القائم الزوايا مسطح الخط  
مع ما زيد اليه في الجزء المزيد يعدل مساحة مفروضة



ليكن ا ب الخط المستقيم المفروض ومربع س المساحة المفروضة  
نصف ا ب في د وارسم ب ي عموداً عليه  
واجعل ب ي يعدل س. ا رسم ي د وعلى المركز  
د والبعدي د ا رسم دائرة تقطع ا ب بعد ا خراج  
في غ

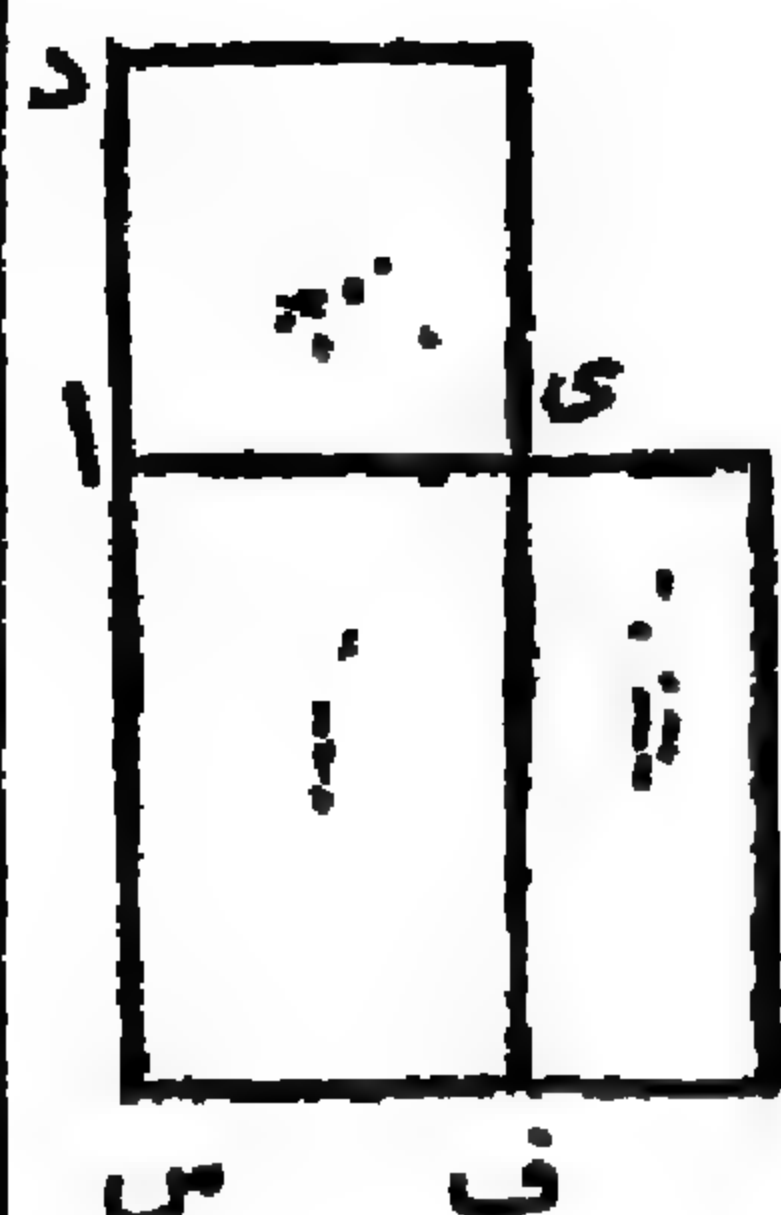
فلكون ا ب قد تنصفت في د واخرج الى غ (ق ٦ ك ٢) فالقائم الزوايا ا غ  $\times$   
غ ب + د ب = د غ = د ي. ولكن د ي (ق ٤٧ ك ١) = د ب + ب ي فالقائم  
الزوايا ا غ  $\times$  غ ب + ب د = ب ي + ا غ  $\times$  غ ب = ب ي وب ي =  
س فاذا ا غ  $\times$  غ ب = س وذلك ما كان علينا ان نعلمه



### القضية الثلثون ع

علينا ان تقسم خطاً مستقيماً حتى يكون احد القسمين متناسباً متوسطاً بين الخط كله والقسم الاخر

ليكن اب الخط المستقيم المفروض. ارسم على اب مربعاً (ق ٤٦ ك ١) ب س واخرج س ا الى د حتى ان القائم الزوايا س د × د ا



ب عدل المربع س ب (ق ٢٩ ك ٦) اجعل اي يعدل اد

وتم القائم الزوايا د ف اي د س × اي او د س × د ا .

فلكون س د × د ا = س ب فالشكل د ف = س ب

اطرح الجزء المشترك س ي فالباقي د ي = الباقي ب ف

وب ف هو القائم الزوايا ف ي × ي ب او اب × ب ي .

ود ي هو المربع على اي فالخط اي هو متناسب متوسط بين اب وب ي (ق ١٧ ك ٦)

اي اب : اي :: اي : ب ي و اب هو اعظم من اي فيكون اي اعظم من

ي ب (ق ١٤ ك ٥) فقد انقسم الخط اب على نسبة متوسطة (حد ٢ ك ٦)

### طريقة اخرى

ليكن اب الخط المفروض. اقسم اب في س حتى ان

القائم الزوايا اب × ب س يعدل اس<sup>٢</sup> (ق ١١ ك ٢) فلكون اب × ب س =

اس<sup>٢</sup> تكون نسبة اب : اس :: اس : س ب (ق ١٧ ك ٦) اي اس متناسب

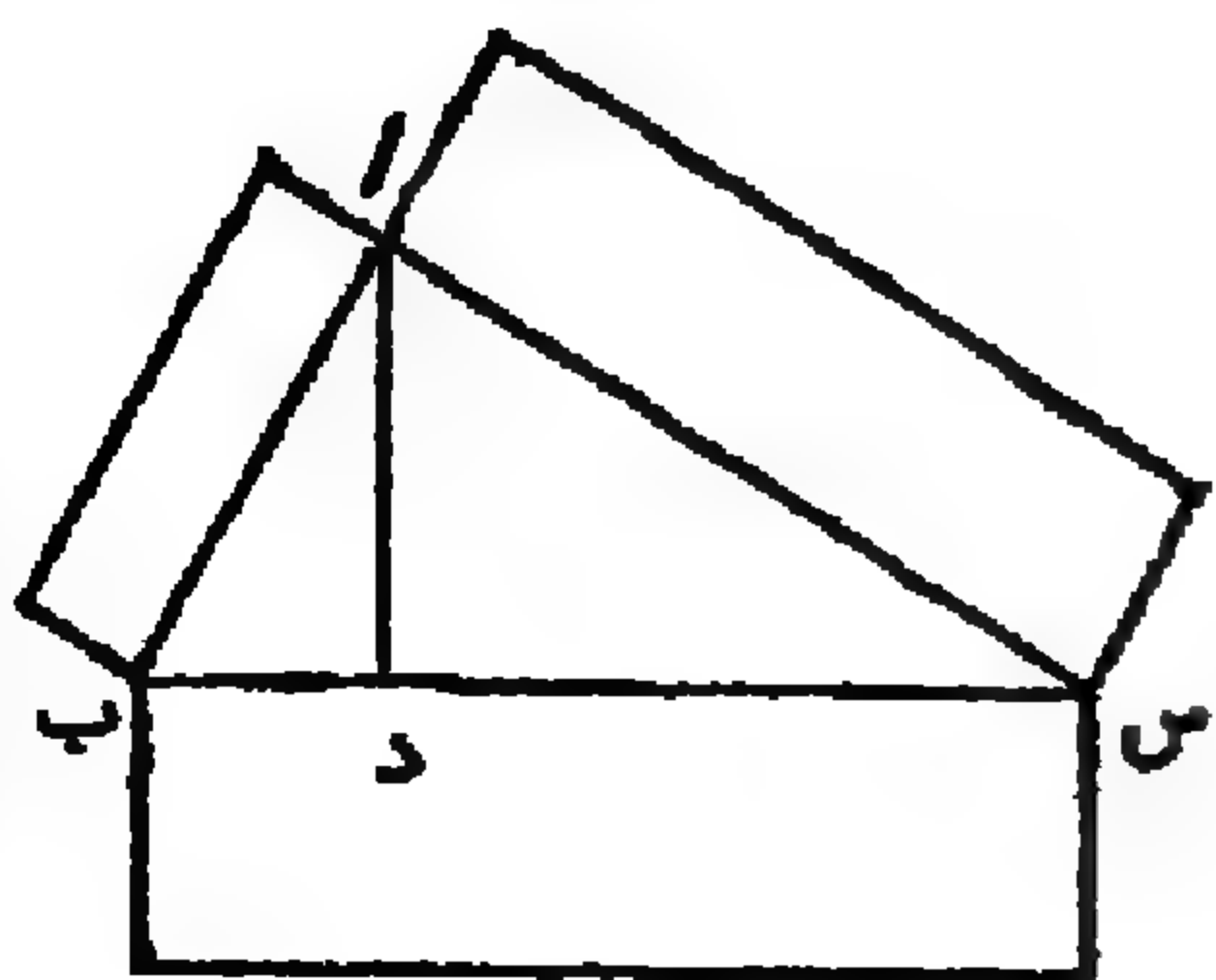
متوسط بين اب وس ب (حد ٢ ك ٦)

### القضية الحادية والثلاثون

في كل مثلث ذي قائمة ذوا اضلاع المستقيمة المرسوم على الضلع الذي

يقابل القائمة يعدل الشككين المتشابهين به هيئة ووضعاً المرسومين

على الضلعين المحيطين بالقائمة

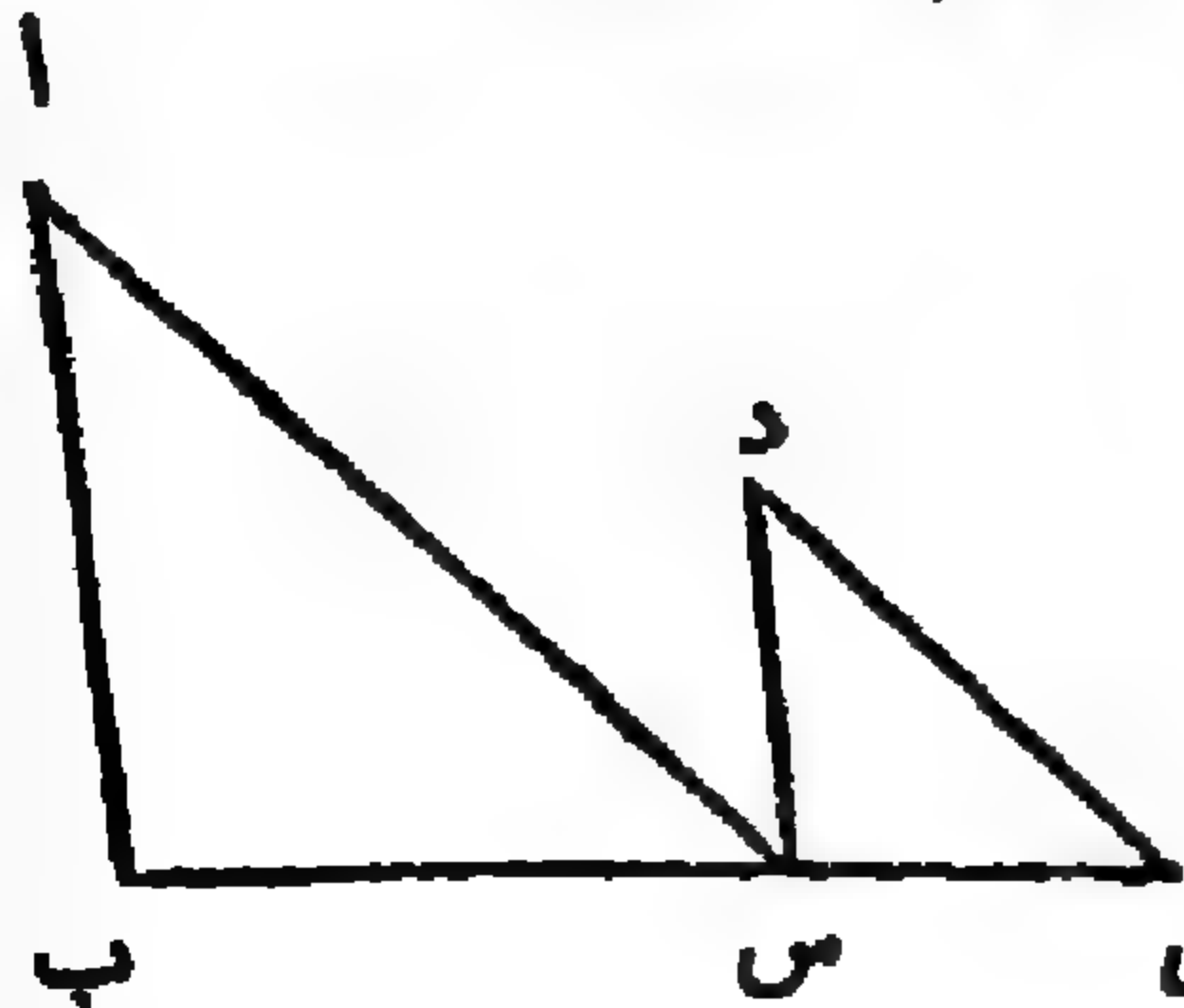


ليكن ا ب س مثلثا ذا قائمة ب ا س  
فذو الاضلاع المستقيمة المرسوم على ب س  
يعدل الشكلين المتشابهين ب ه هيئة ووضعاً  
المرسومين على ب ا و ا س  
ارسم العمود ا د. فلان ا د قد رُسم

عموداً من القائمة على القاعدة فالمثلثان ا د ب ا د س متشابهان ويشبهان كل المثلث  
ا ب س ايضاً (ق ٨ ك ٦) ونسبة س ب : ب ا :: ب ا : ب د (ق ٤ ك ٦)  
ولكون هذه المخطوط الثلاثة المستقيمة متناسبة تكون نسبة الاول الى الثالث  
كنسبة شكل على الاول الى شكل مثله هيئة ووضعاً على الثاني (فرع ثان ق ٢٠ ك ٦)  
فنسبة س ب : ب د :: شكل على س ب : مثله هيئة ووضعاً على ب ا وبالقاب  
(ق ب ك ٥) د ب : ب س :: الشكل على ب ا : مثله على ب س. وهكذا ايضاً  
د س : س ب :: الشكل على س ا : مثله على س ب. فاذا ب د + د س : ب س  
:: الشكل على ب ا + الشكل على ا س : الشكل على ب س (ق ٢٤ ك ٥)  
فالشكلان على ب ا و ا س معا يعدلان الشكل على ب س وهي اشكال متشابهة

### القضية الثانية والثلاثون

مثلثان ضلعان من الواحد مناسبان لضلعين من الاخر اذا وضعت  
زاوية من الواحد بملامسة زاوية من الاخر حتى تكون اضلعها المتشابهة  
متوازية يكون الضلعان الاخران على استقامة واحدة



ليكن ا ب س د س ي مثلثين  
والضلعان ب ا ا س فليناسبيا س د د ي  
اي ب ا : ا س :: س د : د ي وليكن  
ا ب و د س متوازيين و ا س و د ي متوازيين  
فيكون ب س و س ي على استقامة واحدة

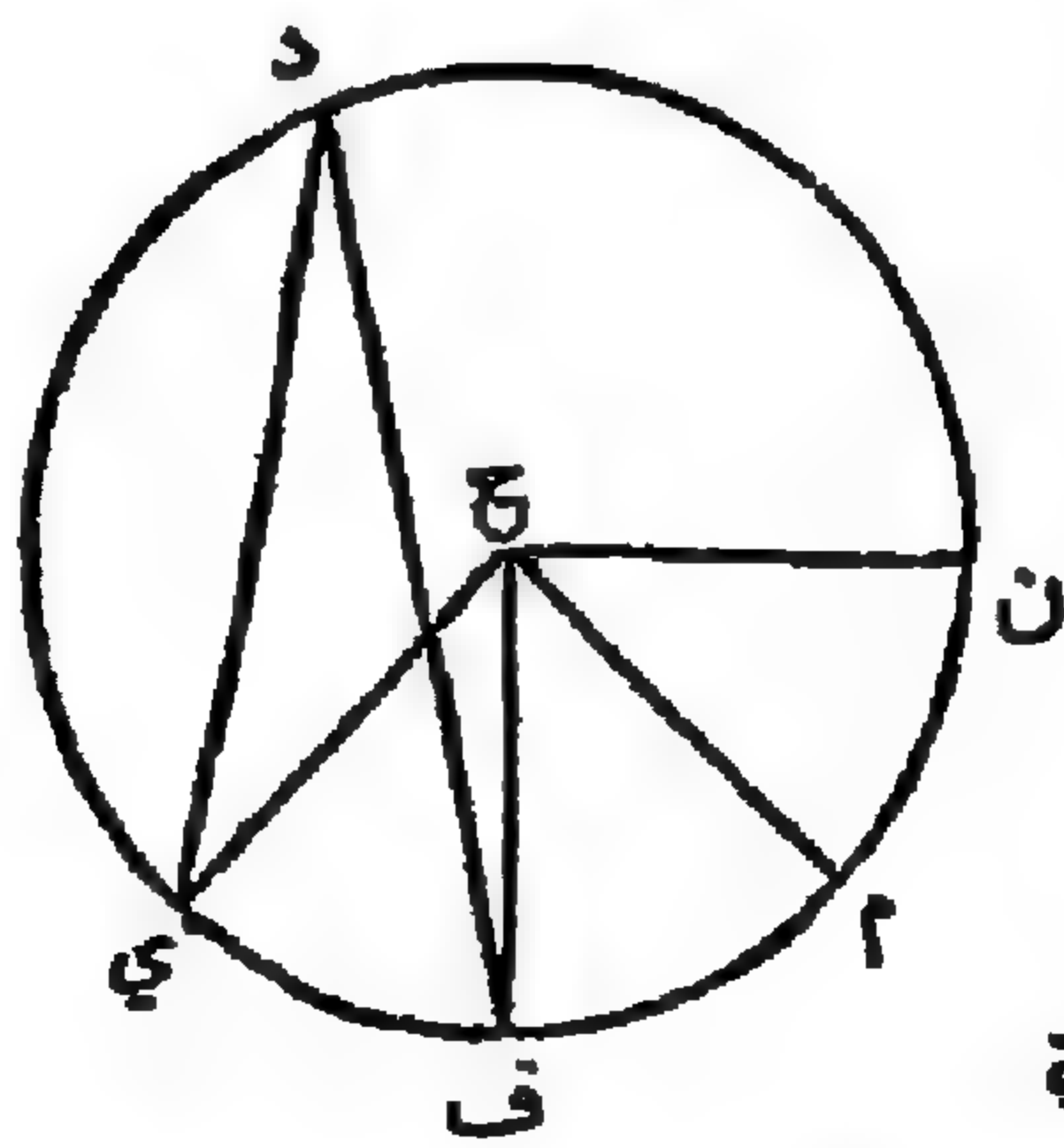
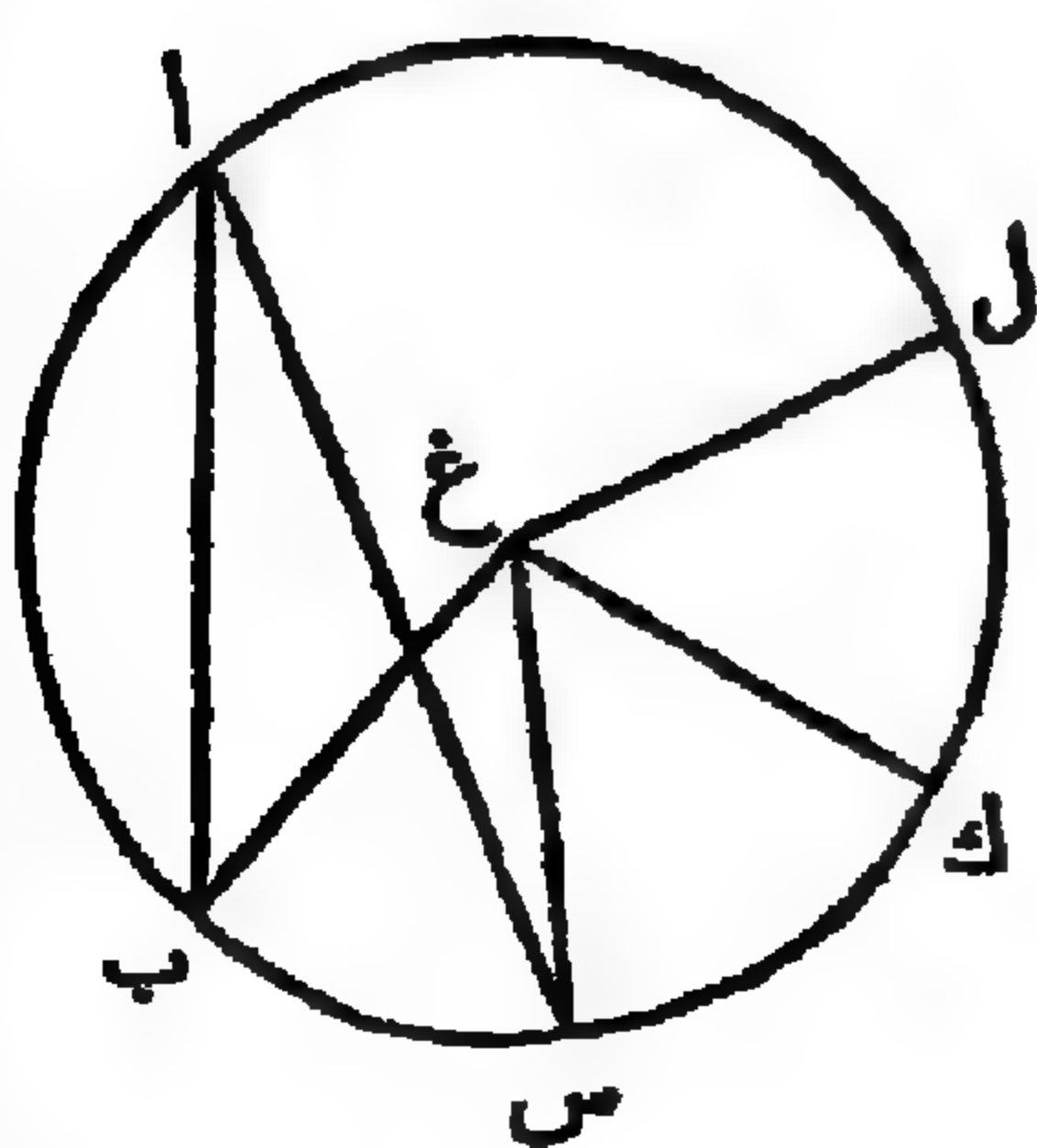
لان الخط المستقيم ا س يلاقي المتوازيين ا ب د س فالزاويتان المتبادلتان  
ب ا س ا س د متساويتان (ق ٢٩ ك ١) ولهذا السبب ايضاً الزاوية س د ي تعدل



الزاوية ا س د فالزاوية ب ا س تعدل س د ي وللمثلثان لهما الزاوية عند د تعدل  
الزاوية عند ا والاضلاع المحيطة بالزاويتين المتساويتين متناسبة اي ب ا ا س ::  
س د : د ي فزوايا المثلث ا ب س تعدل زوايا المثلث د س ي (ق ٦ ك ٦)  
فالزاوية ا ب س تعدل د س ي وقد تبين ان ب ا س تعدل ا س د فالكمل  
ا س ي يعدل الزاويتين ا ب س ب ا س. اضف الزاوية المشتركة ا س ب الى  
الجانبيين فالزاويتان ا س ي ا س ب تعدلان ا ب س ب ا س ا س ب وهذه  
الثلاث تعدل قائمتين (ق ٢٢ ك ١) فاذا ا س ي ا س ب تعدلان قائمتين  
فالخطان ب س س ي على استقامة واحدة (ق ١٤ ك ١)

### القضية الثالثة والثلاثون

في دوائر متساوية نسبة الزوايا في المركز او في المحيط بعضها الى بعض  
كنسبة الاقواس التي تقابلها بعضها الى بعض. وهكذا القطعان ايضاً  
لتكن ا ب س د ي ف دائرتين متساويتين فنسبة الزاوية في المركز ب غ س  
الى الزاوية في المركز ح ف والزاوية في المحيط ب ا س الى الزاوية في المحيط  
ي د ف كنسبة القوس ب س الى القوس ي ف والقطاع ب غ س : القطاع  
ي ح ف :: القوس ب س : القوس ي ف

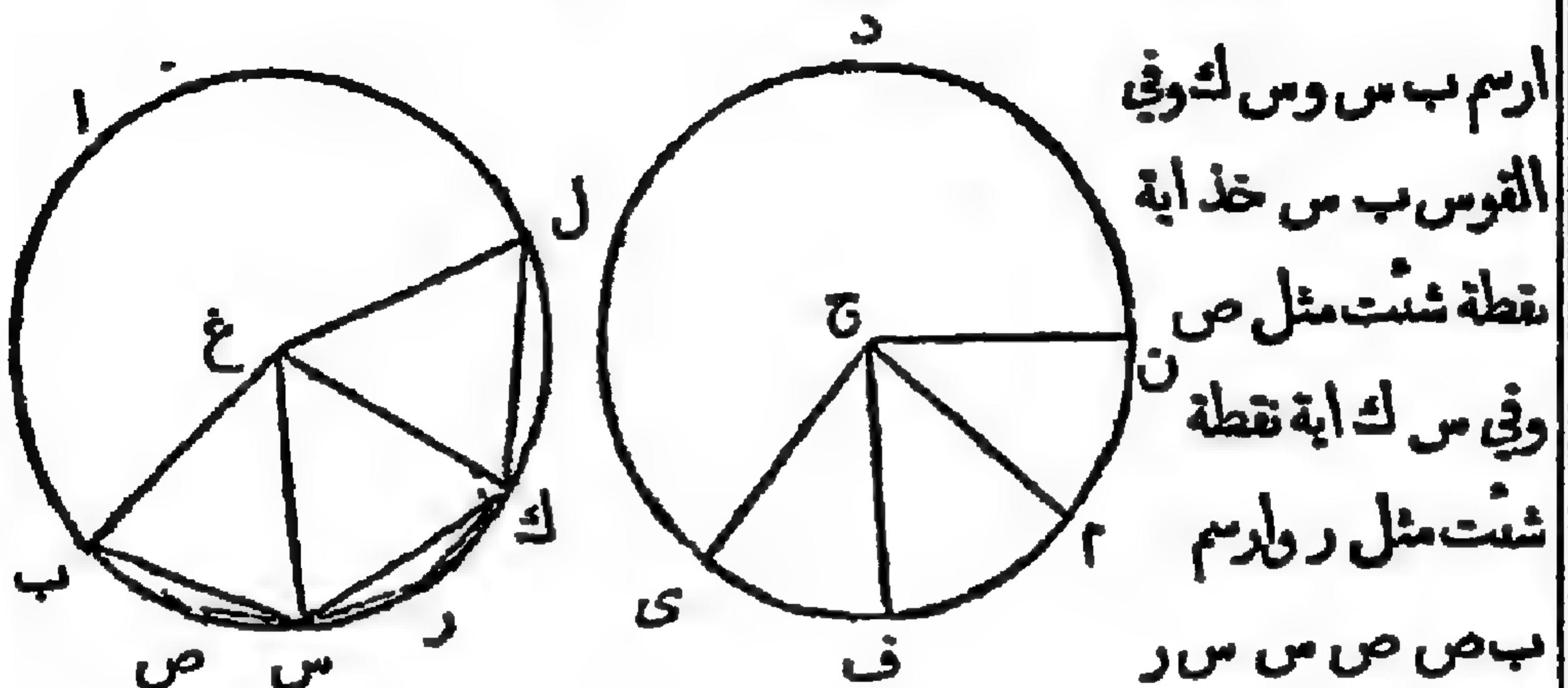


في الدائرة  
ا ب س اقطع  
اقواساً تعدل  
القوس ب س  
مثل س ك  
وكل وفي الدائرة

د ي ف اقطع اقواساً تعدل القوس ي ف مثل ف م م ن. ارسم غ ك غ ل ح م  
ح ن. فالزوايا ب غ س س غ ك ك غ ل متساوية لان الاقواس ب س س ك  
كل متساوية (ق ٢٧ ك ٢) فاي مضروب كان القوس ب ل من القوس ب س  
كان ب غ ل ذات هذا المضروب من ب غ س. وعلى هذا الاسلوب يتضح ان

ي ح ن ذات المضروب من ي ح ف الذي كان القوس ي ن من القوس ي ف  
والقوس ب ل اذا عدل القوس ي ن فالزاوية ب غ ل تعدل الزاوية ي ح ن  
(ق ٢٧ ك ٢) وان كان اعظم فاعظم وان كان اصغر فاصغر فنسبة ب س : ي ف  
:: ب غ س : ي ح ف (حد ٥ ك ٥) ولكن ب غ س : ي ح ف :: ب ا س :  
ي د ف (ق ١٥ ك ٥) لان كل واحدة مضاعف نظيرها (ق ٢٠ ك ٢) فنسبة القوس  
ب س : القوس ي ف :: الزاوية ب غ س : الزاوية ي ح ف وكسبة الزاوية ب ا س  
: الزاوية ي د ف

كذلك القطاع ب غ س : القطاع ي ح ف :: القوس ب س : القوس ي ف



رك. فضلعان من المثلث غ ب س اي ب غ ع س يعدلان ضلعين من المثلث  
غ س ك اي س غ غ ك والزاوية ب غ س = س ع ك فالقاعدة ب س = القاعدة  
س ك (ق ٤ ك ١) والمثلث ب غ س = المثلث س غ ك. ولكون القوس ب س =  
القوس س ك فالباقي من كل المحيط ب ا س يعدل الباقي س ا ك فالزاوية  
ب ص س تعدل الزاوية س ر ك (ق ٢٧ ك ٢) والقطعة ب ص س تشبه القطعة  
س ر ك (حد ٩ ك ٢) وهما على خطين مستقيمين متساويين ب س وس ك فهما  
متساويان (ق ٢٤ ك ٢) فالقطعة ب ص س تعدل القطعة س ر ك وهكذا ايضا  
يبرهن ان القطاع ك غ ل يعدل ب غ س اوس غ ك. وهكذا يبرهن ايضا ان  
القطاعان ي ح ف ف ح م م ح ن متساوية. فاسي مضروب كان القوس ب ل  
من القوس ب س فالقطاع ب غ ل هو ذات ذلك المضروب من القطاع  
ب غ س وهكذا ايضا اي مضروب كان القوس ي ن من القوس ي ف فالقطاع  
ي ح ن هو ذات ذلك المضروب من القطاع ي ح ف. فالقوس ب ل اذا  
عدل القوس ي ن فالقطاع ب غ ل يعدل القطاع ي ح ن واذا كان اكر

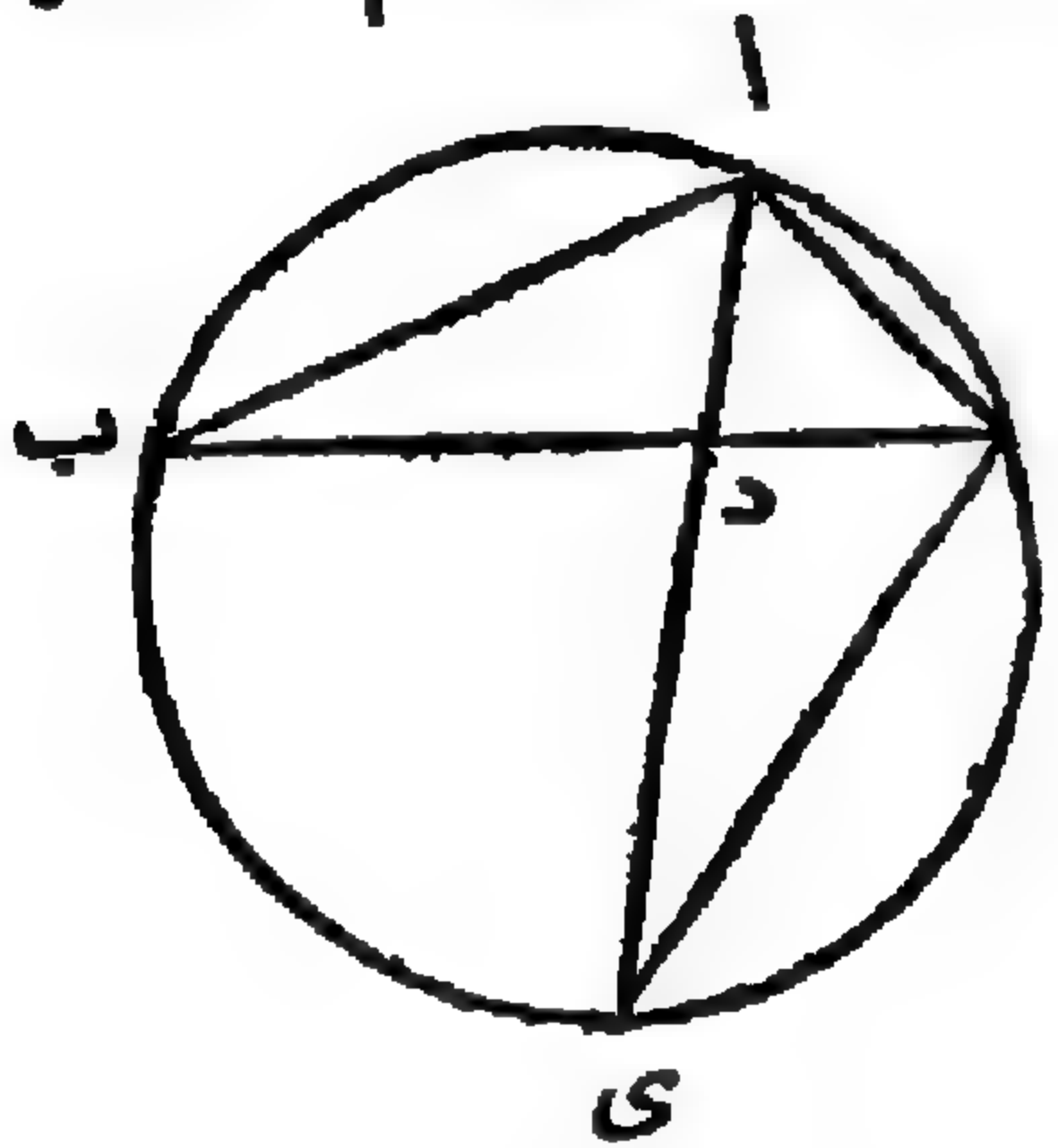


فاكبر واذا كان اصغر فاصغر فاذا ( ح د ه ك ه ) القوس ب س : القوس ي ف ::  
القطاع ب غ س : ي ح ف

قضية ب ن

اذا تنصفت زاوية مثلث بخط مستقيم يقطع القاعدة ايضا فالقائم  
الزوايا مسطح ضلعي المثلث يعدل القائم الزوايا مسطح قسبي القاعدة  
مع مربع الخط المستقيم الذي ينصف الزاوية

ليكن ا ب س مثلثا ولننصف الزاوية ب ا س منه بالخط المستقيم ا د الذي  
يقطع القاعدة في النقطة د. فالقائم الزوايا ب ا  
 $\times$  ا س = ب د  $\times$  د س + ا د<sup>٢</sup>



ارسم دائرة تحيط بالمثلث ا ب س ( ق ٥  
ك ٤ ) واخرج ا د حتى يلاقي المحيط في ي وارسم  
ي س. فلكون الزاوية ب ا د تعدل الزاوية  
س ا ي والزاوية ا ب د تعدل الزاوية ا ي س

( ق ١ ك ٢ ) لانها في قطعة واحدة فالمثلثان ا ب د ا ي س متساويا الزوايا ونسبة  
ب ا : ا د :: ي ا : ا س ( ق ٤ ك ٦ ) فاذا ب ا  $\times$  ا س = ا د  $\times$  ا ي ( ق ٦ ك ٦ )  
= ي د  $\times$  ا د + ا د<sup>٢</sup> ( ق ٢ ك ٢ ) وي د  $\times$  ا د = ب د  $\times$  د س ( ق ٢٥ ك ٢ ) فاذا  
ب ا  $\times$  ا س = ب د  $\times$  د س + ا د<sup>٢</sup>

قضية ج ن

اذا رسم من زاوية مثلث خط مستقيم عمود على القاعدة فالقائم الزوايا  
مسطح ضلعي المثلث يعدل القائم الزوايا مسطح العمود وقطر الدائرة  
المحيطة بالمثلث

ليكن ا ب س مثلثا وليرسم العمود ا د على القاعدة ب س من الزاوية عند ا.



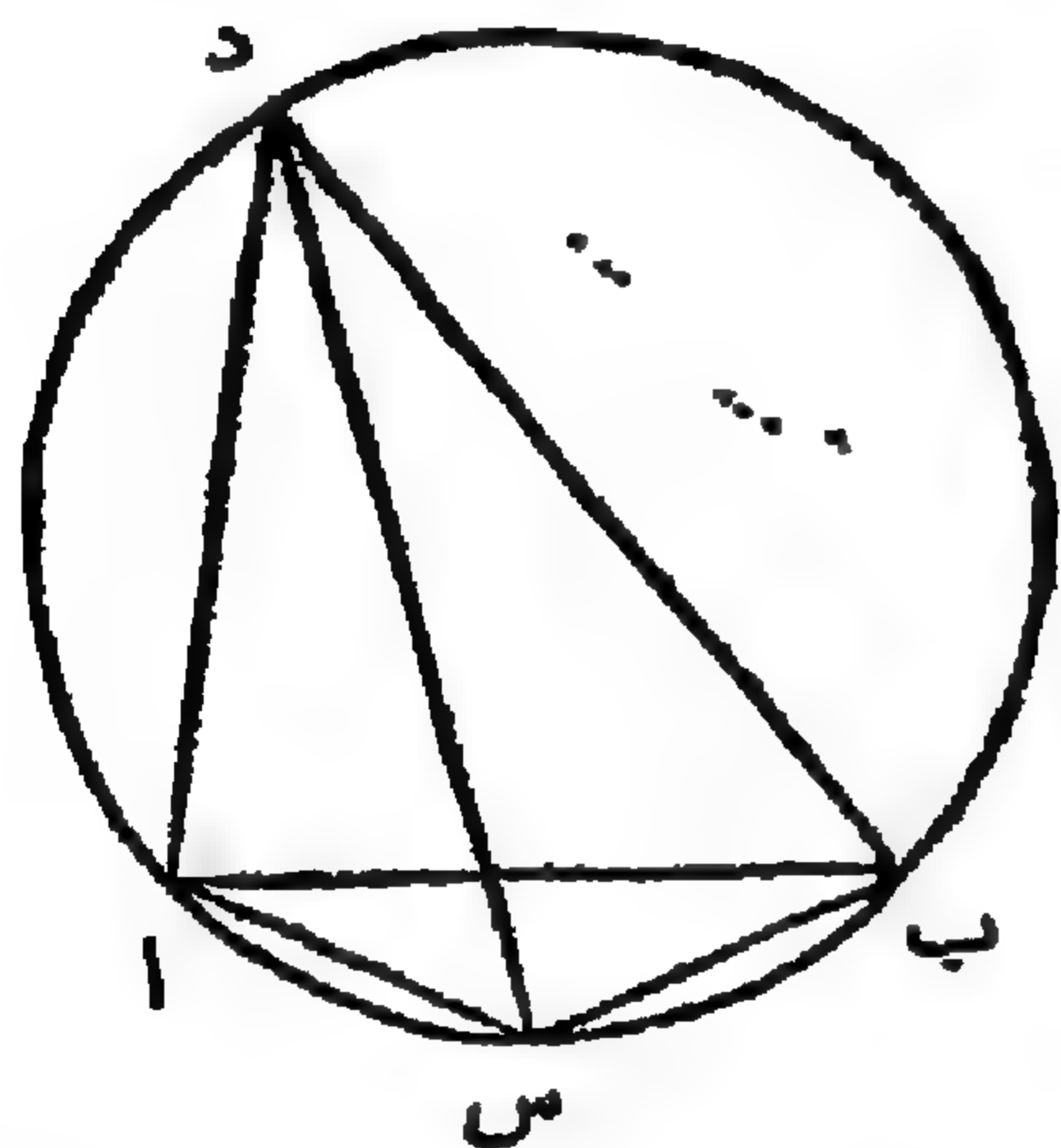


ب د  $\times$  س ي + ب د  $\times$  ا ي = ب د  $\times$  ا س (ق ١ ك ٢) فالقائم الزوايا ب د  $\times$   
ا س = ا ب  $\times$  س د + ا د  $\times$  ب س

### قضية لا ون

اذا تنصف قوس دائرة ورسم من طرفيه ومن نقطة الاتصاف خطوط مستقيمة الى نقطة ما من المحيط تكون نسبة مجتمع الخطيين المرسومين من طرفي القوس الى الخط المرسوم من نقطة اتصافه كنسبة وتر القوس الى وتر نصفه

لتكن ا ب د دائرة وليتنصف القوس ا ب منها في س ولترسم المخطوط المستقيمة ا د س د ب د من طرفي القوس ومن نصفه الى النقطة د من المحيط فنسبة مجتمع الخطيين ا د ب الى د س كنسبة ب الى ا س



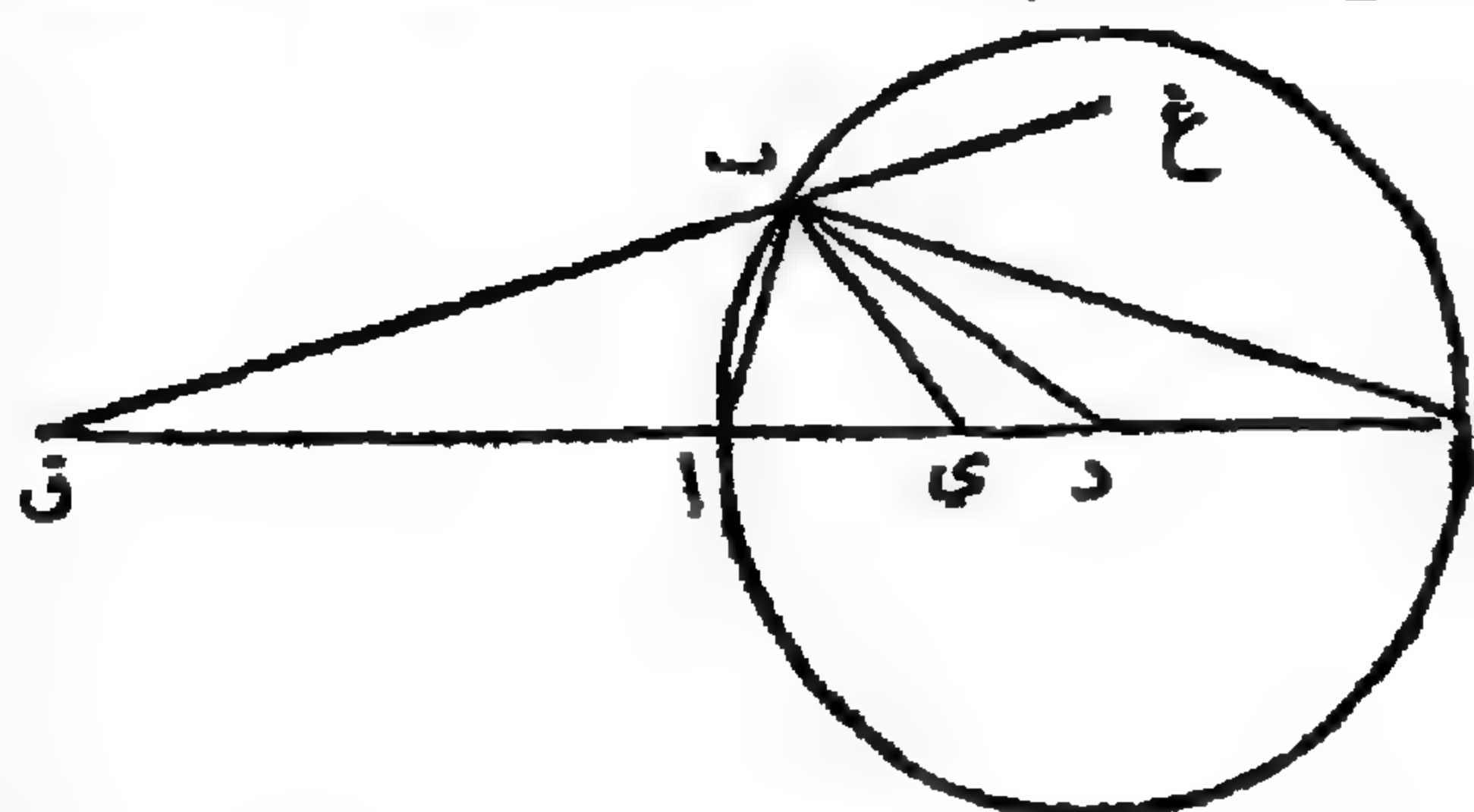
لكون ا د ب س ذارعة اضلاع في دائرة وقطرها ا ب ود س فالقائم الزوايا ا د  $\times$  س ب + د ب  $\times$  ا س = ا ب  $\times$  س د

(ق د ك ٦) ولكن ا د  $\times$  س ب + د ب  $\times$  ا س = ا د  $\times$  ا س + د ب  $\times$  ا س لان  
ا س = س ب فاذا ا د  $\times$  ا س + د ب  $\times$  ا س (اي) (ق ١ ك ٢) (ا د + د ب)  $\times$   
ا س = ا ب  $\times$  س د. واضلاع اشكال متساوية قائمة الزوايا هي متناسبة بالتكافؤ  
(ق ٤ ك ٦) فتكون نسبة ا د + د ب : د س :: ا ب : ا س

### قضية ون

اذا تعينت نقطتان في قطر دائرة بعد اخراجه حتى ان القائم الزوايا مسطح القسمين بين النقطتين ومركز الدائرة يعدل مربع نصف القطر

ورسم من هاتين النقطتين خطان مستقيمان الى نقطة ما من المحيط  
تكون نسبة احدها الى الاخر كنسبة احد قسي القطرين بين احدي  
النقطتين المذكورتين والمحيط الى الاخر بين النقطة الاخرى والمحيط  
لتكن ا ب م دائرة مركزها د. اخرج د ا و عين فيه نقطتين ي و ق حتى ان  
القائم الزوايا ي د ق يعدل مربع ا د ويرسم ي ب ق ب الى ب نقطة من المحيط



فنسبة ق د : د ب :: د ب : د ي (ق ١٧ ك ٦). فالمثلثان ق د ب ب د ي  
 اضلاعها المحيطة بالزاوية المشتركة د هي متناسبة وها اذا متساويا الزوايا (ق ٦ ك ٦)  
 والزاوية د ي ب تعدل د ب ق و د ب ي تعدل د ق ب. ولكون الاضلاع  
 المحيطة بهذه الزوايا المتساوية متناسبة (ق ٤ ك ٦) فنسبة ق ب : ب د :: ب ي :  
 ي د وبالمبادلة (ق ١٦ ك ٥) ق ب : ب ي :: ب د : ي د اوق ب : ب ي :: ا د :  
 د ي ولأن ق د : د ا :: د ا : د ي فبالقسمة (ق ١٧ ك ٥) ق ا : د ا :: ا ي : د ي  
 وبالمبادلة (ق ١١ ك ٥) ق ا : ا ي :: د ا : ي د وقد تبهرن ان ق ب : ب ي ::  
 ا د : د ي فتكون نسبة ق ب : ب ي :: ق ا : ا ي

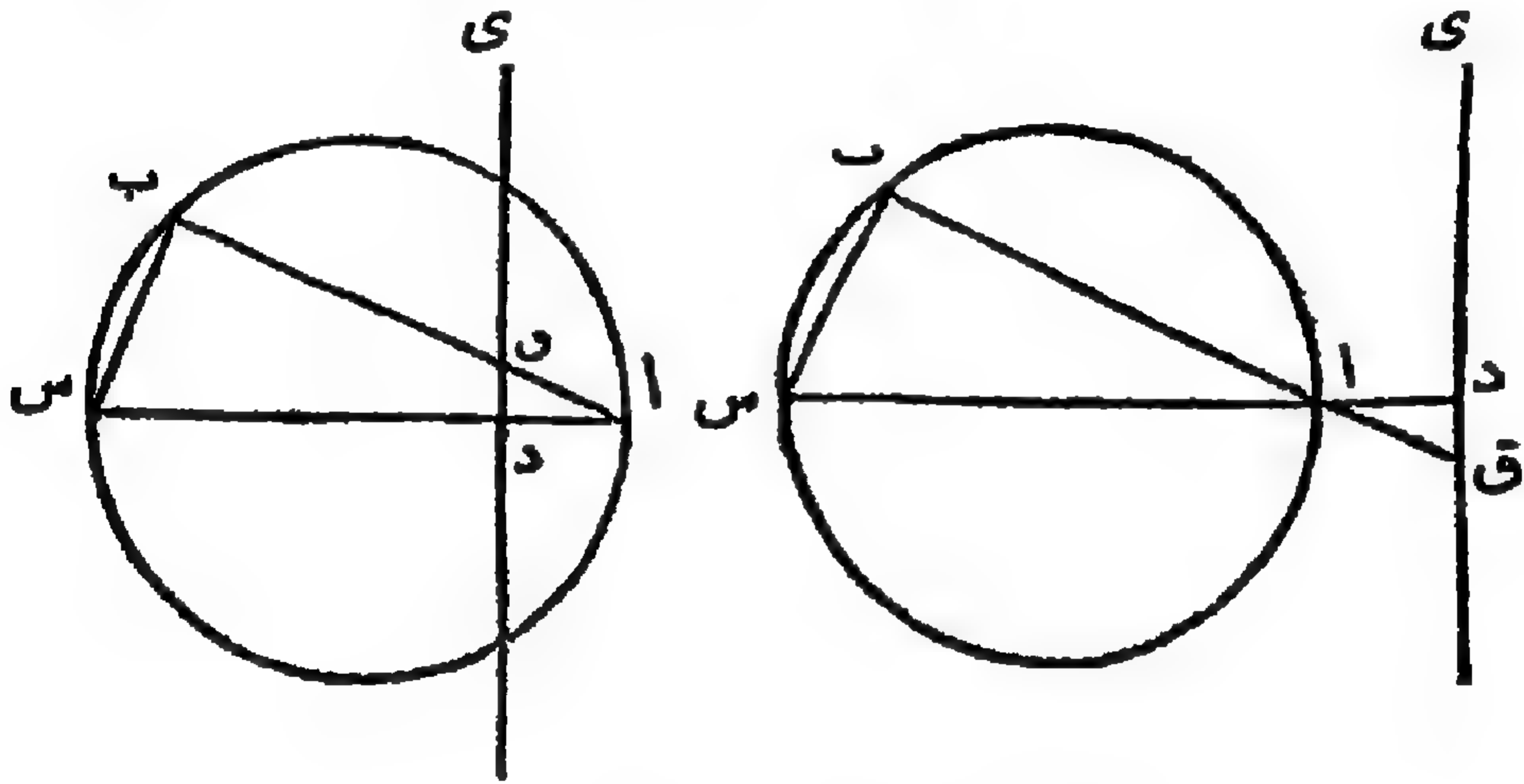
فرع. اذا رُسم ا ب فلكون ق ب : ب ي :: ق ا : ا ي تكون الزاوية ق ب ي  
 قد تنصفت بالخط ا ب (ق ٢ ك ٦). ولأن ق د : د س :: د س : د ي وبالتركيب  
 (ق ١٨ ك ٥) ق س : د س :: س ي : ي د وقد تبهرن ان ق ا : ا د او د س ::  
 ا ي : ي د فبالمساواة ق ا : ا ي :: ق س : س ي ولكن ق ب : ب ي :: ق ا : ا ي  
 فاذا ق ب : ب ي :: ق س : س ي (ق ١١ ك ٥) فاذا أُخرج ق ب الى غ  
 ورُسم ب س فالزاوية ي ب غ تنصف بالخط ب س (ق ١ ك ٦)



قضية زين

اذا رُسم من طرف قطر دائرة خطٌ مستقيمٌ في الدائرة واذا لاقى خطاً  
عموداً على القطر داخل الدائرة او خارجها بعد اخراجه فالقائم الزوايا  
مسطح الخط المستقيم في الدائرة والقسم منه الواقع بين طرف القطر  
والخط العمودي على القطر يعدل القائم الزوايا مسطح الخط القطر والقسم  
منه المقطوع بالعمود عليه

فكن ا ب س دائرة قطرها ا س وليكن د ي عموداً على القطر ا س وليلاقه

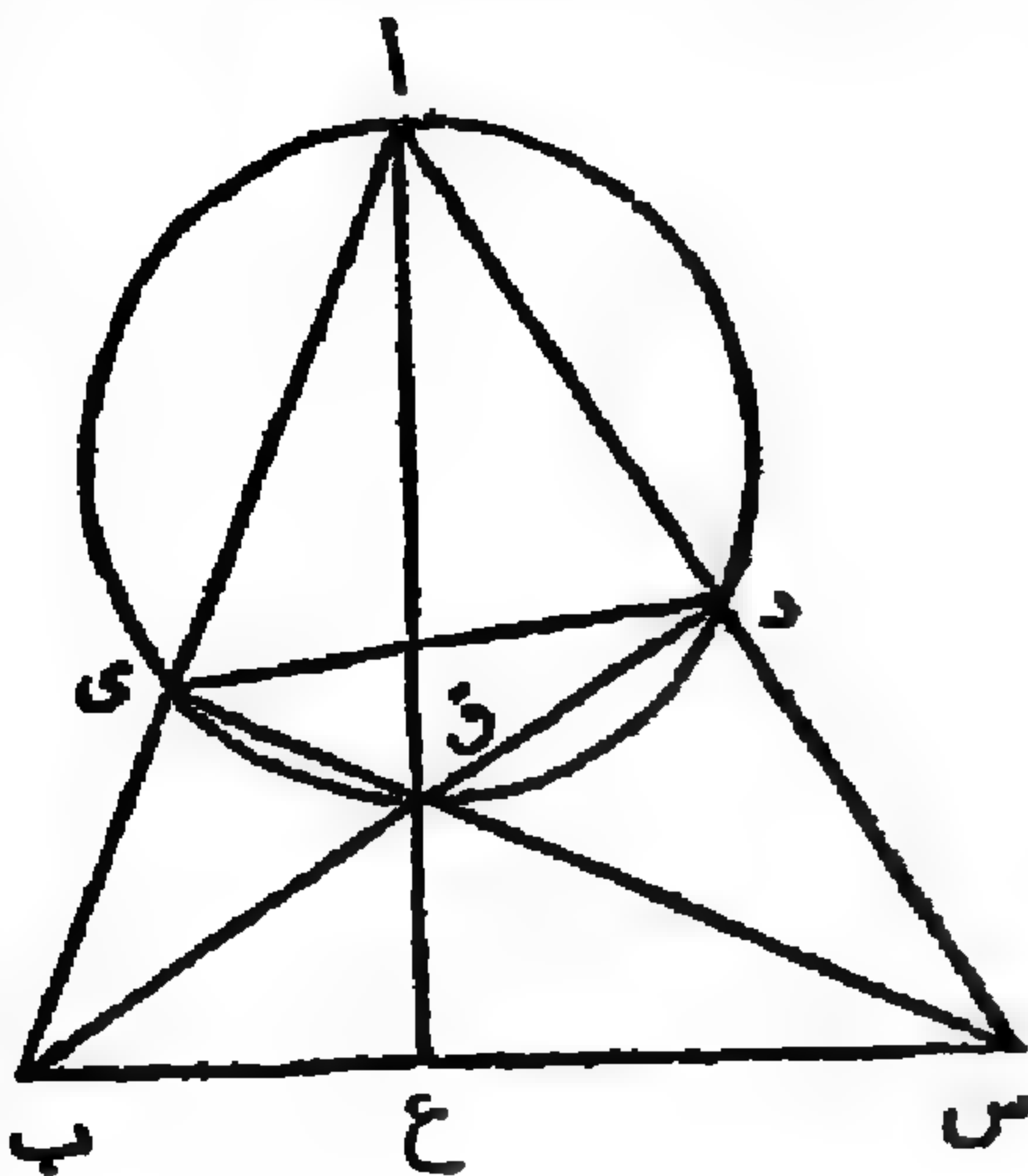


ا ب في ق فالقائم الزوايا ب ا  $\times$  ا ق = س ا  $\times$  ا د

ارسم ب س. فالزاوية ا ب س قائمة لانها في نصف دائرة (ق ٣١ ك ٣)  
وا د ق ايضاً قائمة حسب المفروض والزاوية ب ا س هي ذات الزاوية د ا ق او  
مقابلة لها فلثلاثان ا ب س ا د ق متساويا الزوايا ونسبة ب ا : ا س :: ا د : ا ق  
(ق ٤ ك ٦) فالقائم الزوايا ب ا  $\times$  ا ق = س ا  $\times$  ا د (ق ١٦ ك ٦)

قضية ح. ن

العموديات من زوايا مثلث الى الاضلاع المتقابلة تقاطع في نقطة واحدة  
ليكن ا ب س مثلثا و ب د و س ي عمودين يتقاطعان في ق



ارسم اق ولخرج حتى يلاقي ب س في  
غ. فالحظ اغ عمود على ب س. ارسم دى  
ولرسم الدائرة اى ق تحيط بالمثلث اى ق.  
فلكون اى ق قائمة فالحظ اق قطر الدائرة  
المحيطة بالمثلث اى ق (ق ٢١ ك ٢) واق  
ايضا قطر الدائرة المحيطة بالمثلث ادق  
فالقطاى ق د في محيط دائرة واحدة.

ولكون الزاوية اى ق ب تعدل الزاوية دق س (ق ١٥ ك ١) والزاوية بى ق تعدل  
س دق لانها قائمتان فالمثلثان بى ق س دق متساويا الزوايا ونسبة ب ق :  
ى ق :: س ق : دق (٦ ك ٤) وبالمبادلة ب ق : س ق :: ى ق : دق (ق ١٦ ك ٥)  
فلكون الاضلاع المحيطة بالزاويتين المتساويتين ب ق س ى ق د متناسبة فالمثلثان  
ب ق س ى ق د متساويا الزوايا (ق ٦ ك ٦) فالزاوية ق س ب تعدل ى دق.  
ولكن ى دق تعدل اى ق لانها في قطعة واحدة (ق ٢١ ك ٢) فالزاوية اى ق  
تعدل الزاوية ق س غ والزاويتان اى ق س ق غ متساويتان ايضا لانها متقابلتان  
(ق ١٥ ك ١) فالزاويتان اى ق ق غ س متساويتان ايضا (فرع ٤ ق ٢٢ ك ١)  
ولكن اى ق قائمة فتكون ق غ س ايضا قائمة واغ عمود على ب س

فرع. المثلث ادى يشبه المثلث اب س. لان المثلثين ب ا د س اى لها  
الزاويتان عند دوى قائمتان والزاوية عدا مشتركة بينهما فنسبة ب ا : ا د :: س ا :  
اى وبالمبادلة ب ا : س ا :: ا د : اى. فالمثلثان ب ا س د اى لها الزاوية عدا  
مشتركة بينهما والاضلاع المحيطة بها متناسبة فهما متساويا الزوايا ومتشابهان (ق ٦  
ك ٦)

التائم الزوايا ب ا × اى = س ا × ا د

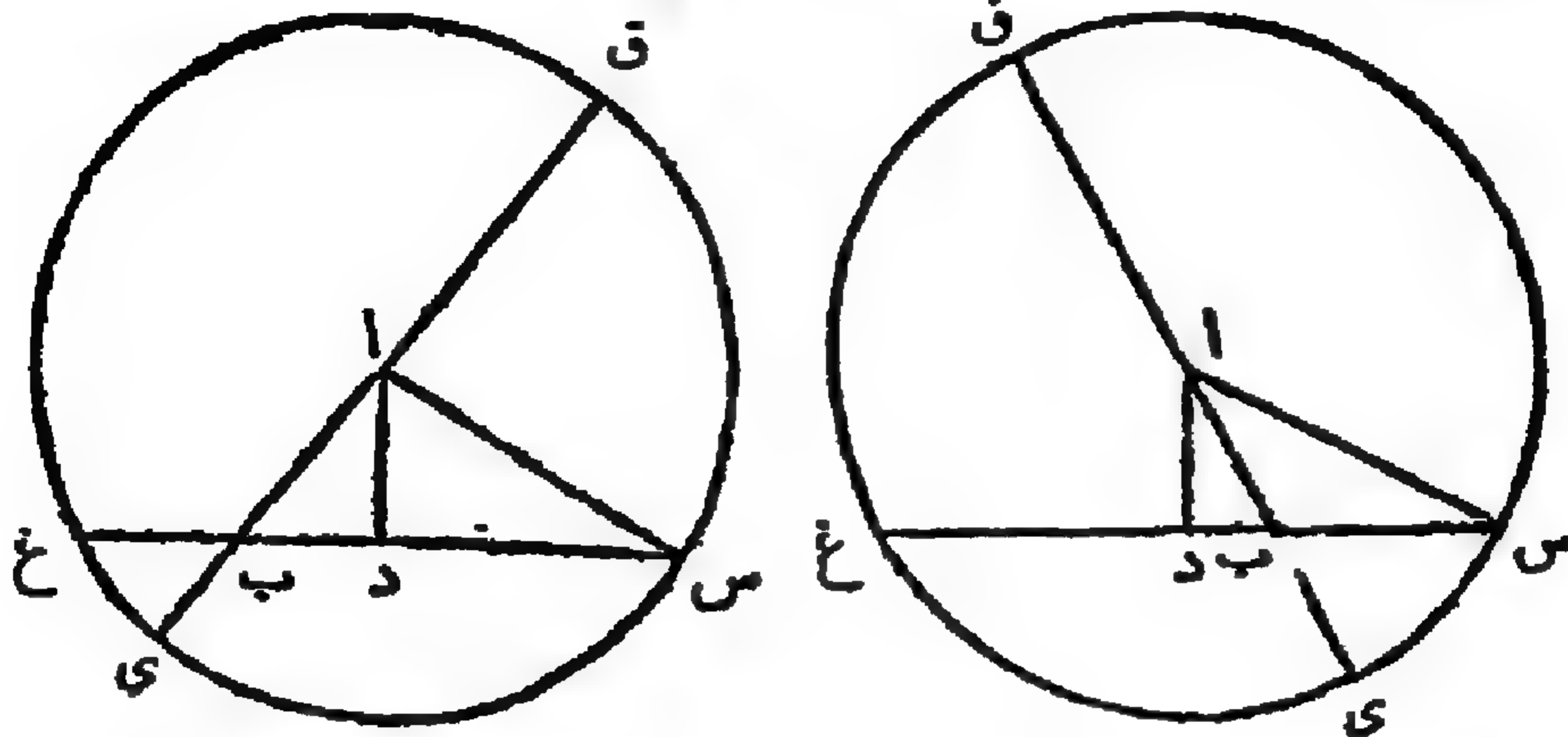
قضية ط. ن

اذا رسم من زاوية مثلث عمود على القاعدة فالتائم الزوايا مسطح مجتمع



الضلعين الاخرين في فضلتهما يعدل القائم الزوايا مسطح مجتمع قسي  
القاعدة في فضلتهما

ليكن اب س مثلثا ومن الزاوية ب اس يترسم ا د عمودا على القاعدة ب س



فالقائم الزوايا (اس + اب) × (اس - اب) = (س د + دب) × (س د - دب)  
دب) اجل ا مركزا واس اطول الضلعين نصف قطري وارسم الدائرة س ق غ  
واخرج ب ا حتى يلاقي المحيط في ق وي واخرج س ب حتى يلاقي المحيط في غ.  
فلان اق = اس فالخط ب ق = اب + اس مجتمع الضلعين ولان اي = اس  
فالخط ب ي = اس - اب فضلة الضلعين. ولكون ا د عمودا من المركز على غ س  
فهو بنصفه ايضا فاذا وقع العمود داخل المثلث فالخط ب غ = د غ - دب =  
د س - دب = فضلة قسي القاعدة وب س = ب د + د س = مجتمع قسي القاعدة  
واذا وقع ا د خارج المثلث فالخط ب غ = د غ + دب = س د + دب = مجتمع  
القسمين وب س = س د - دب = فضلتهما. وعلى الحالتين لان الخطين ق ي  
غ س يتقاطعان في ب فالقائم الزوايا ق ب × ب ي = س ب × ب غ او حسبا  
تقدم (اس + اب) × (اس - اب) = (س د + دب) × (س د - دب)

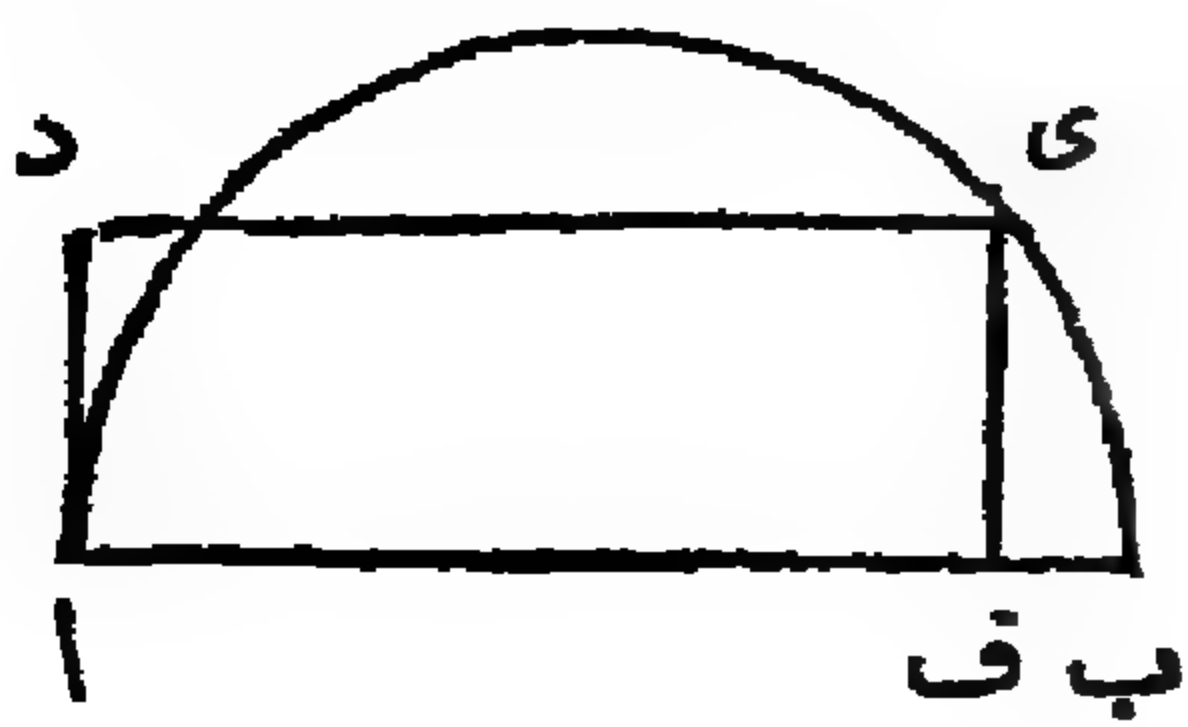
عملیات ملحقات بالكتاب السادس

قضية ي. ع

علينا ان نرسم مربعا يعدل شكلا مفروضا اذا اضلاع مستقيمة







اجعل اب قطراً وارسم  
عليه نصف دائرة وارسم د ي  
حتى يوازي اب واجعل ا د  
(اي ضلعاً من المربع المفروض)

البعد بينها والخط د ي فليقطع نصف الدائرة في ي ومن ي ارسم ي ف عموداً  
على اب فيكون اف  $\times$  ف ب الشكل المطلوب  
لان مجتمعا يعدل اب ومسطحها اف  $\times$  ف ب يعدل مربع ف ي او ا د  
و ا د = س

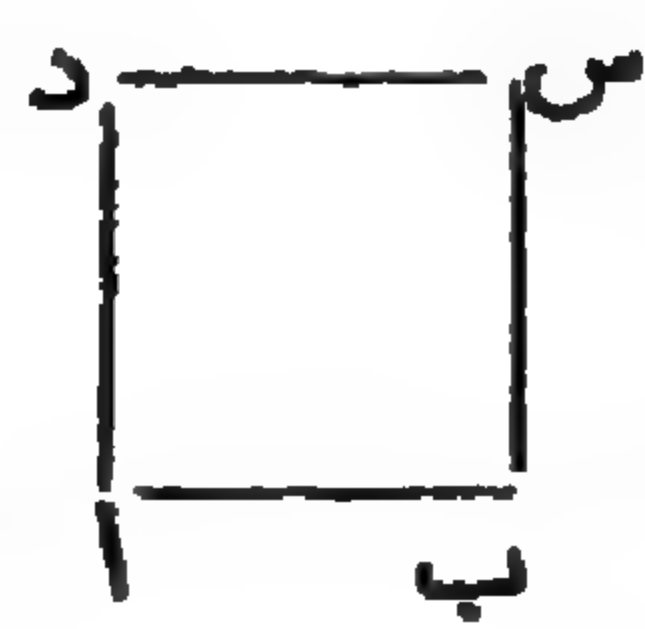
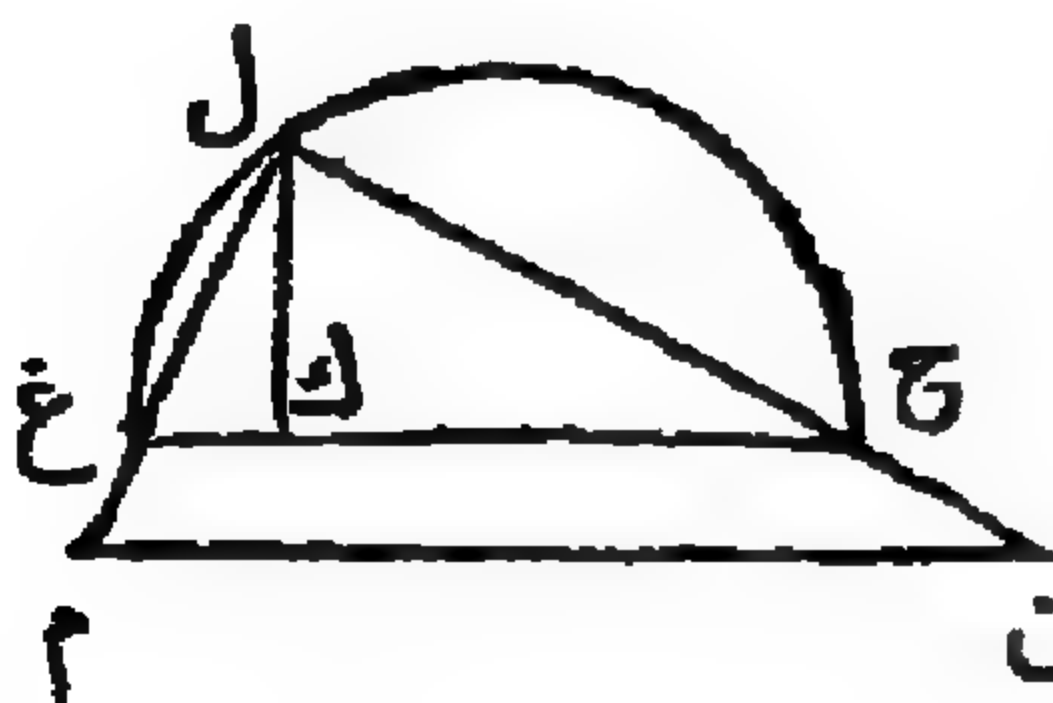
تعليقة. حتى تكون هذه القضية ممكنة لا يكون ا د اطول من نصف القطر. اي  
ضلع من س لا يكون اطول من نصف الخط ا ب

### قضية م. ع

علينا ان نرسم مربعاً تكون نسبته الى مربع مفروض كنسبة خط مفروض  
الى خط اخر مفروض

ليكن اس المربع المفروض وي وف الخطين المفروضين

ليكن غ ح خطاً مستقيماً غير معين طوله وافصل منه غ ك حتى يعدل ي  
وك ح حتى يعدل ف وعلى  
غ ح ارسم نصف دائرة وارسم  
ك ل عموداً على غ ح وارسم  
ل غ م حتى يعدل اب ارسم  
م ن حتى يوازي غ ح واخرج



ل ح الى ن. فلكون م ن يوازي ع ح فنسبة ل م : ل ن :: ل غ : ل ح ول م :  
ل ن :: ل غ : ل ح (ق ٢٢ ك ٦) ول غ ح مثلث قائم الزاوية فنسبة ل غ :  
ل ح :: غ ك : ك ح فاذا ل م : ل ن :: غ ك : ك ح وقد فرض ان غ ك = ي  
وك ح = ق ول م = اب فالربع على اب : المربع على ل ن :: ي : ف

قضية ن.ع

علينا ان قسم مثلثا الى قسمين بخط من احدى زواياه حتى تكون

نسبة قسم الى اخر كنسبة خط مثل م الى خط مثل ن

اقسم ب س الى قسمين ب د و د س مناسبين للخطين م ون وارسم ا د



فينقسم المثلث حسب المفروض لان

المثلثات التي لها علو واحد بعضها الى

بعض كفواعدها بعضها الى بعض فلما

ا ب د : ا د س :: ب د : د س :: م : ن س

تعليقة . يمكن اقسام مثلث الى اجزاء كثيرة مناسبة لخطوط مفروضة وذلك

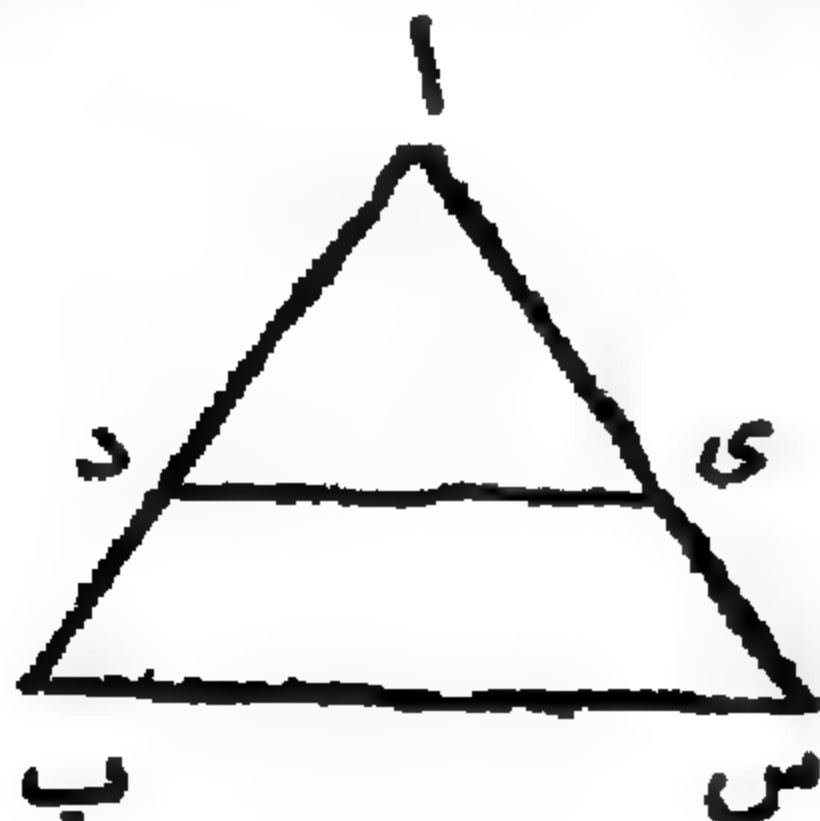
باتقسام القاعدة على التناسب المفروض

قضية س.ع

علينا ان قسم مثلثا الى قسمين بخط يوازي احد اضلاعه حتى نكون

نسبة قسم الى اخر كنسبة خط مستقيم م الى خط مستقيم ن

اجعل ا ب : ا د :: م : ن + م + ن : ا ر م دى حتى يوازي ب س فقد انقسم



المثلث حسب المفروض

لان المثلثين ا ب س ا دى متشابهان و ا ب س

: ا دى :: ا ب : ا د ولكن م : ن + م + ن :: ا ب : ا د

فيكون ا ب س : ا دى :: م : ن + م + ن فاذا ب دى س

: ا دى :: م : ن

قضية ع.ع

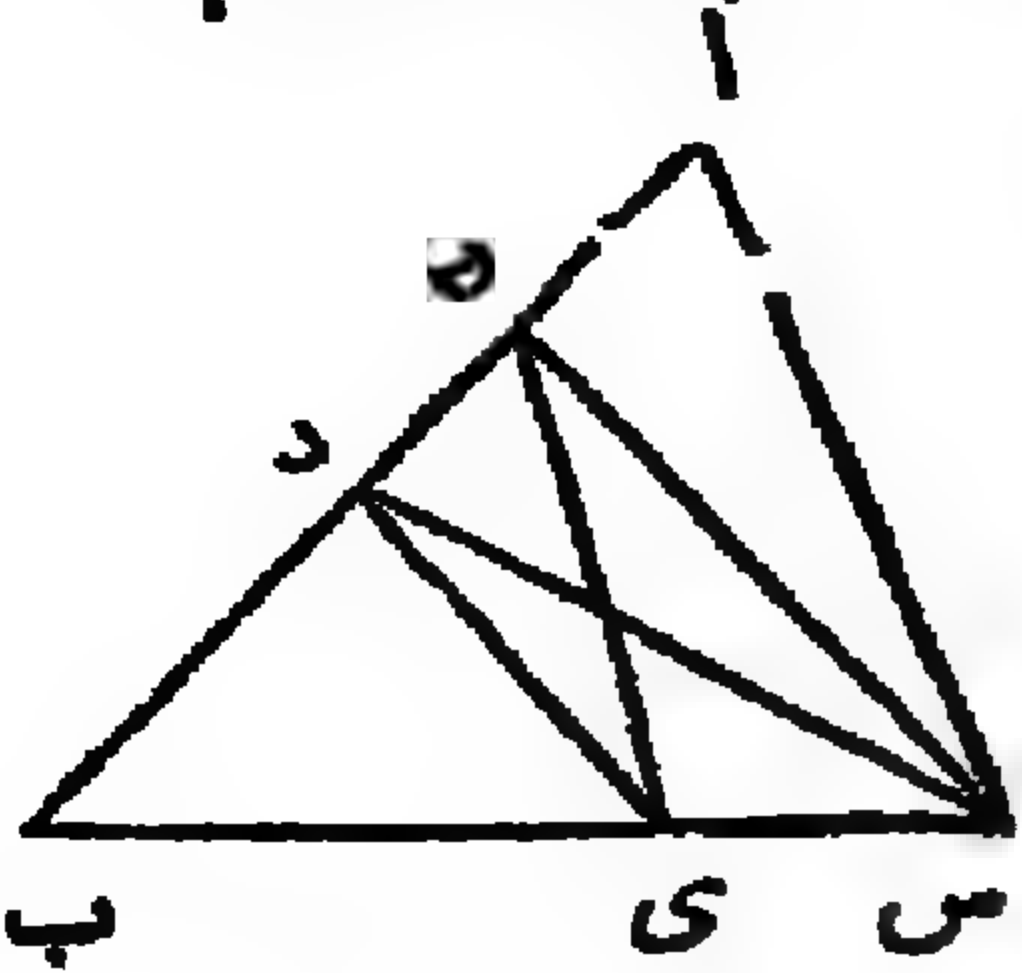
علينا ان قسم مثلثا مفروضا الى قسمين بخط مستقيم من نقطة

مفروضة في احد اضلاعه حتى تكون نسبة قسم الى اخر كنسبة خط

مستقيم م الى خط مستقيم ن



ليكن  $اب س$  المثلث المفروض ون النقطة المفروضة. ارسم  $ن س$  واقسم  $اب$  في  $د$  حتى يكون  $اد: دب:: م: ن$ . وارسم  $دي$  حتى يوازي  $ن س$  وارسم  $ن ي$  فالخط  $ن ي$  يقسم المثلث حسب المفروض



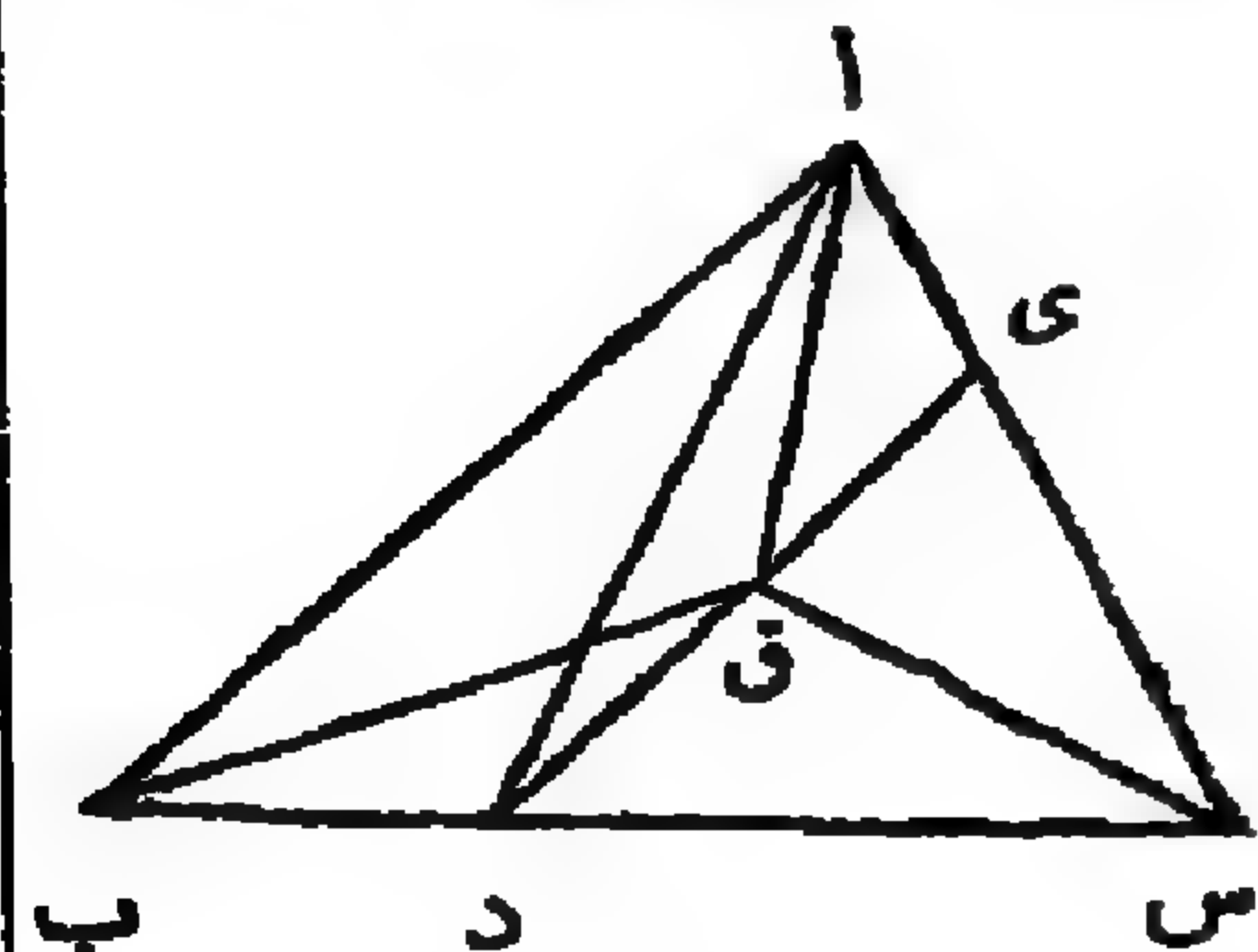
ارسم  $د س$ . فلأن  $دي ن س$  متوازيان فالمثلثان  $ن دي س$  و  $دي س$  متساويان. اضعف الى كل واحد

منها المثلث  $دي ب$  فالمثلث  $ن ي ب = د س ب$ . فاذا طرح كل واحد من المثلث  $اب س$  يبقى الشكل ذو الاضلاع الاربعة  $اس ي ن$  وهو يعدل المثلث  $اس د$  و  $اس د: د س ب:: اد: دب:: م: ن$  فيكون  $اس ي ن: ن ي ب:: م: ن$  تعلية. على هذا الاسلوب ينقسم مثلث الى اجزاء كثيرة متساوية بخطوط من نقطة مفروضة في احد اضلاعه. لانه اذا انقسم  $اب$  الى اجزاء متساوية ورسم من نقط الانقسام خطوط توازي  $ن س$  فانها تقطع  $ب س$  و  $اس$  ومن هذه نقط التقاطع اذا رسمت خطوط الى  $ن$  تقسم المثلث الى الاقسام المطلوبة

### قضية ف. ع

علينا ان تقسم مثلثا الى ثلاثة اقسام متساوية بخطوط مستقيمة من زواياه الى نقطة واحدة داخله

اجعل  $ب د$  ثلث  $ب س$  وارسم  $دي$  حتى يوازي  $ب ا$  الضلع الذي يلي  $ب د$ . نصف  $دي$  في  $ق$  ومن  $ق$  ارسم الخطوط المستقيمة  $ق ا$   $ق ب$   $ق س$  فقد انقسم المثلث حسب المفروض



ارسم  $دا$ . فلكون  $ب د$  ثلث  $ب س$  فالمثلث  $اب د$  هو ثلث المثلث  $اب س$ .

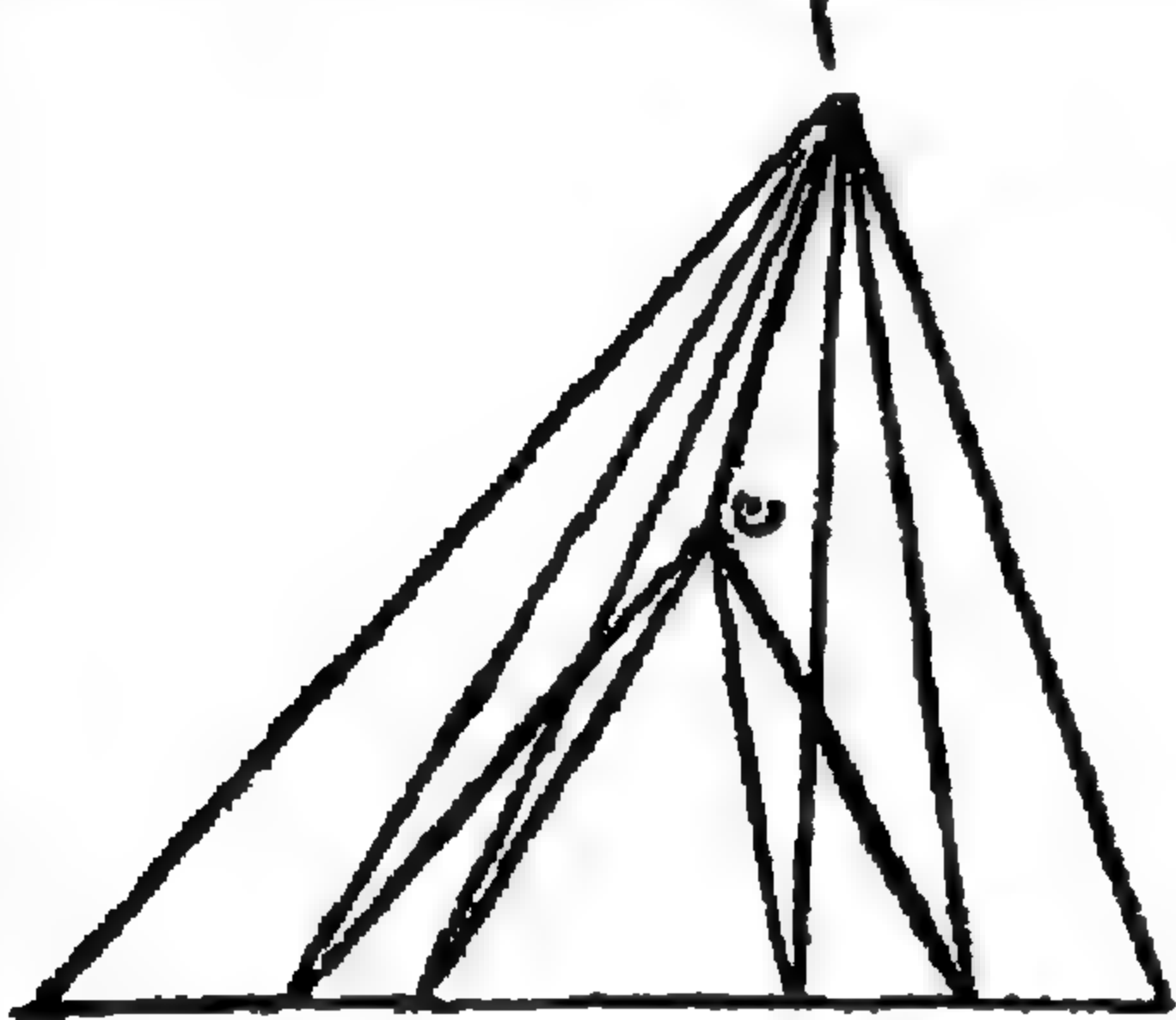
و  $اب د = اق ب ق$  (ق ٢٧ ك ١) فاذا  $اق ب ق$  هو ثلث  $اب س$ . ولأن  $د ق = ق ي$  فالمثلث  $ب د ق = اق ي$  وكذلك  $س د ق = ق ي$  فالكلي  $ب ق س$  يعدل الكل  $اق س$  وقد تبرهن ان  $اق ب ق$  يعدل ثلث  $اب س$  فكل واحد من المثلثات

ا ب ق ب ق س س ق ا يعدل ثلث ا ب س

قضية ص. ع

علينا ان تقسم مثلثا الى ثلاثة اقسام متساوية بخطوط من نقطة مفروضة داخلة

اقسم ب س الى ثلاثة اقسام متساوية في دوى وارسم د ن ي ن. ارسم ايضا



س ع ي د ف ب

ا ف حتى يوازي د ن وارسم ا غ حتى

يوازي ي ن. فاذا رسمت ن ف ن غ

ن ا يتقسم المثلث حسب المفروض

ارسم ا د ا ي. فلكون ا ف و ن د

متوازيين فالمثلث ا ف ن = ا ف د فاذا

اضيف اليهما المثلث ا ب ف يحدث

الشكل ا ب ف ن ذو الاربعة اضلاع الذي يعدل المثلث ا ب د ولكن ب د

انما هو ثلث ب س فالمثلث ا ب د هو ثلث ا ب س فالشكل ا ب ف ن هو ثلث

المثلث ا ب س. ولان ا غ يوازي ن ي فالمثلث ا غ ن = ا غ ي. اضف اليهما

ا س غ فالشكل ا س غ ن يعدل المثلث ا س ي الذي هو ثلث ا ب س فالشكل

ا س غ ن ثلث ا ب س فكل واحد من الاشكال الثلاثة ا ب ف ن ا س غ ن

ن ف غ يعدل ثلث ا ب س

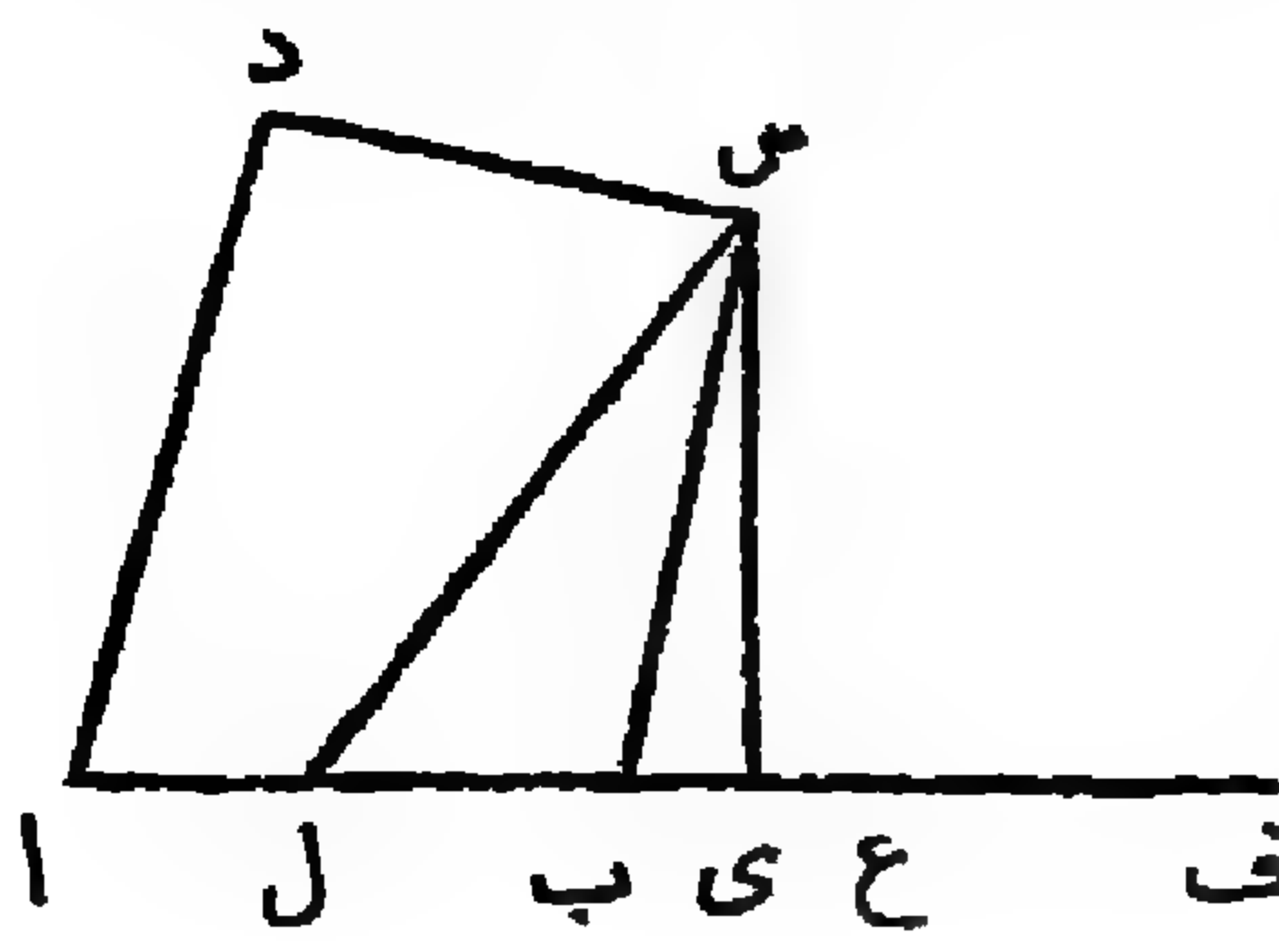
قضية ق. ع

علينا ان تقسم شكلا ذا اربعة اضلاع الى قسمين بخط من احده

زواياه حتى تكون نسبة قسم الى اخر كنسبة خط م الى خط ن

ارسم س ي عمودا على ا ب وارسم شكلا ذا زوايا فائمة حتى يعدل الشكل





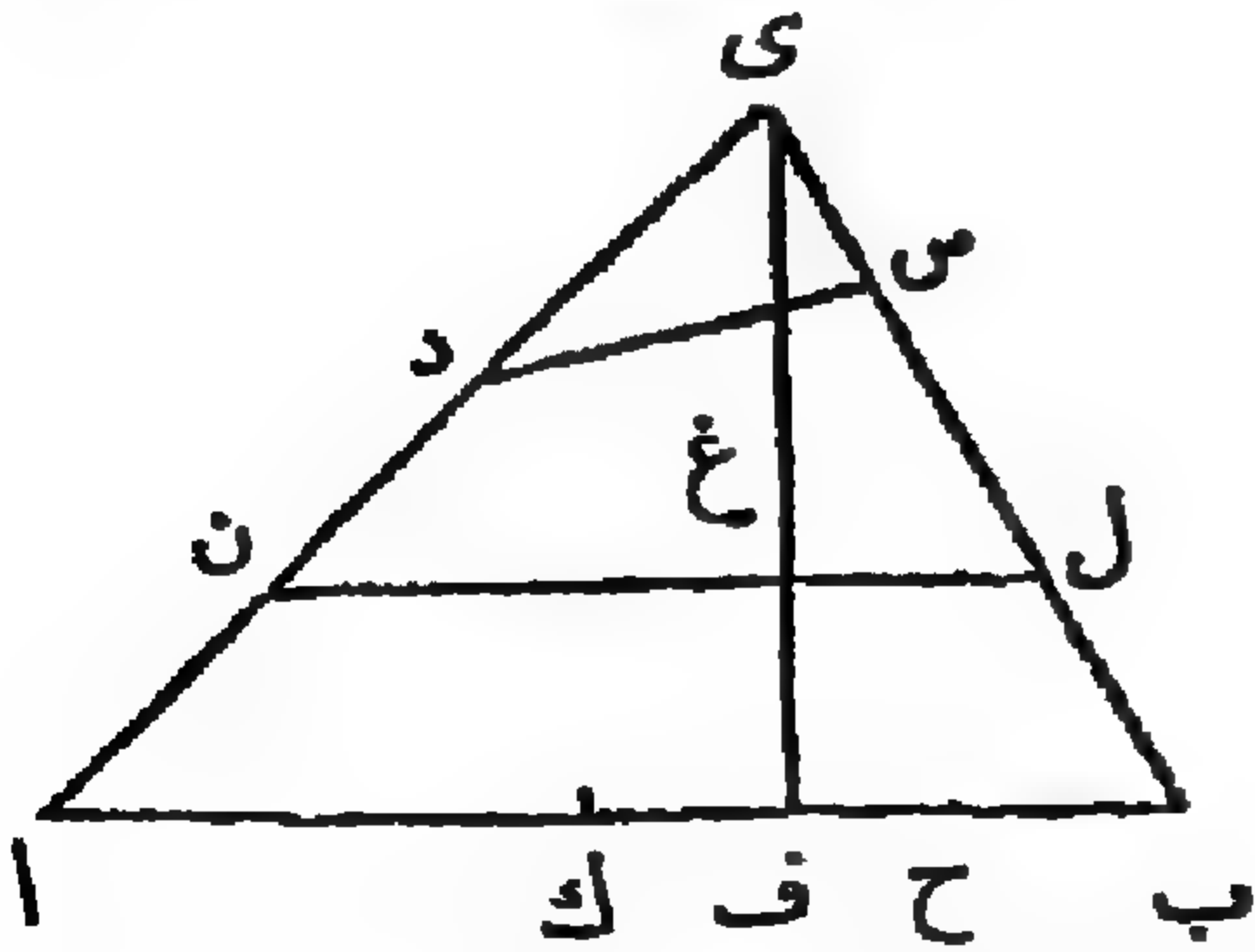
المفروض وليكن س ي ضلعاً من اضلاع  
وي ف ضلعاً اخر من اضلاع واقسم  
ي ف في غ حتى تكون نسبة م : ن :: غ : ف  
: ي غ . اجعل ب ل يعدل مضاعف ي غ  
وارسم ل س . فقد انقسم الشكل حسب  
المفروض

لان المثلث س ب ل يعدل س ي : ي غ . فنسبة القائم الزوايا س ي : ي غ ف  
: س ب ل :: غ : ف : ي غ . ولكن س ي : ي غ ف = الشكل د ل ونسبة غ ف :  
غ ي : م : ن فاذا د ل : س ل ب : م : ن

### قضية ر ع

علينا ان تقسم شكلاً ذا اربعة اضلاع الى قسمين بخط يوازي احد  
اضلاعه حتى تكون نسبة قسم الى اخر كنسبة خط م الى خط ن

ليكن ا ب س د الشكل . اخرج ا د و ب س حتى يلتقيا في ي وارسم ي ف  
عموداً على ا ب ونصقه في غ وعلى غ ف ارسم شكلاً قائم الزوايا حتى يعدل المثلث  
ي د س وليكن ح ب ضلعاً اخر من هذا



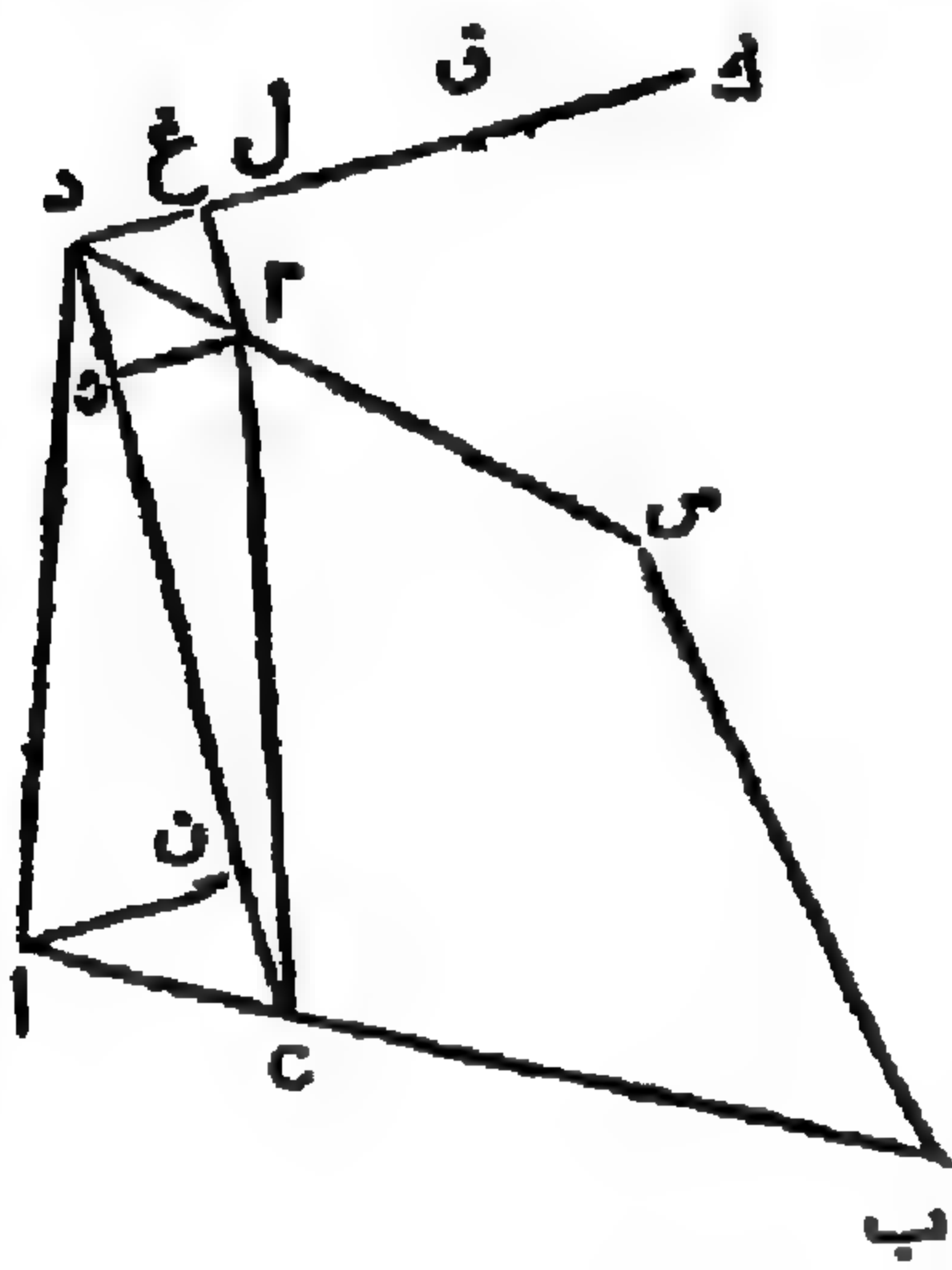
الشكل . اقسم ا ح في ك حتى تكون  
نسبة ا ك : ك ح :: م : ن واجعل ي ا :  
ي ن : : ا ب : ك ب . ارسم ن ل حتى  
يوازي ا ب فينقسم الشكل حسب

المفروض . لان المثلثين ي ا ب ي ن ل متساويان تكون نسبة ي ا ب : ي ن ل ::  
ي ا : ي ن وبالمفروض ي ا : ي ن : : ا ب : ك ب فتكون نسبة ي ا ب :  
ي ن ل :: ا ب : ك ب :: ا ب : ي غ ف : ك ب : ي غ ف . وبالشكل ي ا ب =  
ا ب : ي غ ف فاذا ي ن ل = ك ب : ي غ ف واك : ي غ ف = ا ل . ولكن ا ح :  
غ ف = ا س فاذا ا ك ح : ي غ ف = ن س واك : ي غ ف : ك ح : ي غ ف : : ا ك : ك ح

واك:ك:ح:م:ن فاذا ال:ن:س:م:ن

قضية ش.ع

علينا ان تقسم شكلاً ذا اربعة اضلاع الى قسمين بخط من نقطة في احد اضلاعه حتى تكون نسبة قسم الى اخر كنسبة خط م الى خط ن ارسم ه د واسد عليه شكلاً قائم الزوايا يعدل الشكل المفروض وليكن دك



ضلعاً الاخر. اقسـم دك في ل حتى تكون نسبة دل:ل:ك::م:ن. واجعل دق يعدل ٢ دل. واجعل ق غ يعدل العمود ان وارسم غ ٢ حتى يوازي د ه وارسم ٢ ه فينقسم الشكل حسب المفروض

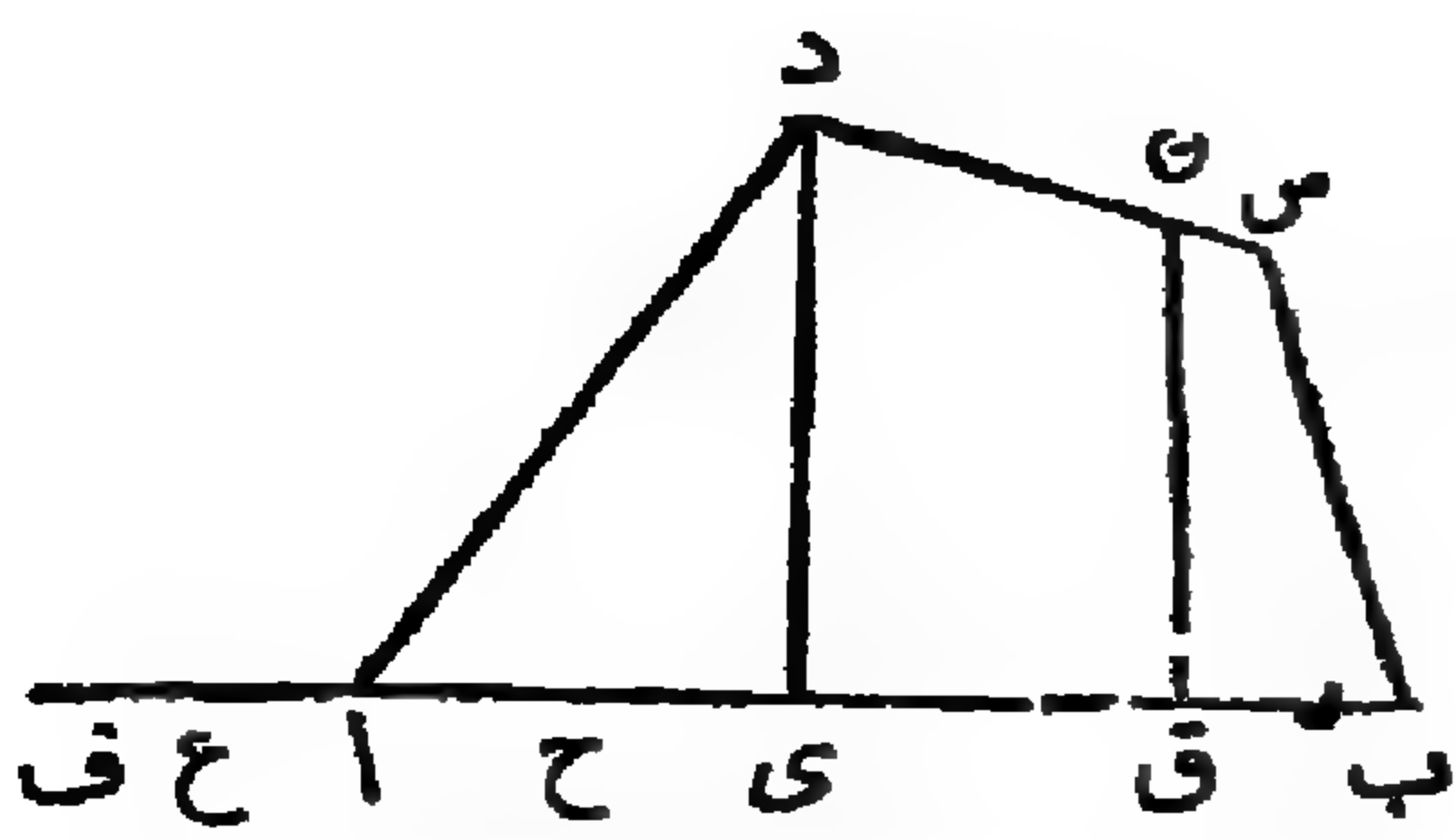
ارسم العمود ٢ ه. فبالشكل ٥ د × دك = اس و ٥ د × دق = ٥ د × ان + ٥ د × ٢ اي ٥ د × دق يعدل مضاعف يجمع

المثلثين ٥ د ٢ ه. فلان دل نصف دق فالقائم الزوايا ٥ د × دل = ٢ ه د فاذا ٥ د × دل = ٥ د × ب س ٢ ه. ولكن ٥ د × دل: ٥ د × ل:ك:: دل:ل:ك:: م:ن فاذا ٢ ه د: ٥ د × ب س ٢ ه: م:ن

قضية ت.ع

علينا ان تقسم شكلاً ذا اربعة اضلاع بخط عمودي على احد اضلاعه حتى تكون نسبة قسم الى اخر كنسبة خط م الى خط ن ليكن ا ب س د الشكل المفروض المطلوب انقسامه على نسبة م:ن بخط





عمودي على الضلع اب  
ارسم المخط دي عموداً على اب وان  
عليه شكلاً قائم الزوايا دي  $\times$  ي ف  
حتى يعدل الشكل اب س د واقسم  
ف ي في غ حتى تكون نسبة ف غ :

غ ي :: م : ت . نصف ا ي في ح واقسم الشكل ذا الاربعة الاضلاع ي س الى  
قسمين بالمخط ن ق الذي يوازي دي حتى تكون نسبة احدها الى الاخر كنسبة  
ف غ : غ ح . فالمخط ن ق يقسم الشكل اس حسب المفروض

لان دي  $\times$  ي ف = اس ودي  $\times$  ي ح = دا ي فاذا دي  $\times$  ح ف =  
ي س فالشكل ي س قد انقسم على نسبة اتسار ف ح قاعدة القائم الزوايا الذي  
يعدله فاذا ق س = دي  $\times$  ف غ وي ن = دي  $\times$  غ ح وان = دي  $\times$  غ ي  
فنسبة ق س : ان :: ف غ : غ ي :: م : ت

# اصول الهندسة

مضافات

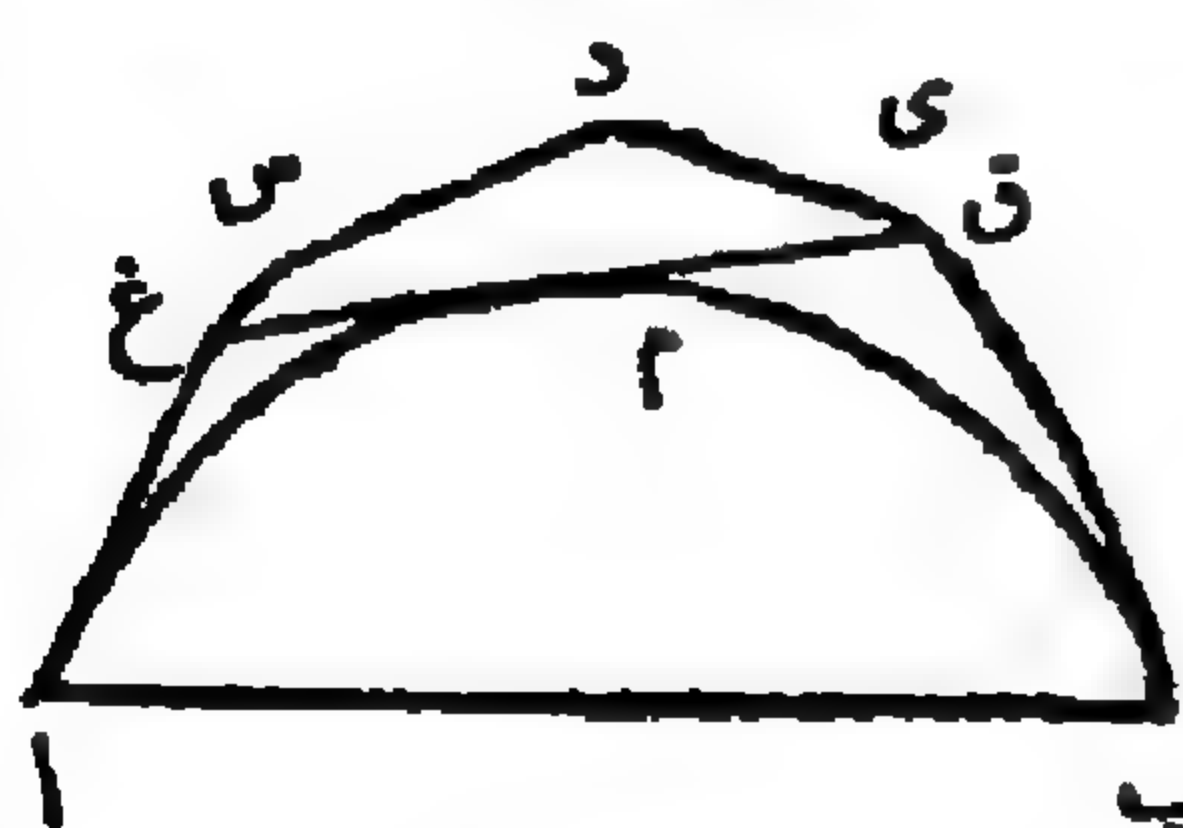
## الكتاب الاول

في تزيين الدائرة

سابقة

كل خطٍ منحنياً كان او مركباً من خطوطٍ مستقيمة محيطٍ بخطٍ  
محدّبٍ هو اطول من الخط المحاط به

ليكن ا م ب الخط المحاط به فهو اقصر من الخط ا ع د ب المحيط به  
فان لم يكن ا م ب اقصر من كل خطٍ محيط به فبالضرورة يوجد بين الخطوط



المحيطة خطٍ اقصر من البقية واقصر من ا م ب  
او بماثله. ليكن ا س د ي ب هذا الخط.

ارسم بين الخط المحيط والمحاط به خطاً اخر  
مستقيماً لا يلاقى ا م ب او بمثله فقط مثل ب

الخط غ ق. فالخط غ ق انما هو اقصر من الخط ع س د ي ق. فاذا وضع ع ق  
عوض س د ي ق يكون ا غ ق ب اقصر من ا غ د ق ب وقد فرض ان هذا الاخير  
هو اقصر جميع الخطوط المحيطة فذاك محال فكل خط محيط بالخط ا م ب هو  
اطول منه

فرغ اول. محيط شكل كثير الاضلاع في دائرة هو اقصر من محيط الدائرة



فرع ثانٍ . اذا رُسم من نقطة مفروضة خطان مستقيمان بمسّان دائرة فحينئذ هما  
هو اطول من القوس المقطوع بهما فمحيط شكل كثير الاضلاع يحيط بدائرة هو  
اطول من محيط الدائرة

### القضية الاولى . ن

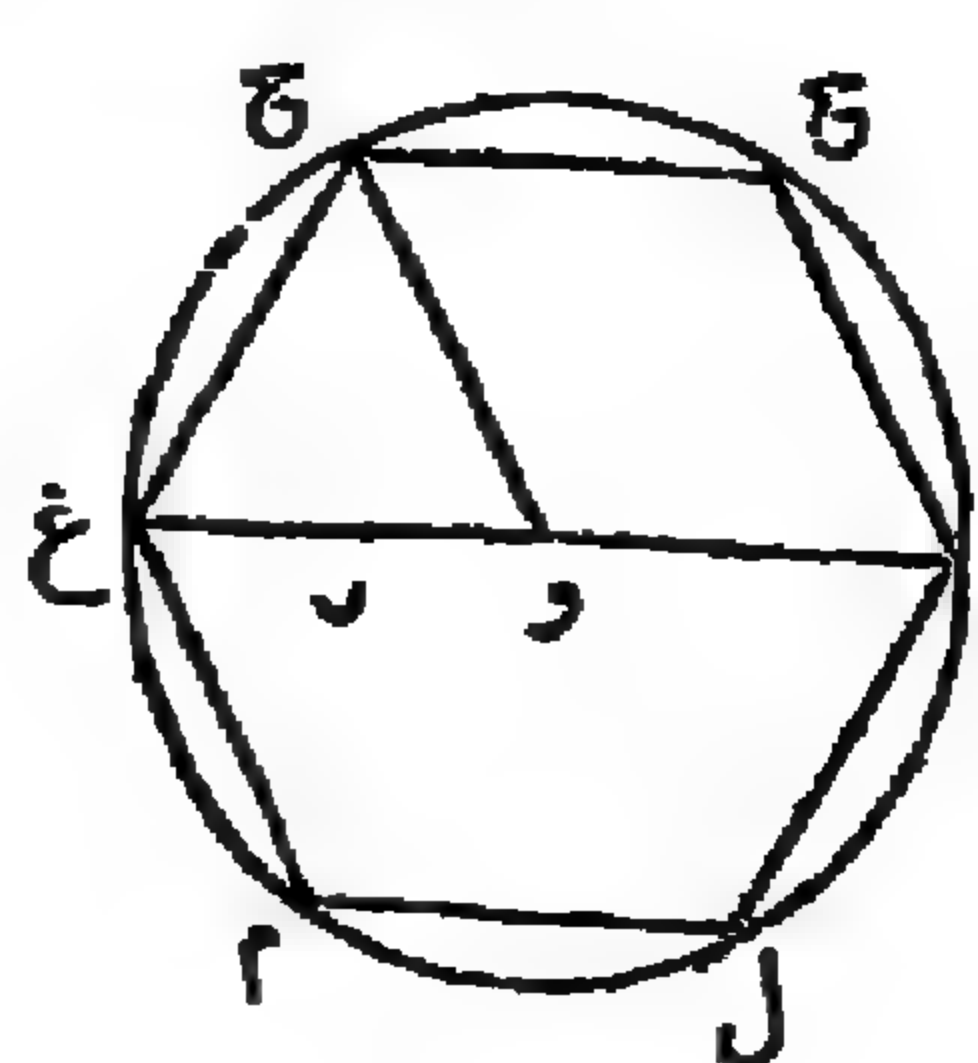
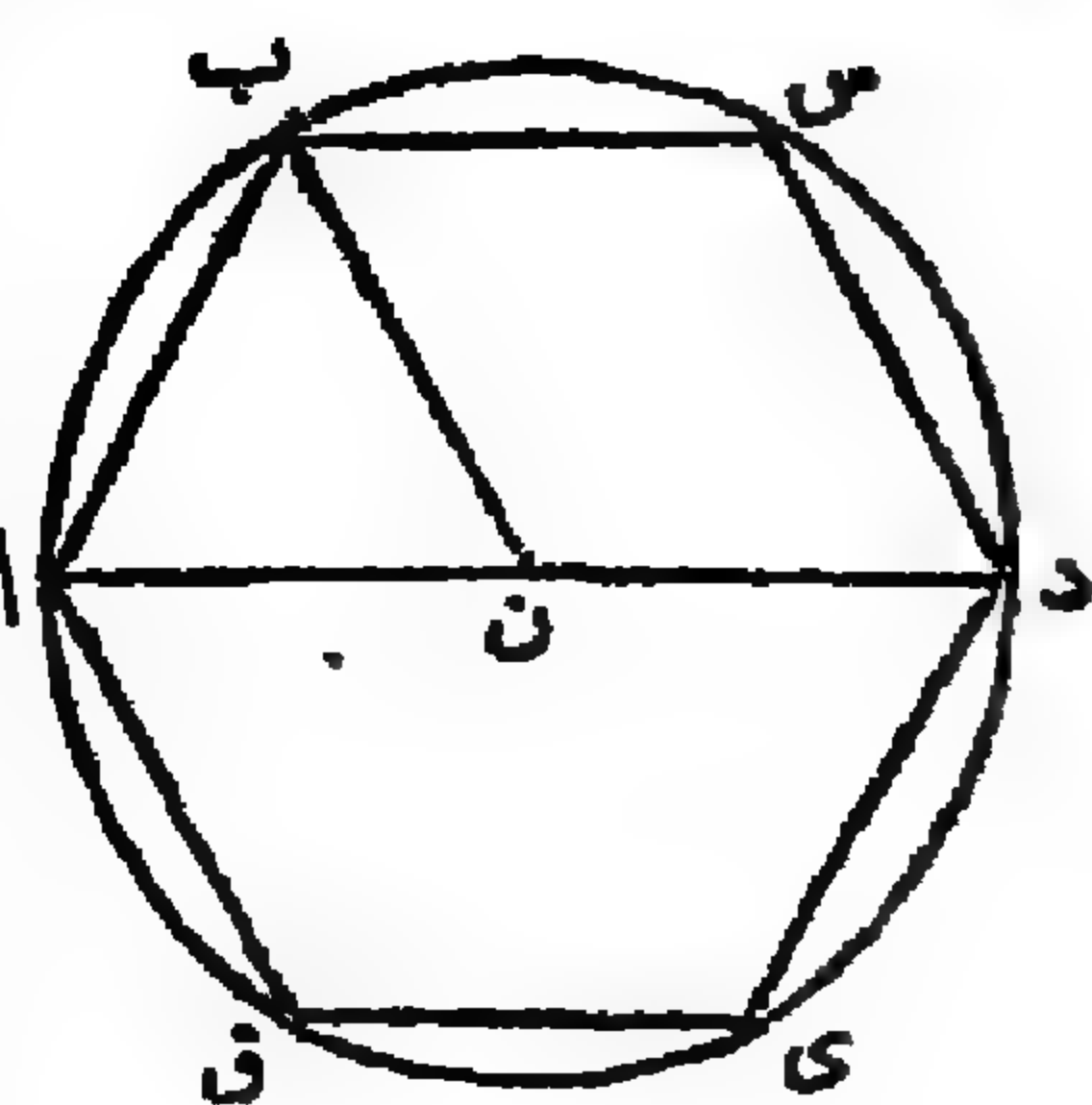
اذا فرض مقداران غير متساويين وطُرح من اكبرها نصفه ومن الباقي  
نصفه الى اخره يبقى اخيراً مقداراً اصغر من اصغر المقدارين المفروضين  
ليكن ا ب اكبر مقدارين وس اصغرهما . فاذا طُرح من ا ب نصفه ومن الباقي  
نصفه الى اخره يبقى اخيراً مقداراً اصغر من س

لانه قد يمكن ان يتكرر س حتى يصير اكبر من ا ب .  
فليكن دى مضروباً للمقدار س اكبر من ا ب وليكن فيه  
الاقسام د ف ف غ غ ي وكل قسم فليعدل س . اطرح  
من ا ب نصفه ب ح ومن ا ح اطرح نصفه ح ك وكرر العمل  
حتى ان اقسام ا ب تماثل اقسام دى عدداً اي ا ك ك ح  
ح ب . فليكون دى اعظم من ا ب والنسبة س غ المطروح من  
دى ليس هو نصف دى ولكن ح ب النسبة المطروح من  
ا ب هو نصفه فالباقى غ د هو اكبر من الباقي ا ح . وليكون  
غ د اكبر من ح ا والنسبة غ ف ليس اكثر من نصف د غ والنسبة ح ك هو نصف  
ا ك فالباقى ف د اعظم من الباقي ا ك ولكن ف د يعدل س فاذا س اكبر من  
ا ك او ا ك انما هو اصغر من س

### القضية الثانية . ن

اشكال كثيرة الاضلاع المتساوية ومتماثلة في عدد اضلاعها ومرسومة  
في دوائر هي متشابهة ونسبة بعضها الى بعض كنسبة مربعات اقطار  
الدوائر التي رُسمت فيها

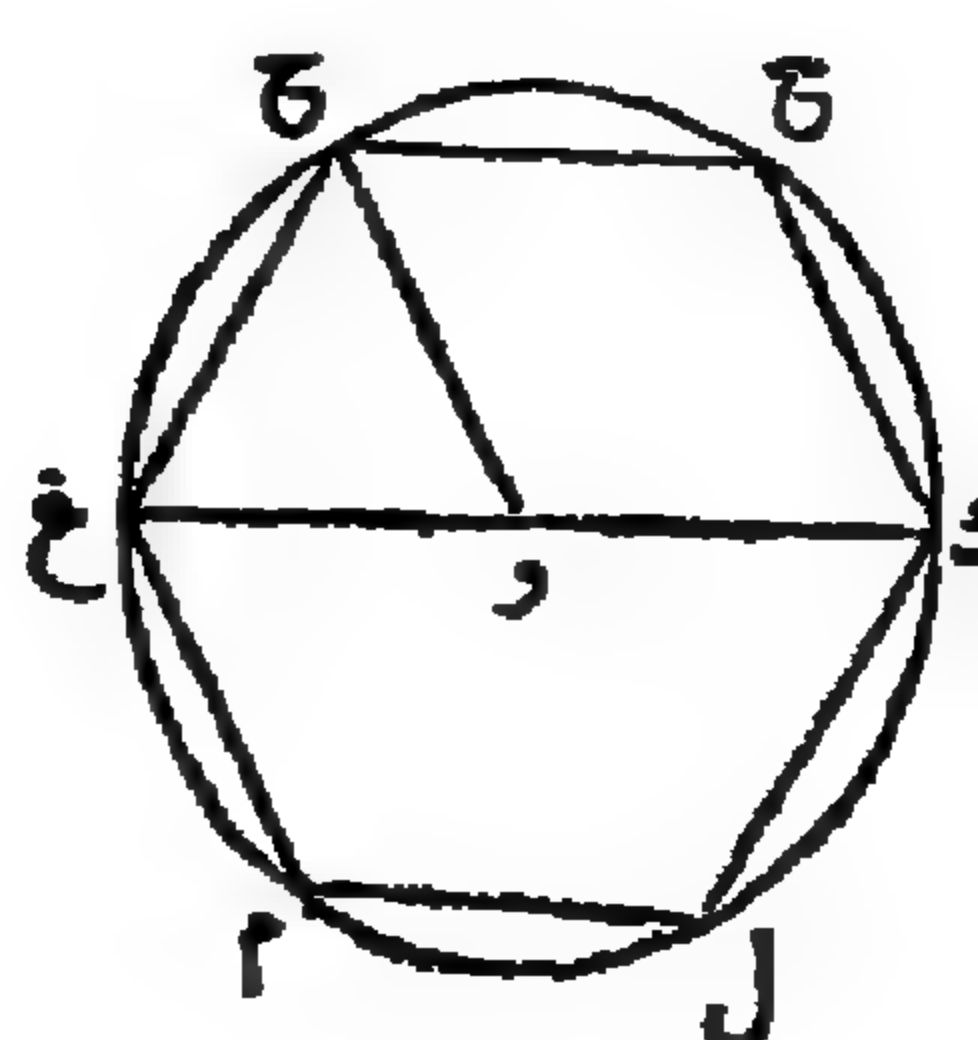
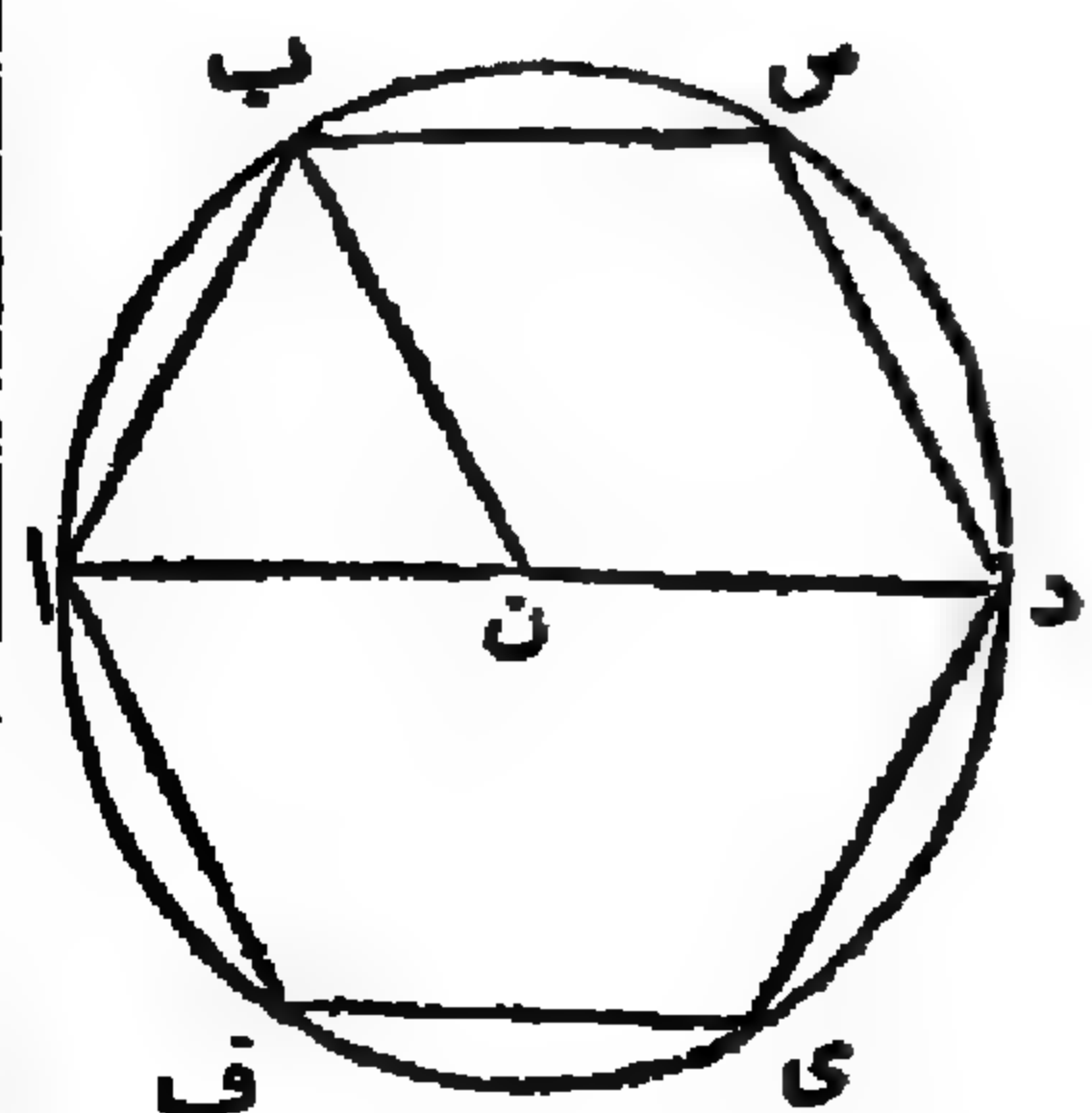
ليكن ا ب س د ي ق و غ ح ج ك ل م شكليْن اضلاعها كثيرة متساوية



وليكونا متماثلين  
في عدد اضلاعها  
ومرسومين في  
دائرتين ا د ب  
غ ح ك فهما  
متشابهان ونسبة

ا ب س د ي ق الى غ ح ج ك ل م كنسبة مربع قطر الدائرة ا ب د الى مربع قطر  
الدائرة غ ح ك

استعلم ن وو مركزي الدائرتين وارسم ا ن و ع و واخرجها حتى يلاقيا المحيطين  
في د وك. ارسم ب ن و ح و. فليكن الخطوط المستقيمة ا ب ب س س د د ي  
ي ق ق ا متساوية فالاقواس التي تقابلها ايضا متساوية (ق ٢٨ ك ٢) ولذلك  
الاقواس غ ح ح ج ج ك ك ل ل م م غ هي متساوية ايضا وهي تماثل اقواس  
الدائرة الاخرى عدداً فاي جزء كان القوس ا ب من المحيط ا ب د كان القوس  
غ ح ذات ذلك الجزء من المحيط غ ح ك. والزاوية ا ن ب ذات الجزء من اربع  
زوايا قائمة الذي كان القوس ا ب من المحيط ا ب د (ق ٢٣ ك ٦) والزاوية غ و ح  
هي من اربع زوايا قائمة ما كان القوس غ ح من المحيط غ ح ك (ق ٢٣ ك ٦)  
فالزاويتان ا ن ب غ و ح هما جزءان متساويان كل واحد من اربع زوايا قائمة  
فهما متساويان. ولثلثان المتساويين ا ن ب غ و ح هما متساويان الزوايا ايضا  
والزاوية ا ب ن تعدل الزاوية غ ح و. وعلى هذا الاسلوب اذا رسم ن س و ج



يبرهن ان الزاوية  
ن ب س تعدل  
و ح ج. فالكل  
ا ب س يعدل  
الكل غ ح ج.  
وهكذا يبرهن في

بقية زوايا الشكليْن فهما متساويان الزوايا. وقد فرض انها متساويان الاضلاع. فالاضلاع



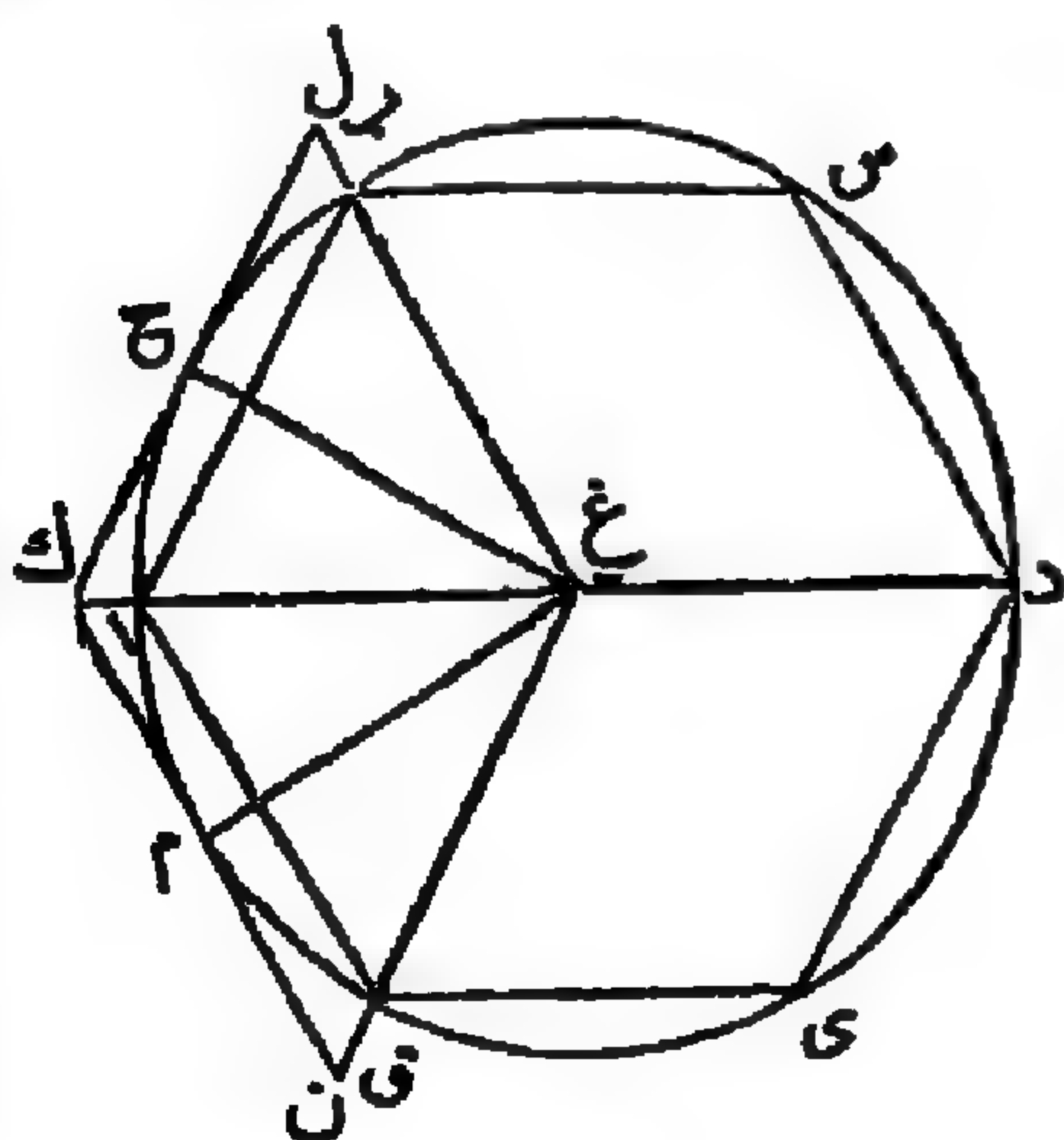
التي تلي الزوايا المتساوية هي متناسبة. فالشكلان متشابهان (حد ١ ك ٦) والاشكال  
الكثيرة الاضلاع المتشابهة هي كمربعات اضلاعها المتشابهة (ق ٢٠ ك ٦) فالشكل  
ا ب س د ي ف : غ ح ج ك ل م :: مربع ا ب : مربع غ ح. ولكون المثلثين ا ب ن  
غ ح ومتساويي الزوايا فمربع ا ب : مربع غ ح :: مربع ا ن : مربع غ و (ق ٤ ك ٦)  
او :: ا ن : ا ع و (ق ١٥ ك ٥) اي :: ا د : غ ك (فرع ٢ ق ٨ ك ٢) فالشكل  
ا ب س د ي ف : غ ح ج ك ل م :: ا د : غ ك. وقد تبهرن انها متشابهان  
فرع. كل شكل كثير الاضلاع المتساوية في دائرة هو متساوي الزوايا. لان  
المثلثات المتساوية الساقين التي تلتقي زواياها في المركز هي متساوية ومتشابهة والزوايا  
عند قواعدها متساوية فزوايا الشكل متساوية

### القضية الثالثة. ع

مفروض ضلع شكل كثير الاضلاع المتساوية في دائرة. علينا ان نجد  
ضلع شكل مثله محيط بالدائرة

ليكن ا ب س د ي ق شكلا كثيرا الاضلاع المتساوية في دائرة. علينا ان نجد

ضلع شكل مثله محيط بالدائرة



استعلم مركز الدائرة غ وارسم ع ا غ ب  
ونصف القوس ا ب في ح ومن ح ارسم  
المماس ل ح ك الذي يمس الدائرة في ج  
وبلاني غ ا و ع ب بعد اخراجها في ك ول  
فالخط ك ل هو ضلع الشكل المطلوب.  
اجعل الزاوية ك غ ن تعدل ك غ ل.

ارسم غ ن حتى يعدل غ ل وارسم ك ن وارسم ع م عمودا على ك ن وارسم ح غ  
لكون القوس ا ب قد تنصف في ح فالزاوية ا غ ح تعدل الزاوية ب غ ح  
(ق ٢٧ ك ٢) ولكون ك ل يمس الدائرة في ح فالزاويتان ك ح غ ل ح غ قاعتان  
(ق ١٨ ك ٢) فزاويتان من المثلث ك ح غ تعدلان اثنتين من المثلث ل ح غ  
والضلع غ ح مشترك بينهما فتساويان (ق ٢٦ ك ١) والضلع غ ل يعدل الضلع

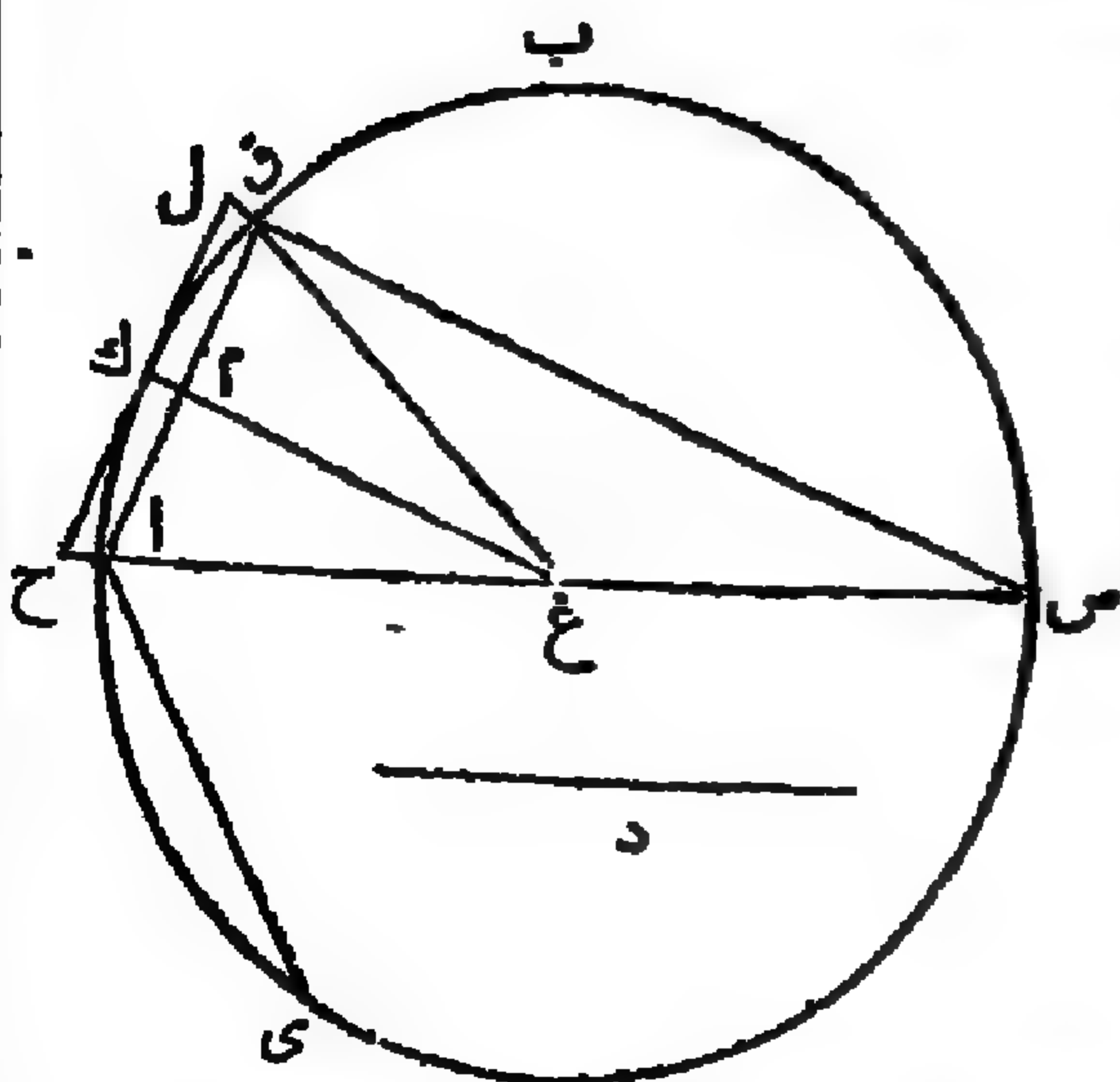
غ ك. ثم في المثلثين ك غ ل ك غ ن الضلع غ ل = غ ن و غ ك مشترك بينهما  
والزاوية ل غ ك تعدل ك غ ن فالقاعدة ك ل = ك ن (ق ٤ ك ١) والمثلث ك غ ن  
متساوي الساقين فالزاوية غ ك ن = غ ن ك والزاويتان غ م ك غ م ن قائمتان  
فالمثلثان غ م ك غ م ن متساويان (ق ٢٦ ك ١) والضلع ك م = م ن فقد تنصف  
ك ن في م و ك ن = ك ل فاذا ك م = ك ح والضلع غ ك مشترك بين المثلثين غ ك م  
غ ك ح والزاوية غ ك ح = غ ك م فالضلع غ م = غ ح (ق ٤ ك ١) فالنقطة م هي  
في محيط الدائرة ولكون ك م غ قائمة فالخط ك م مماس الدائرة. وهكذا اذا رُسِمت  
خطوط مستقيمة من المركز الى بقية زوايا الشكل في الدائرة يرسم شكل محيط بالدائرة  
اضلاعه تعدل ك ل وعدد الاضلاع يماثل اضلاع الشكل في الدائرة  
فرع اول. اذا جُعل غ مركزاً و ع ل او غ ك او ع ن نصف قطر ورُسِمت  
دائرة فالشكل يقع في تلك الدائرة وبشبه ا ب س دى ق

فرع ثان. نسبة ا ب : ك ل :: العمود من غ على ا ب : العمود من غ على ك ل  
اي : نصف قطر الدائرة فمحيط الشكل في الدائرة : محيط الشكل المحيط بالدائرة ::  
العمود من المركز على ضلع من اضلاع الشكل في الدائرة : نصف قطر الدائرة

### القضية الرابعة. ن

اذا فُرِضَتْ دائرة فقد يمكن ان يوجد شكلان متشابهان اضلاعهما  
كثيرة احدهما في الدائرة والاخر محيطٌ بها وفضلتهما اقل من مساحة

### مفروضة



ليكن ا ب س الدائرة  
المفروضة ومربع د مساحة مفروضة  
فقد يمكن ان يرسم شكل كثير  
الاضلاع في ا ب س واخر يشبهه  
محيطاً بها وتكون فضلته الشكليْن  
اقل من مربع د

ارسم في الدائرة ا ب س  
الخط المستقيم اى حتى يعدل د.

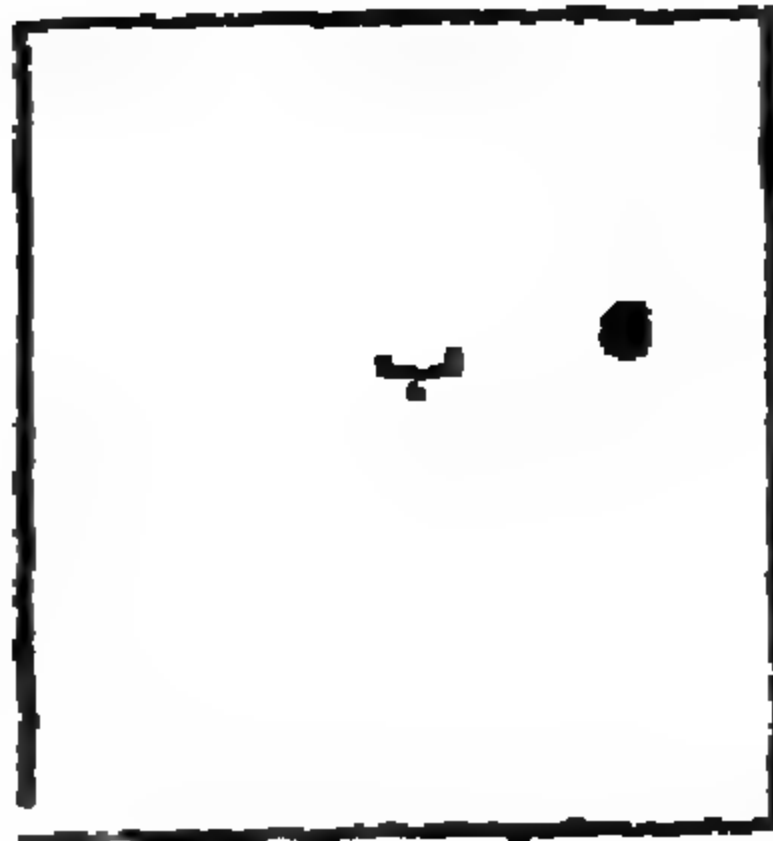
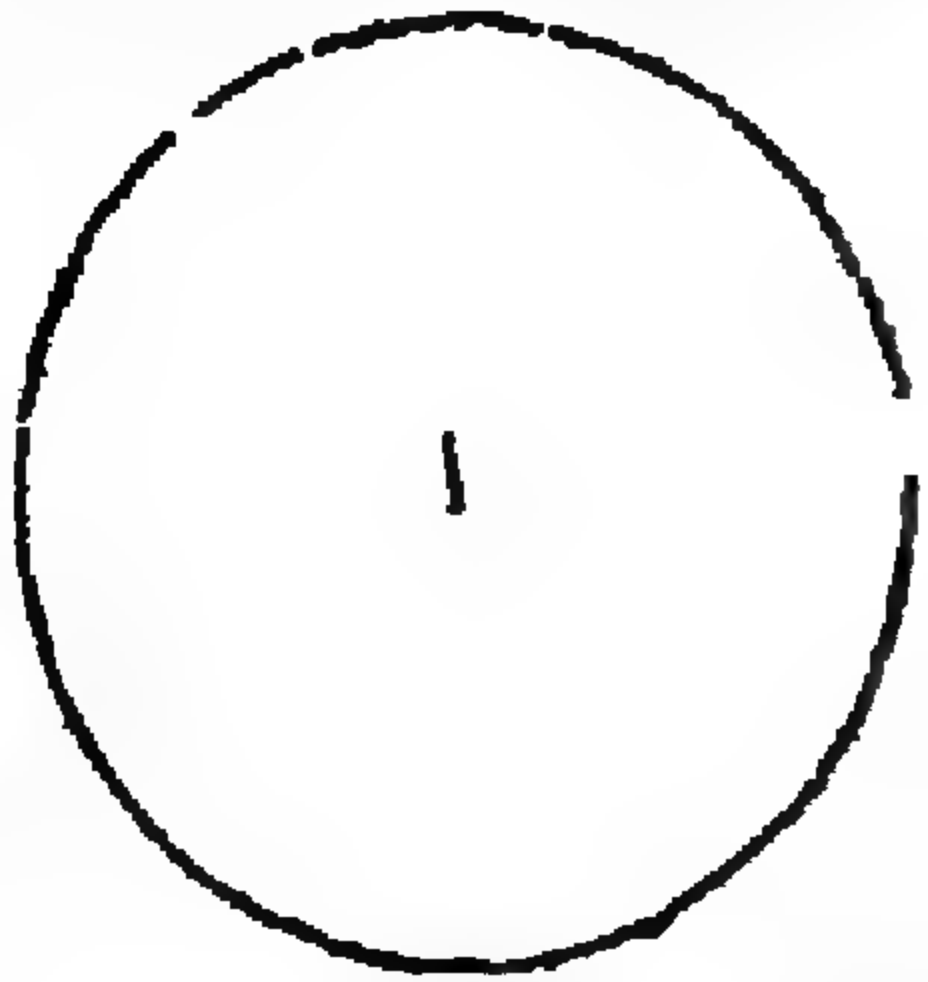


وليكن  $ا ب ر ع$  محيط الدائرة. من  $ا ب$  اطرح نصفه ومن الباقي نصفه وهكذا حتى يبقى  $ا ق$  اقل من القوس  $ا ي$  (ق ١ ك ١ مضافات) استعلم المركز  $غ$  وارسم القطر  $ا س$  والخطين المستقيمين  $ا ق$   $ق غ$ . نصف القوس  $ا ق$  في  $ك$  وارسم  $ك غ$  وارسم  $ح ل$  حتى يمس الدائرة في  $ك$  ويلاقي  $غ ا$   $غ ق$  بعد اخراجها في  $ح$  ول وارسم  $س ق$  المثلثان  $ح غ ل$   $ا غ ق$  متساويا الساقين والزاوية  $ا غ ق$  مشتركة بينهما فهما متساويا الزوايا (ق ٦ ك ٦) والزاويتان  $ح ل غ$   $ا ق غ$  متساويتان. ولكن الزاوية  $غ ك ح = س ق$  لانها قائمتان. فالمثلثان  $ح غ ك$   $ا س ق$  متساويا الزوايا (فرع ٤ ق ٢٢ ك ١) وقد استعمل القوس  $ا ق$  بتتصيف القوس  $ا ب$  ثم بتتصيف النصف الى اخره فالقوس  $ا ق$  يتعدد مرارا معلومة في القوس  $ا ب$  نيتعددا ايضا في محيط الدائرة  $ا ب س$  مرارا معلومة فيكون الخط المستقيم  $ا ق$  ضلع شكل كثير الاضلاع المتساوية في الدائرة  $ا ب س$  ويكون  $ح ل$  ضلع شكل مثله محيط بالدائرة  $ا ب س$  (ق ٢ ك ١ مضافات). ليكن عن الشكل في الدائرة بحرف  $م$  مثل  $ن$  وعن الشكل المحيط بها بحرف  $م$  مثل  $ن$ . فلكون هذين الشكلين متشابهين تكون نسبة احدهما الى الآخر كمرعي الضلعين المتشابهين  $ح ل$   $م ن$  (فرع ٢ ق ٢٠ ك ٦) اي (لكون المثلثين  $ح ل غ$   $ا ق غ$  متشابهين) كنسبة مربع  $ح غ$  الى مربع  $ا غ$  الذي يعدل مربع  $غ ك$ . وقد تبهرن ان المثلثين  $ح غ ك$   $ا س ق$  متشابهان. فتكون نسبة  $ا س$  :  $س ق$  :: الشكل  $م$  : الشكل  $ن$ . وبالطرح مربع  $ا س$  : زيادته على مربع  $س ق$  اي مربع  $ا ق$  (ق ٤٧ ك ١) :: الشكل  $م$  : زيادته على الشكل  $ن$ . ولكن مربع  $ا س$  اي المربع المحيط بالدائرة  $ا ب س$  هو اعظم من شكل ذي ثمانية اضلاع متساويه محيط بالدائرة لانه محيط بذلك الشكل. والشكل ذو الثمانية اضلاع اعظم من شكل ذي ستة عشر ضلعا وهم جزا. فمربع  $ا س$  هو اعظم من الشكل المرسوم حول الدائرة بانقسام القوس  $ا ب$  حسبما تقدم فمربع اعظم من الشكل  $م$ . وقد تبهرن ان مربع  $ا س$  : مربع  $ا ق$  :: الشكل  $م$  : فضلة الشكلين. فلكون  $ا س$  اعظم من  $م$  يكون مربع  $ا ق$  اعظم من فضلة الشكلين (ق ١٤ ك ٥) فضلة الشكلين اذا هي اقل من مربع  $ا ق$  و  $ا ق$  اقصر من  $د$ . فضلة الشكلين اقل من مربع  $د$  اي من المساحة المفروضة

فرع اول. فضلة الشكلين اعظم من فضلة احدها والدائرة. فيمكن ان يرسم شكل في الدائرة او محيط بها تكون فضلة احدها والدائرة اقل من مساحة مفروضة

مها كانت تلك المساحة صغيرة

فرع ثانٍ. المساحة ب التي هي أكبر من كل شكل يُرسم في الدائرة ا واصغر من كل شكل يُرسم محيطاً بالدائرة



س

تعدل الدائرة ا ولا فتكون

أكبر منها او اصغر منها واولاً

لكن أكبر من ا بما يعدل

مساحة س. فالاشكل التي

تُرسم محيطة بالدائرة ا هي

بالمفروض أكبر من د. ولكن ب أكبر من ا بمساحة س فلا يرسم شكل محيط

بالدائرة الا ما كان أكبر منها بما يعدل مساحة س وذاك محال. وهكذا اذا كانت

ب اصغر من ا بمساحة س بيان انه لا يمكن ان يُرسم في الدائرة ا شكل الا ما كان

اصغر من ا بمساحة أكبر من س وذاك محال فلا يكون ا و ب غير متساويين ا ب

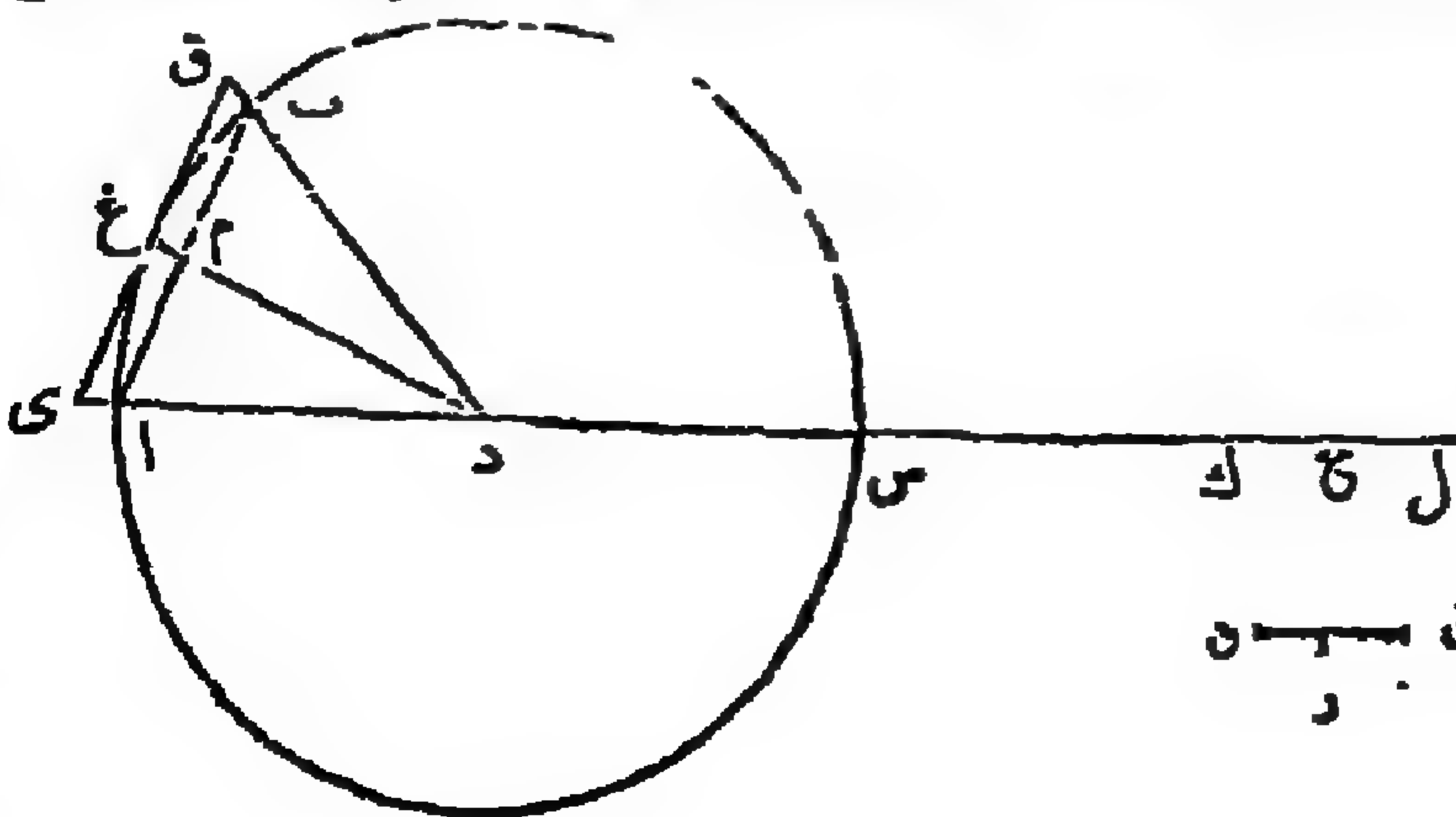
هما متساويان

### القضية الخامسة. ن

مساحة دائرة تعدل القائم الزوايا مسطح نصف قطرها في خط

مستقيم يعدل نصف محيطها

ليكن ا ب س دائرة مركزها د وقطرها ا س. فاذا أخرج ا س وأخذ ا ح



حتى يعدل

نصف محيط

الدائرة

فماحتها

تعدل القائم

الزوايا دا

اح

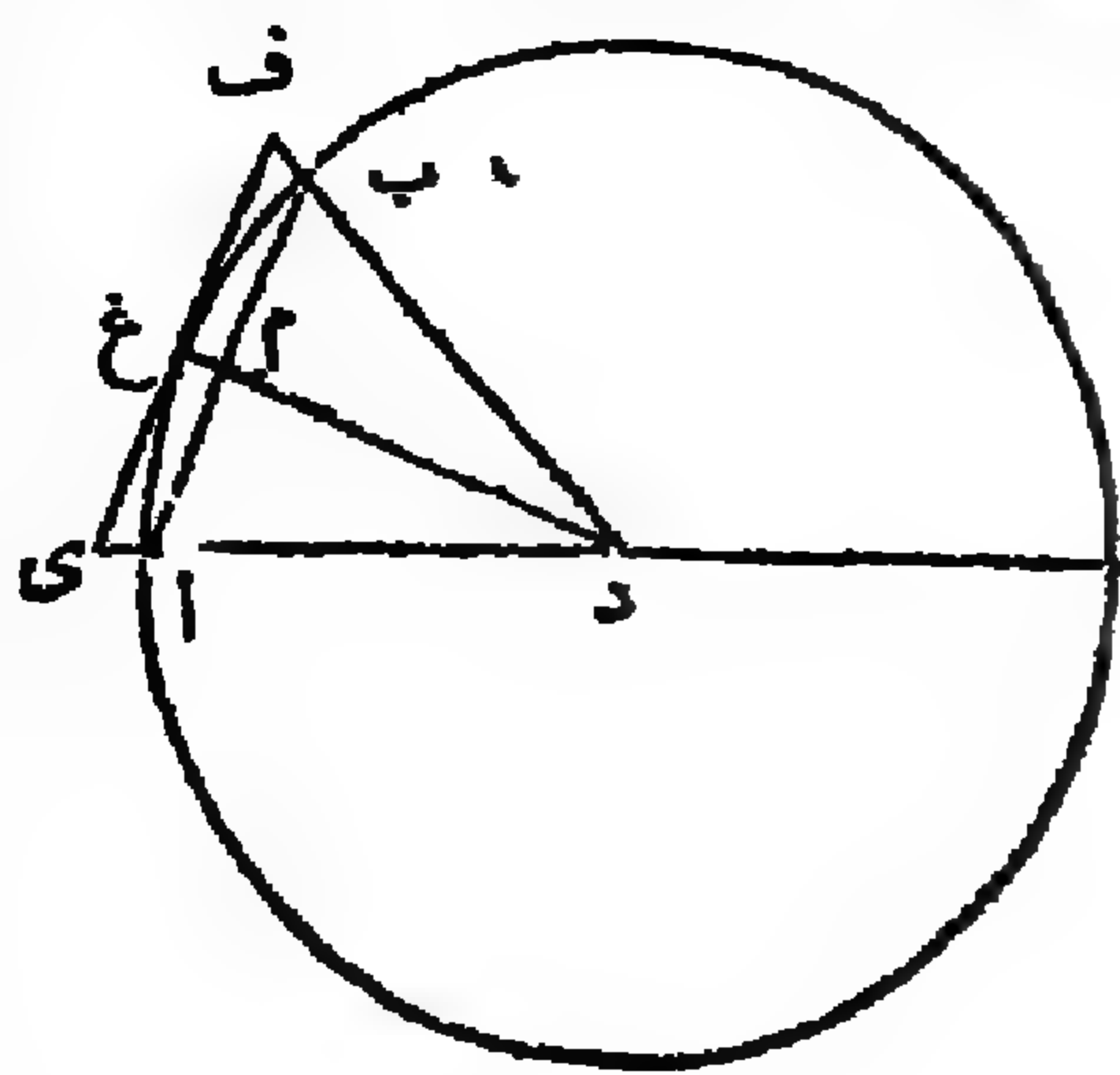
ليكن ا ب ضلع شكل كثير الاضلاع المتساوية في الدائرة ا ب س. نصف



القوس ا ب في غ ومن غ ا رسم المماس ي غ ف الذي يلاقي د ا و د ب بعد اخراجها  
 في ي و ف. فيكون ي ف ضلع شكل كثير الاضلاع المتساوية محيط بالدائرة ا ب س  
 (ق ٢ ك ١ مضافات). اقطع من ا س بعد اخراج ا ك حتى يعدل نصف محيط  
 الشكل الذي كان ا ب ضلعاً من اضلاعه واقطع ايضاً ا ل حتى يعدل نصف  
 محيط الشكل الذي كان ي ف ضلعاً من اضلاعه. فيكون ا ك اقصر من ا ح و ا ل  
 اطول من ا ح (سابقة المضافات) ثم في المثلث ي د ف قد رُسم د غ عموداً على  
 القاعدة ف المثلث ي د ف يعدل القائم الزوايا د غ في نصف ي ق (ق ١ ك ٤)  
 وهكذا في جميع المثلثات التي رؤوسها عند د والتي يتركب منها الشكل المحيط بالدائرة  
 فالشكل كله يعدل القائم الزوايا د غ في ا ل الذي فُرض انه نصف محيط الشكل  
 (ق ١ ك ٢) او يعدل د ا  $\times$  ا ل ولكن ا ل اطول من ا ح فالقائم الزوايا د ا  $\times$  ا ل  
 اكبر من د ا  $\times$  ا ح اي القائم الزوايا د ا  $\times$  ا ح اصغر من د ا  $\times$  ا ل اي اصغر من  
 كل شكل محيط بالدائرة ا ب س

واما المثلث ا د ب فانه يعدل القائم الزوايا د م في نصف ا ب فهو اصغر من  
 القائم الزوايا د غ او د ا في نصف ا ب. وهكذا في جميع المثلثات التي رؤوسها عند  
 د والتي يتركب منها الشكل في الدائرة ا ب س. فكل الشكل يعدل د ا  $\times$  ا ك  
 لان ا ك = نصف محيط الشكل في الدائرة. والقائم الزوايا د ا  $\times$  ا ك هو اصغر من  
 القائم الزوايا د ا  $\times$  ا ح فبالاخرى يكون الشكل الذي ا ب ضلعاً منه اصغر من د ا  
 $\times$  ا ح. اي د ا  $\times$  ا ح اكبر من كل شكل يمكن رسمه في الدائرة ا ب س. وقد  
 تبين ان د ا  $\times$  ا ح اصغر من كل شكل محيط بالدائرة ا ب س فالقائم الزوايا د ا  
 $\times$  ا ح يعدل الدائرة ا ب س (فرع ٢ ق ٤ ك ١ مضافات) و د ا هو نصف قطر  
 الدائرة ا ب س و ا ح نصف محيطها

فرع اول. لكون د ا : ا ح :: د ا : د ا  $\times$  ا ح (ق ١ ك ٦) وقد تبين ان د ا  $\times$   
 ا ح = مساحة الدائرة التي كان د ا نصف قطرها فنسبة نصف قطر دائرة : نصف  
 محيطها او القطر كله الى المحيط كله :: مربع نصف القطر : مساحة الدائرة



فرع ثانٍ  
يمكن ان  
يرسم شكل  
كثير  
الاضلاع  
المتساوية  
محيط بدائرة

حتى تكون فضلة محيطه ومحيط الدائرة اقل من خط مفروض. ليكن ن ق الخط المفروض. اقطع منه ن ر اقل من نصفه واقل من ا د. ويرسم شكل محيط بالدائرة ا ب س حتى تكون فضلة الشكل والدائرة اقل من مربع ن ر (فرع اول ق ك ا مضافات) وليكن ي ف ضلع هذا الشكل. فقد تبين ان الدائرة تعدل دا × ح والشكل المحيط يعدل دا × ا ل فضلة الشكل والدائرة تعدل دا × ح ل فاقائم الزوايا دا × ح ل اصغر من مربع ن ر. ولان دا اطول من ن ر يكون ح ل اقصر من ن ر ومضاعف ح ل اقصر من مضاعف ن ر وبالاخرى مضاعف ح ل اقصر من ن ق. ولكن ح ل هو فضلة نصف محيط الشكل الذي كان ي ف ضلعاً منه ونصف محيط الدائرة. فمضاعف ح ل هو فضلة كل محيط الشكل وكل محيط الدائرة (ق ه ك ه) فضلة محيط الشكل ومحيط الدائرة هي اقل من الخط المفروض ن ق

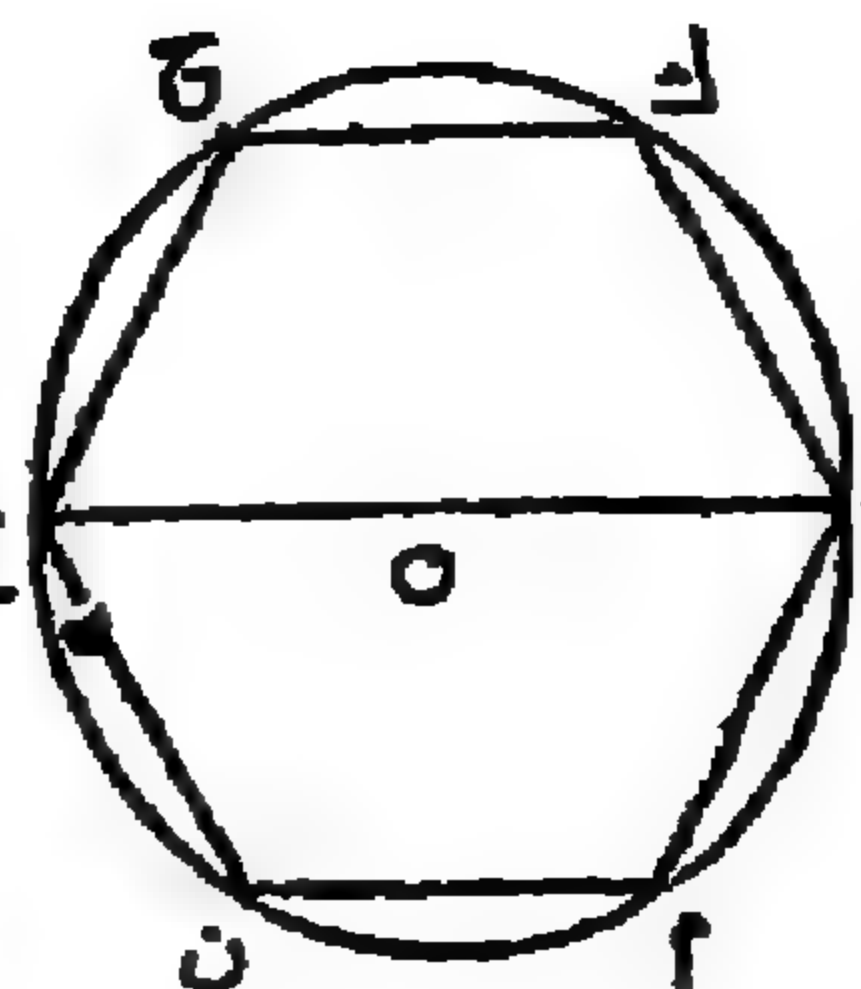
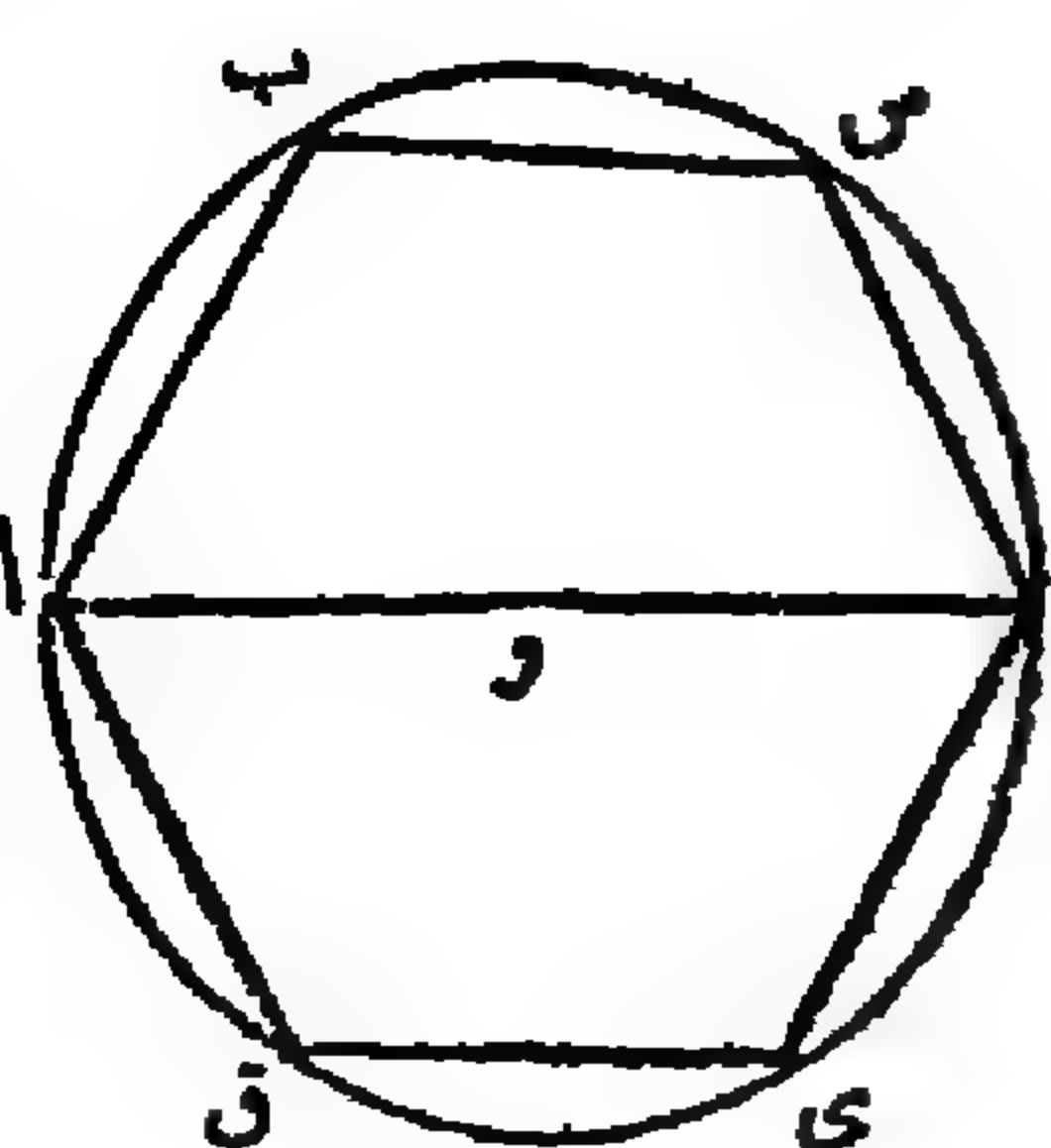
فرع ثالث. يمكن ان يرسم شكل كثير الاضلاع المتساوية في دائرة حتى تكون فضلة محيط الدائرة ومحيطه اقل من خط مفروض

### القضية السادسة. ن

نسبة مساحات الدوائر بعضها الى بعض هي كنسبة مربعات اقطارها بعضها الى بعض

ليكن ا ب د غ ح ل دائرتين. فمساحة الدائرة ا ب د الى مساحة الدائرة





غ ح ل ك مربع القطر

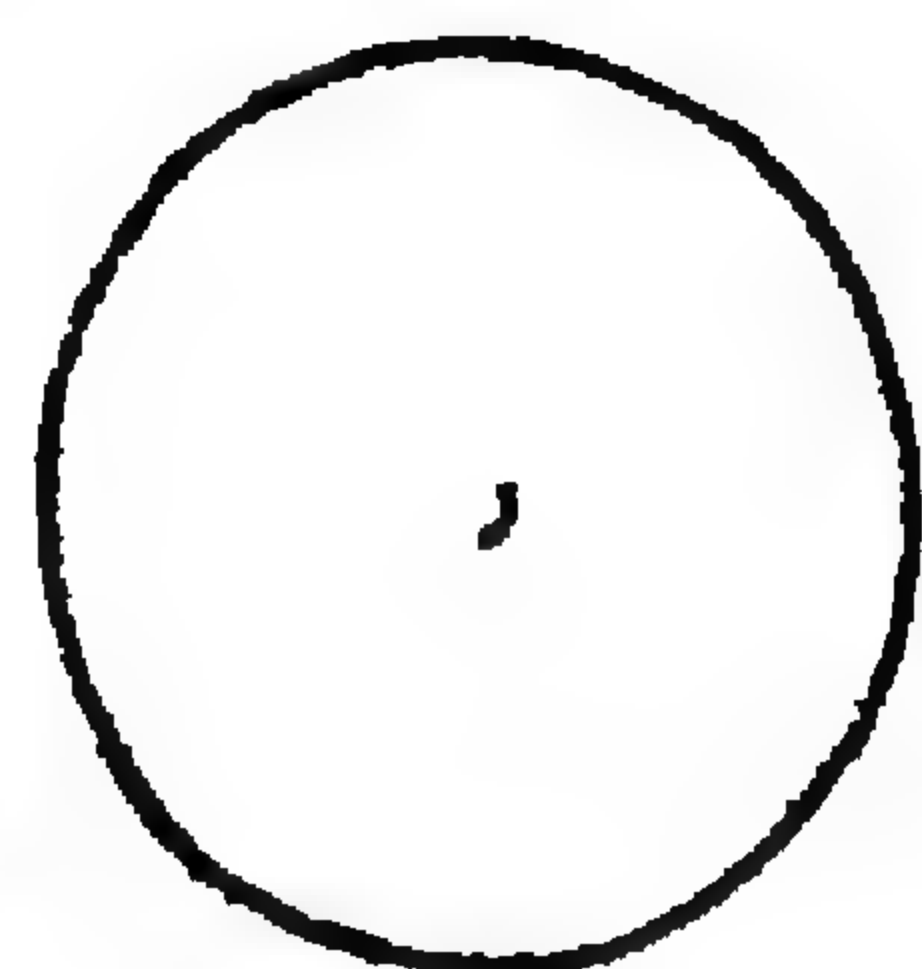
ا د الى مربع القطر

غ ح ل

ليكن

ا ب س د ي ق

و غ ح ك ل م ن



شكليين متشابهين لهما اضلاع كثيرة في الدائرتين وليكن

مساحة ما وليكن نسبة مربع ا د الى مربع ع ل كالدايرة

ا ب د الى ر. فليكون الشكلين ا ب س د ي ق

و غ ح ك ل م ن متشابهين فنسبة مساحة احدهما الى

مساحة الاخر كمربع قطر دائرة الواحد الى مربع قطر

دائرة الاخر (ق ٢ ك ١ مضافات) فنسبة ا د : غ ل :: الشكل ا ب س د ي ق

: الشكل غ ح ك ل م ن. ولكن ا د : غ ل :: الدائرة ا ب د : ر. فالشكل

ا ب س د ي ق : الشكل غ ح ك ل م ن :: ا ب د : ر. والدائرة ا ب د <

ا ب س د ي ق فتكون ر < غ ح ك ل م ن (ق ١٤ ك ٥) اي راكب من كل

شكل مرسوم في الدائرة غ ح ل

وهكذا يبرهن ان ر اصغر من كل شكل يرسم حول الدائرة غ ح ل فاذا ر =

الدائرة غ ح ل (فرع ٢ ق ٤ ك ١ مضافات) وقد فرض ان ا ب د : ر :: ا د :

غ ل فتكون ا ب د : غ ح ل :: ا د : غ ل

فرع اول. نسبة محيطات الدوائر بعضها الى بعض كنسبة اقطارها بعضها

الى بعض

لفرض ان المحيط المستقيم ك = نصف محيط الدائرة ا ب د والمحيط المستقيم

ي = نصف محيط الدائرة غ ح ل. فالتائم الزوايا ا و ب ك = ا ب د و غ ه ي =

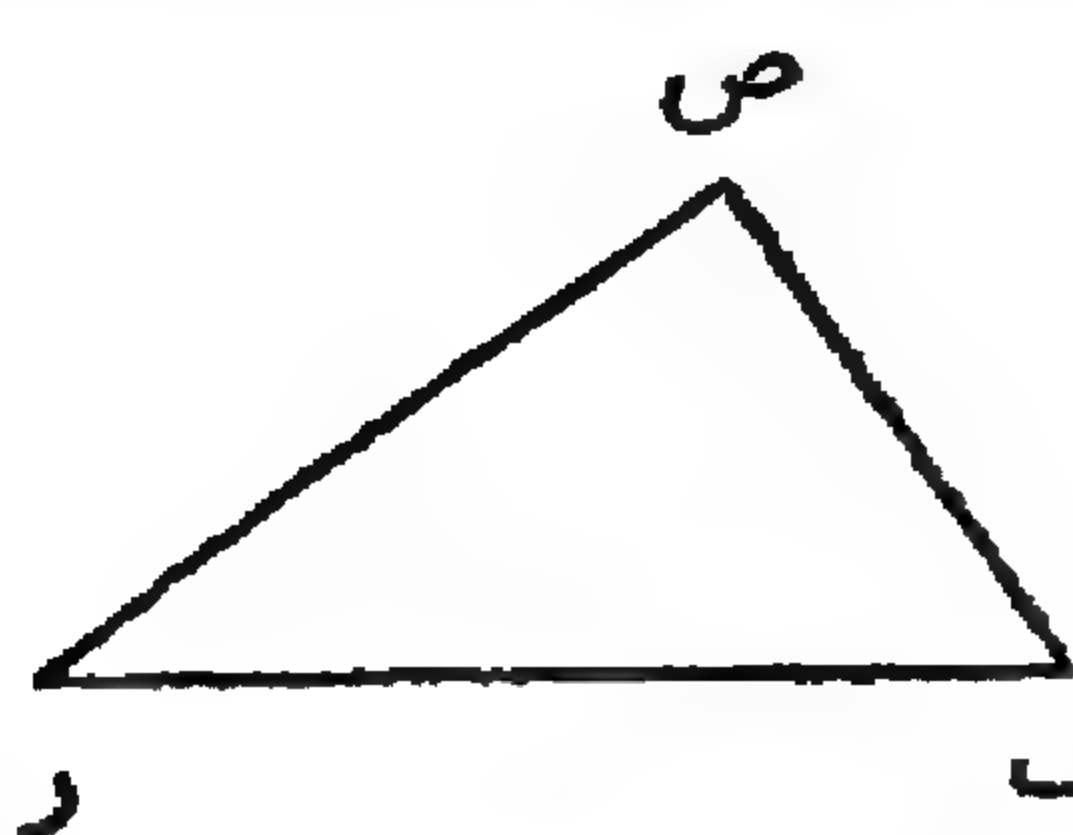
غ ح ل (ق ٥ ك ١ مضافات) فنسبة

ا و ب ك : غ ه ي :: ا د : غ ل ::

ا و : غ ه وبالمبادلة ا و ب ك : ا و : غ ه ي : غ ه. والاشكال القائمة الزوايا اذا

كانت على واحد تكون نسبة بعضها الى بعض كنسبة قواجمها بعضها الى بعضها  
(ق ١ ك ٦) فنسبة ك: ا و: ي: غه وبالمبادلة ك: ي: ا و: عه فاد انضاعف

كل واحد تكون نسبة المحيط ا ب د: المحيط ع ح ل: القطر ا د: القطر ع ل  
فرع ثان. الدائرة المرسومة على الضلع الذي يقابل القائمة في مثلث ذي قائمة



تعدل الدائرتين المرسومتين على الضلعين

الاخرين. لان نسبة الدائرة على ص ر.

الدائرة على ر ف: مربع ص ر: مربع ر ف.

والدائرة على ف ص: الدائرة على ر ف: مربع

ف ص: مربع ر ف. فالدائرتان على ص ر و ص ف: الدائرة على ف ر: مربع

ص ر و ص ف: مربع ر ف (ق ٢٤ ك ٥) ولكن مربعا ص ر ص ف يعدلان

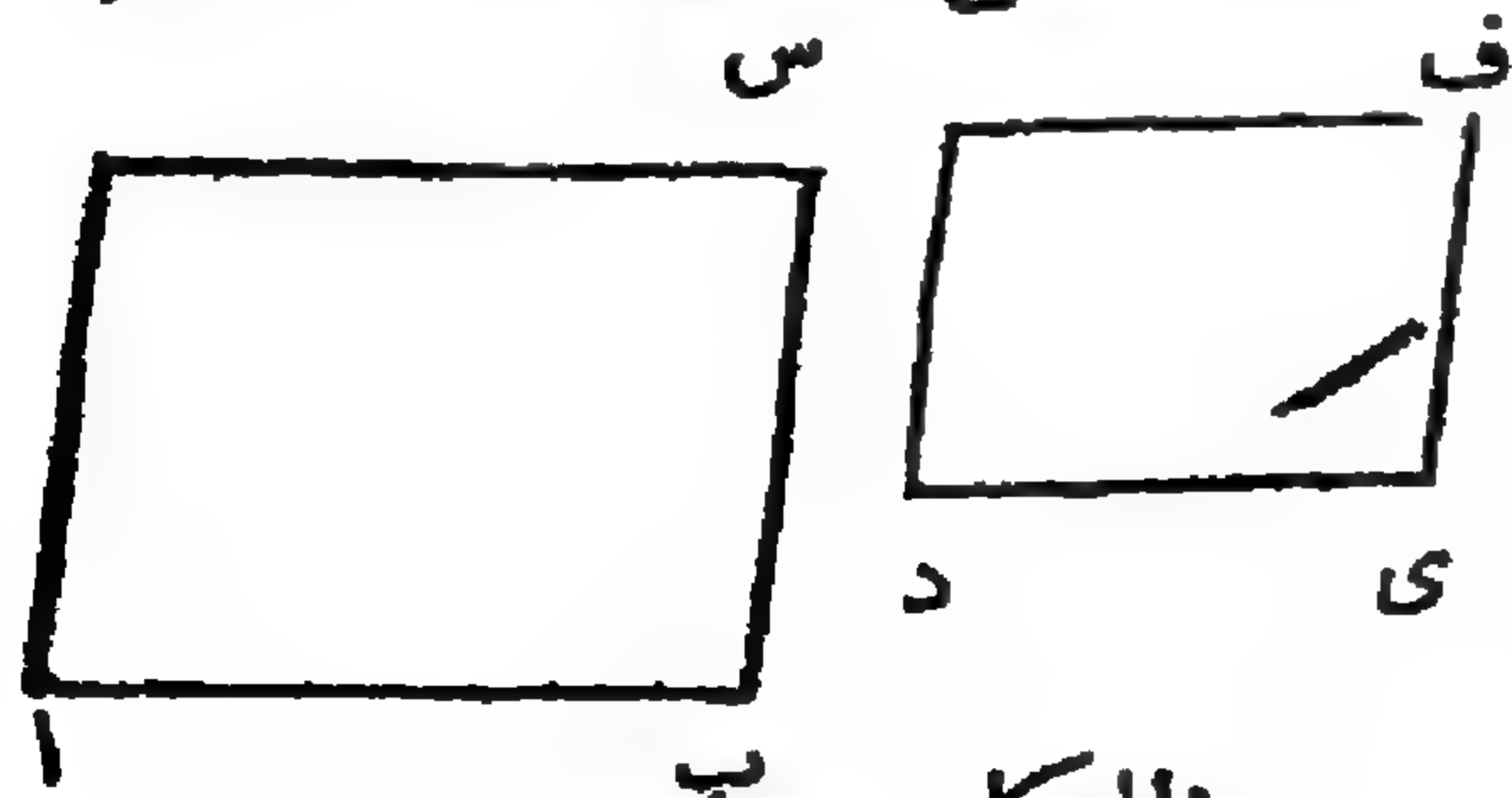
مربع ر ف (ق ٤٧ ك ١) فالدائرتان على ص ر و ص ف تعدلان الدائرة على ر ف

### القضية السابعة. ن

اشكال متوازية الاضلاع ومتساوية الزوايا تكون نسبة بعضها الى

بعض كنسبة مسطح الاعداد التي تناسب اضلاعها بعضها الى بعض

ليكن ا س و د ف شكلين متوازيي الاضلاع متساويي الزوايا. وليكن م ن



ف ق اربعة اعداد وليكن

نسبة ا ب: ب س: م: ن

ونسبة ا ب: د ي: م: ف

ونسبة ا ب: ي ف: م: ق

فبالمساواة نسبة ب س: ي ف: ن: ق. فالشكل

ا س: د ف: م: ن: ف: ق

ليكن ن ف مسطح ن في ف. ونسبة م ن الى ف ق تتركب من نسبت م ن الى

ن ف ون ف الى ف ق (حد ١٠ ك ٥). ولكن نسبة م ن الى ن ف هي نسبة م الى

ف (ق ١٥ ك ٥) لان م ن ون ف مضروبان متساويان من م وف. ولهذا السبب

ايضا نسبة ن ف الى ف ق هي نسبة ن الى ق فنسبة م ن الى ف ق قد تركبت من



نسبة م الى ف ونسبة ن الى ق. وبالمفروض نسبة م الى ف هي نسبة الضلع ب س الى الضلع دى. ونسبة ن الى ق هي نسبة الضلع ب س الى الضلع دى فنسبة م الى ف هي نسبة ب س الى دى ونسبة ب س الى دى هي نسبة ب س الى ف. ونسبة الشكل اس الى الشكل د ف قد تركبت من نسبة اب الى دى ونسبة ب س الى ف. ونسبة الشكل اس الى الشكل ا د كسبة م ن مسطح العددين م ون الى ف ق مسطح العددين ف وق فرع اول. اذا كانت نسبة غ ح الى كل كنسبة م الى ح  $\frac{م}{ح}$  غ ن فالمرع المرسوم على ع ح الى المربع على كل كنسبة م م ل  $\frac{م}{ل}$  ك او مربع م الى ن ن او مربع ن

فرع ثان. اذا قُرِضَتْ خطوط مثل ا ب س د الى اخرو واعداد مناسبة لها مثل م ن ر ص اي ا: ب:: م: ن و ا: س:: م: ر و ا: د:: م: ص. فاذا كان القائم الزوايا مسطح خطين من هذه الخطوط يعدل مربع الخط الثالث فسطح العددين المناسبين للاولين يعدل مربع العدد المناسب للثالث اي اذا كان  $ا \times م = ب \times ن$  فحينئذ  $م \times ر = ن \times د$

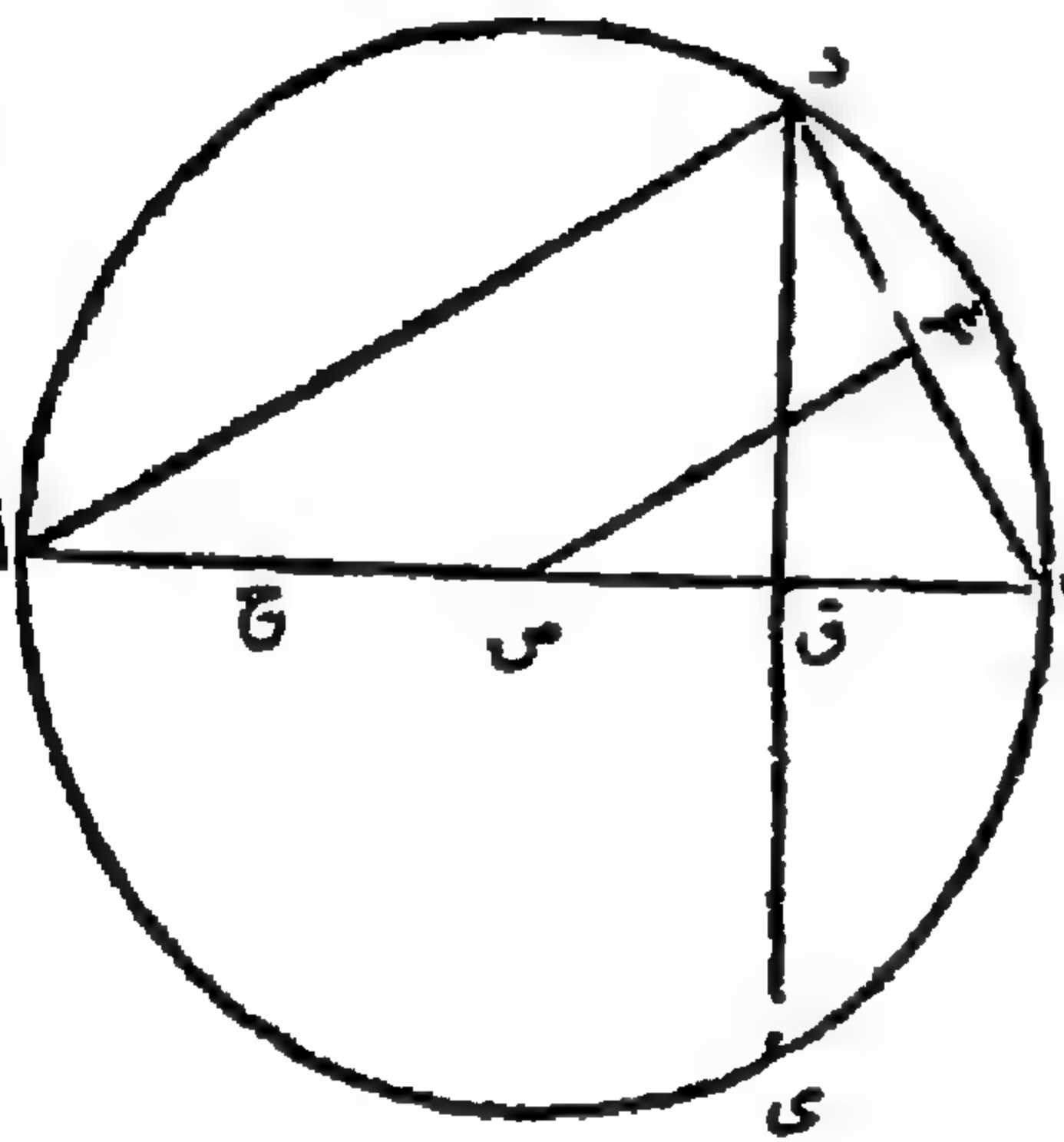
وبالقلب اذا قُرِضَ م ور عددين مناسبين للخطين ا وس وقُرِضَ ان  $ا \times م = ب \times ن$  ووجد عدد مثل ن حتى ان  $ا = م$  ر فحينئذ ا: ب:: م: ن

تعليقة. لكي نجد اعدادا مناسبة لعدة مقادير من جنس واحد لنفرض ان احدها قد انقسم الى اجزاء متساوية ولنفرض م عدد الاجزاء كلها وح جزءا من الاجزاء. ولنفرض ان ح يوجد ن مرة في المقارب ور مرة في المقادير و ص مرة في المقادير وهلم جرا الى اخرو. فالامر واضح ان الاعداد م ن ر ص هي مناسبة للمقادير ا ب س د. فاذا قيل في القضايا الآتية ان خطأ مثل ا = عددا مثل م يراد ان  $ا = م \times ح$  اي ان ا يعدل المقادير المفروض ح مضروباً في م وهكذا في المقادير الاخرى ب س د والاعداد المناسبة لها لان ح انما هو قياس مشترك للكل. وقد يترك ذكر هذا القياس المشترك للاختصار ولكنه متضمن في المعنى كما قيل ان خطأ او مقداراً هندسياً يعدل عدداً ما. واذا كان في ذلك العدد كسراً او كان مختلطاً يراد ان القياس المشترك قد انقسم الى اجزاء يُدَلُّ عليها بالكسر. فلو قيل  $ا = ٢٦٠$  يراد انه يوجد مقدار ح حتى ان  $ا = ٢٦٠ \times ح$  وهكذا

## كل ما دلّ على نسب مفاد برهندسية بواسطة اعداد

## القضية الثامنة: من

العمود من مركز دائرة على وتر قوس من الدائرة هو متناسب متوسط  
بين ربع القطر وخط مركب من نصف القطر مع عمود من المركز  
على وتر مضاعف القوس. وتر القوس هو متناسب متوسط بين  
القطر وخط هو فصلة نصف القطر والعمود المذكور من المركز  
ليكن ا ب د دائرة مركزها س ود ب ي قوساً ما ود ب نصفه. ارسم الوزين



دى دب وايضا س ق عمودا على  
 دى وس ع عمودا على دب ولينخرج  
 س ق حتى يلاقى المحيط في ب وا.  
 نصف اس في ح. فالعمود س ع هو  
 متناسب متوسط بين ا ح و ا ق. وب د  
 متناسب متوسط بين ا ب و ب ق  
 الذى هو قسلة نصف القطر وس ق

ارسم ا د فلكون ا د ب قائمة لأنها في نصف دائرة و س غ ب ايضاً قائمة فالمثلثان  
ا ب د س ب غ متساويا الزوايا و ا ب : ا د :: ب س : س غ (ق ٤ ك ٦) وبالمبادلة  
ا ب : ب س :: ا د : س غ ولكن ا ب هو مضاعف ب س فيكون ا د مضاعف  
س غ ومربع ا د يعدل اربعة امثال مربع س غ

ولكون ادب مثلثا ذا قائمة ودق عمودا من القائمة على اب فالضلع اد  
متناسب متوسط بين اب وا ق (ق ٨ ك ٦) واد' = اب × ا ق (ق ١٧ ك ٦) او  
لكون اب = ا ح × ا د' = ا ح × ا ق . ولكون ا د' = ا د' × ا ح = ا د' × ا ح  
ا ح × ا ق وس غ' = ا ح × ا ق فاد ا س غ هو متناسب متوسط بين ا ح و ا ق  
اي بين ربع القطر والخط المركب من نصف القطر والعمود على مضاعف القوس ب د  
والامر واضح ان ب د هو متناسب متوسط بين اب وب ق (ق ٨ ك ٦) اي

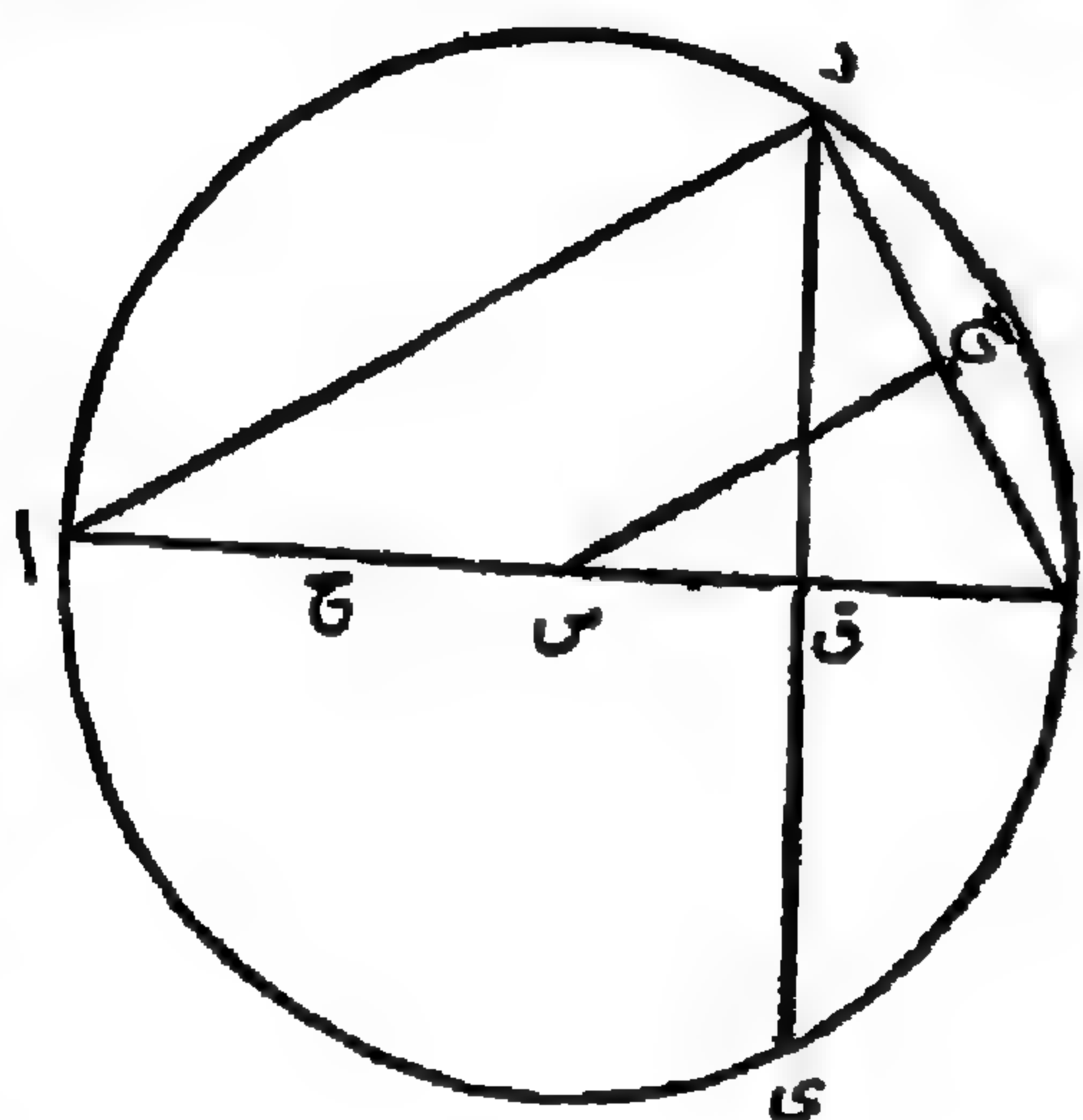


بين القطر وفضلة نصف القطر والعمود على وتر قوس مضاعف القوس د ب

### القضية التاسعة من

محيط الدائرة هو اطول من ثلاثة امثال قطرها بخط اقصر من  $\frac{1}{7}$  من القطر واطول من  $\frac{1}{71}$  من القطر

ليكن ا ب د دائرة مركزها س وقطرها ا ب فالمحيط اطول من ا ب بخط اقصر من  $\frac{1}{7}$  او  $\frac{1}{71}$  من ا ب واطول من ا ب من ا ب



ارسم في الدائرة ا د ب الخط المستقيم ب د حتى يعدل نصف القطر ب س (ق ا ك ٤) ارسم د ق عموداً على ب س واخرجه حتى يلاقي المحيط ايضا في ي وارسم س ج

عموداً على ب د. اخرج ب س الى ا. وتصف ا س في ح وارسم س د

فالامر واضح ان كل واحد من القوسين ب د ب ي هو سدس المحيط (فرع ق ا ك ٤) فالقوس د ب ي ثلث المحيط. فالخط س ج متناسب متوسط بين ا ح ربع القطر والخط ا ق (ق ا ك ٨ مضافات). ولكون الضلعين ب د د س متساويين فالزاويتان د س ق د ب ق متساويتان. ود ق س د ق ب متساويتان ايضا والضلع د ق مشترك بين المثلثين د ب ق د س ق فالقاعدة ب ق تعدل القاعدة س ق فقد تصف س ب في ق فاذا فرض ان ا س ا ب س = ١٠٠٠ فحينئذ ا ح = ٥٠٠ وس ق = ٥٠٠ وا ق = ١٥٠٠ وس ج متناسب متوسط بين ا ح وا ق اي س ج = ا ح > ا ق (ق ا ك ٦) = ١٥٠٠ > ٥٠٠ = ٧٥٠٠٠٠ وس ج = ٨٦٦٤٠٢٥٤ لان (٨٦٦٤٠٢٥٤) اقل من ٧٥٠٠٠٠ وايضاً ا س + س ج = ٨٦٦٤٠٢٥٤ +

ولكون س ج عموداً من المركز س على وتر سدس المحيط فاذا فرض ف = العمود من س وتر ا ب من المحيط يكون ف متناسباً متوسطاً بين ا ح و ا س + س ج

(ق ٨ ك ١ مضافات) وف = اح × (اس + س ج) = ٥٠٠ × (٢٥٤ + ٠) =

١٨٦٦ (١٢٠٧ + ٩٢٣٠ ٩٢٥٨ + وف = ٩٦٥ ٩٢٥٨ + واس = ٩٢٥٨ + ف =

١٩٦٥

ثم اذا فرض ر = العمود من س على وتر<sup>١</sup> من المحيط فحينئذ يكون متناسبا

متوسطا بين اح واس + ف ور = اح × (اس + ف) = ٥٠٠ × (٩٢٥٨ + ٠) =

١٩٦٥ (٩٠٩ + ٩٨٢٩٦٢ ور = ٩٩١ ٤٤٤٩ + واس + ر = ٤٤٤٩ +

١٩٩١

ثم اذا فرض ص = العمود من س على وتر<sup>١</sup> من المحيط فحينئذ ص = اح ×

(اس + ر) = ٥٠٠ × (٤٤٤٩ + ١٩٩١) = ٩٩٥٧٢٢ ٤٥٠ + ص =

٩٩٧ ٨٥٨٩ + واس + ص = ١٩٩٧ ٨٥٨٩ +

اخيرا اذا فرض ط = العمود من س على وتر<sup>١</sup> من المحيط فحينئذ ط = اح ×

(اس + ص) = ٥٠٠ × (٨٥٨٩ + ١٩٩٧) = ٩٩٨٩٢٩ ٤٥٠ + وط =

٩٩٩ ٤٦٤٥٨ + اي اذا انقسم نصف القطر الى ١٠٠٠ جزء فالعمود من

المركز على وتر<sup>١</sup> من المحيط هو اطول من ٩٩٩ ٤٦٤٥٨ من تلك الاجزاء

ولكن حسب القضية السابقة وتر<sup>١</sup> من المحيط هو متناسب متوسط بين

المحيط وفضلة نصف القطر وص اي العمود من المركز على وتر<sup>١</sup> من المحيط، فربع

وتر<sup>١</sup> من المحيط = اب × (اس - ص) = ٢٠٠٠ × (٢ ١٤١١ -) = - ٢ ٤٢٨٢

٤٢٨٢ والوتر ذاته = - ٦٥ ٤٢٨٦ لان (٦٥ ٤٢٨٦) أكثر من ٢ ٤٢٨٢

وتر<sup>١</sup> من المحيط او ضلع شكل متساوي الاضلاع ذي ٩٦ ضلعا في الدائرة اذا

كان - ٦٥ ٤٢٨٦ يكون محيط ذلك الشكل (٦٥ ٤٢٨٦) × ٩٦ =

- ٦٢٨٢ ١٠٥٦

ليكن م محيط شكل يشبه المتقدم ذكره محيط بالدائرة ثم (فرع ٢ ق ٢ ك ٥

مضافات) ط : اس :: - ٦٢٨٢ ١٠٥٦ : م ولكن ط = ٩٩٩ ٤٦٤٥٨ +

فلما ٩٩٩ ٤٦٤٥٨ : ١٠٠٠ :: - ٦٢٨٢ ١٠٥٦ : م فاذا فرض مقدار

اخرن حتى تكون نسبة ٩٩٩ ٤٦٤٥٨ : ١٠٠٠ :: - ٦٢٨٢ ١٠٥٦ : ن

فاذا (ق ٢٣ ك ٥) ٩٩٩ ٤٦٤٥٨ : ٩٩٩ ٤٦٤٥٨ + : ن : م ولكون الاول

اكبر من الثاني فالثالث اكبر من الرابع اي ن < م فاذا استعمل متناسب رابع لهذه



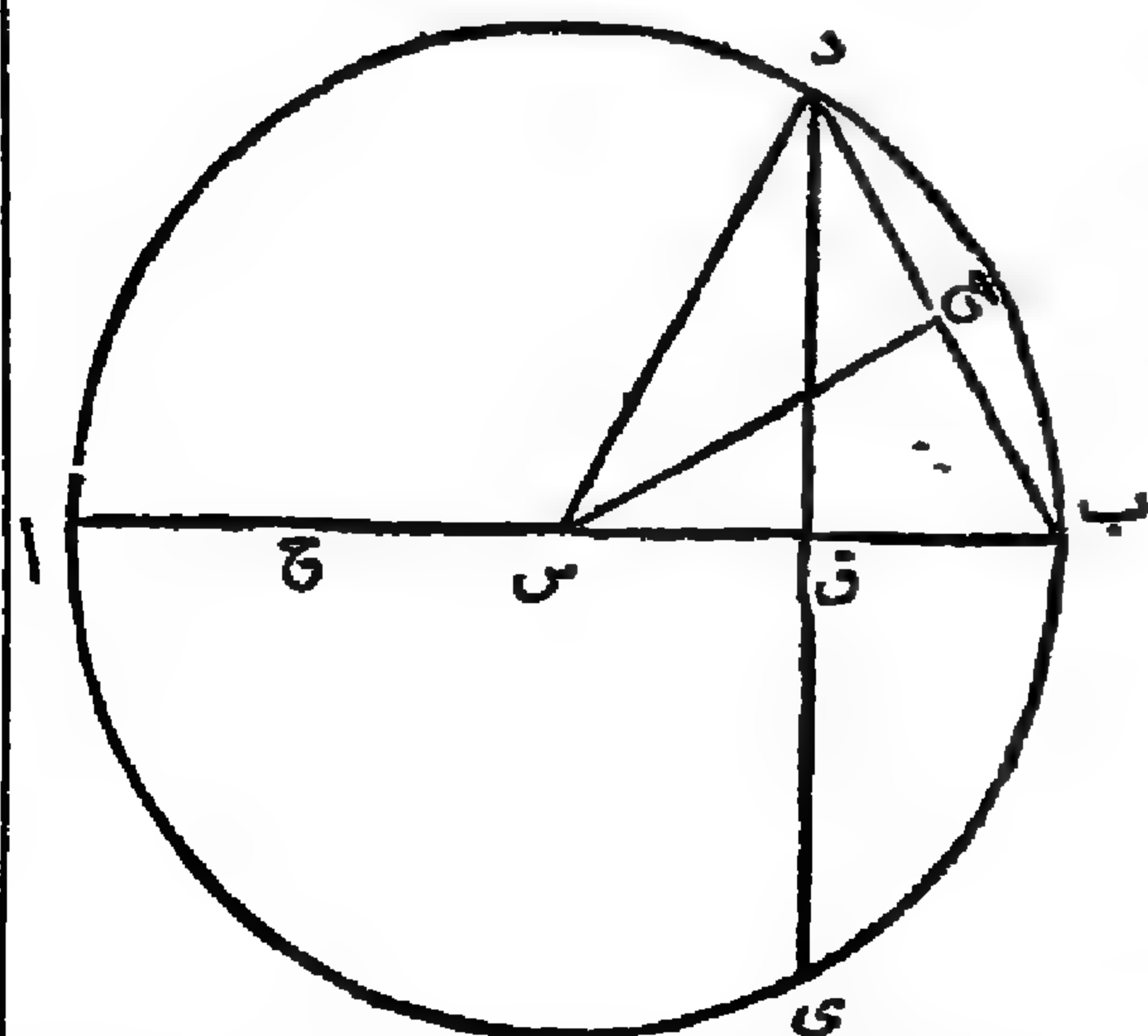
الاعداد ٩٩٩٤٦٤٥٨ و ١٠٠٠ و ٦٢٨٢٤١٠٥٦ و ٦٢٨٥٤٦١ - ا ب  
فلنا ٩٩٩٤٦٤٥٨ : ١٠٠٠ :: ٦٢٨٢٤١٠٥٦ : ٦٢٨٥٤٦١ - و حسبنا  
نقدم ٩٩٩٤٦٤٥٨ : ١٠٠٠ :: ٦٢٨٢٤١٠٥٦ - : ن فلنا ايضا

٦٢٨٢٤١٠٥٦ : ٦٢٨٢٤١٠٥٦ - :: ٦٢٨٥٤٦١ - : ن ولان الاول  
اكبر من الثاني فالثالث اكبر من الرابع اي ٦٢٨٥٤٦١ - < ن وقد تبهرن  
ان ن < م فاذا ٦٢٨٥٤٦١ اكبر من م محيط الشكل المحيط بالدائرة ذب  
الستة والتسعين ضلعاً اي محيط ذلك الشكل هو اقل من ٦٢٨٥٤٦١ ومحيط  
الدائرة اقل من محيط الشكل ذي الاضلاع الكثيرة المحيط بها فبالبحري محيط الدائرة  
اقل من ٦٢٨٥٤٦١ فاذا انقسم نصف القطر الى ١٠٠٠ اقسام يكون المحيط اقل  
من ٦٢٨٥٤٦١ من تلك الاقسام فين المحيط والقطر تناسب اصغر (ق ٨ ك ٥)  
من تناسب ٦٢٨٥٤٦١ الى ٢٠٠٠ او من تناسب ٢١٤٢٠٧٣٠٥ الى ١٠٠٠  
ولكن تناسب ٢٢ الى ٧ هو اعظم من تناسب ٢١٤٢٠٧٣٠٥ الى ١٠٠٠ ا ب  
اذا انقسم القطر الى سبعة اقسام يكون المحيط اقل من ٢٢ قسماً منها

بقي علينا ان نبهرن ان زيادة المحيط على القطر هي اكثر من  $\frac{1}{11}$  من القطر

قد تبهرن سابقاً ان م ج = ٧٥٠٠٠٠ و س ج = ٨٦٦٤٠٢٥٤٥ فاذا  
اس + س ج = ١٨٦٦٤٠٢٥٤٥ . ليكن ف كما تقدم عموداً من المركز على  
وتر  $\frac{1}{11}$  من المحيط فلنا

ف = ا ح × (ا س + س ج) = ٥٠٠ × (١٨٦٦٤٠٢٥٤٥ -) =  
٩٣٣٠١٢٠٧٣ و ف = ٩٦٥٤٩٢٥٨٥ واس + ف = ١٩٦٥٤٩٢٥٨٥



ثم ليكن ر العمود من المركز  
على وتر  $\frac{1}{11}$  من المحيط فلنا ر =  
ا ح (ا س + ف) = ٥٠٠ ×  
(١٩٦٥٤٩٢٥٨٥ -) =  
٩٨٢٩٦٢٠٩٣ و ر =  
٩٩١٤٤٤٩٥ واس + ر =  
١٩٩١٤٤٤٩٥

ليكن ص العمود من المركز

على وتر  $\frac{1}{4}$  من المحيط فلنا  $ص^2 = ا ح \times (ا س + ر) = ٥٠٠ \times -$   
 $٩٩٧٤٨٥٨٩٥ - = (١٩٩١٤٤٤٩٥ - = ٩٩٥٧٢٢٤٧٥)$  وص  
 ثم ان مربع وتر  $\frac{1}{4}$  من المحيط  $= ا ب \times (ا س - ص) = ٢٠٠٠ \times$   
 $(٢٤١٤١٠٥ + = ٢٨٢٤١٠٥ + = ٦٥٤٢٧٧ + =$  والوتر ذاته  
 $(٦٥٤٢٧٧) \text{ اقل من } ٢٨٢٤١٠٥$  وإذا كان وتر  $\frac{1}{4}$  من المحيط  $+ ٦٥٤٢٧٧$   
 فمحيط شكل ذي ٩٦ ضلعاً متساوياً في الدائرة  $= (٦٥٤٢٧٧ +) \times ٩٦ = +$   
 $٦٢٨٢٤٠١٩$  ومحيط الدائرة اطول من محيط الشكل فيها فاذا انقسم نصف القطر  
 الى ١٠٠٠ قسم يكون المحيط اكثر من  $٦٢٨٢٤٠١٩$  من تلك الاقسام. وإذا انقسم  
 نصف القطر الى ٥٠٠ قسم يكون المحيط اكثر من  $٣١٤١٤٠٠٩$  من تلك الاقسام  
 ولكن تناسب  $٣١٤١٤٠٠٩$  الى ١٠٠٠ هو اعظم من تناسب  $\frac{1}{4} + ٢$  الى واحد  
 فتناسب محيط الدائرة الى قطرها هو اعظم من تناسب  $\frac{1}{4} + ٢$  الى واحد اي فضلة  
 المحيط وثلاثة امثال القطر هي اكثر من  $\frac{1}{4}$  من القطر وقد تبين انها اقل من  $\frac{1}{4}$   
 من القطر

فرع اول. اذا فرض قطر دائرة نستعلم المحيط هكذا  $٢٢ : ٧ ::$  القطر : كمية  
 رابعة اكبر من المحيط و  $١ : ٢ ::$  او  $٧١ : ٢٢٢ ::$  اشطر : كمية رابعة اصغر من  
 المحيط

فرع ثان  $\frac{1}{4} - \frac{1}{7} = \frac{1}{28}$  فضلة الخطين المستعملين في  $\frac{1}{4}$  من القطر فضلة  
 المحيط واحدها اقل من  $\frac{1}{28}$  من القطر

فرع ثالث. نسبة  $٢٢ : ٧ ::$  مربع نصف القطر : مساحة الدائرة تقريباً. لان قد  
 تبين سابقاً (فرع اول ق ٥ ك ا مضافات) ان نسبة قطر دائرة الى محيطها كربع  
 نصف القطر الى مساحتها ولكن نسبة القطر الى المحيط كنسبة  $٢٢ : ٧$  تقريباً فربع  
 نصف القطر الى المساحة كهذه النسبة المذكورة تقريباً

### تعليقة

كلما تعددت اضلاع الشكل في الدائرة والشكل المحيط بها قلت الفضلة بينهما  
 وبين احدهما والمحيط كما يرى من هذا الجدول الذي فيه حسب نصف القطر واحداً



عدد الاضلاع	محيط الشكل في الدائرة	محيط الشكل حول الدائرة
٦	٦٠٠٠٠٠٠	٦٠٨٢٢٠٢٣—
١٢	٦٠٢١١٦٥٧+	٦٠٤٣٠٧٨١—
٢٤	٦٠٢٦٥٢٥٧+	٦٠٣١٩٣٢٠—
٤٨	٦٠٢٧٨٧٠٠+	٦٠٢٩٢١٧٣—
٩٦	٦٠٢٨٢٠٦٣+	٦٠٢٨٥٤٣٠—
١٩٢	٦٠٢٨٢٩٠٤+	٦٠٢٨٣٧٤٧—
٣٨٤	٦٠٢٨٣١١٥+	٦٠٢٨٣٣٢٧—
٧٦٨	٦٠٢٨٣١٦٧+	٦٠٢٨٣٢٢١—
١٥٣٦	٦٠٢٨٣١٨٠+	٦٠٢٨٣١٩٥—
٣٠٧٢	٦٠٢٨٣١٨٤+	٦٠٢٨٣١٨٨—
٦١٤٤	٦٠٢٨٣١٨٥+	٦٠٢٨٣١٨٦—

فدري فصلة المحيطين اقل من واحد في المرة السادسة من الكسور العشرية اي اقل من  $\frac{1}{1000000}$  من نصف القطر فالخطا في معرفة محيط الدائرة هو اقل من  $\frac{1}{1000000}$  من نصف قطرها فادا فرض  $n =$  نصف القطر فالمحيط هو اكثر من  $n \times 3.141592$  او من  $n \times 3.141592$  واقل من  $n \times 3.141593$  وفضلتها انما هي  $\frac{1}{1000000}$  من نصف القطر

وهكذا  $n \times 3.141592$  اقل مساحة الدائرة و  $n \times 3.141593$  اكثر من مساحة الدائرة وفضلتها هي  $\frac{1}{1000000}$  من مربع نصف القطر وعلى هذا الاسلوب يتقرب الى الصحيح اكثر ما تقدم ولكن الى الآن لم توجد نسبة القطر الى المحيط تمامًا

# اصول الهندسة

## مضافات

## الكتاب الثاني

### في تقاطع السطح

#### حدود

١ الخط المستقيم العمودي على سطح هو ما احده زاوية قائمة مع كل خط مستقيم في ذلك السطح

٢ اذا تقاطع سطحان وكانت كل المخطوط المستقيمة في احدهما العمودية على خط التقاطع عمودية ايضا على السطح الاخر فالسطح الاول عمودي على الثاني

٣ ميل خط مستقيم على سطح هو الزاوية الحادة بين ذلك الخط وخط اخر مستقيم مرسوم من ملتقى الخط الاول بالسطح الى ملتقى السطح وعمودي عليه من اية نقطة كانت في الخط الاول

٤ الزاوية بين سطحين يتقاطعان في الحادة بين خطين مستقيمين كل واحد منهما في سطح من السطحين وكل واحد منهما عمودي على خط تقاطعهما ومن الزاويتين المتوازيين الحادتين من ذلك والحادة هي ميل احد السطحين الاخر

٥ اذا عدلت الزاوية المذكورة الحادة بين سطحين الزاوية الحادة بين سطحين آخرين يقال ان ميل الاولين مثل ميل الآخرين

٦ الخط المستقيم المار في سطح هو الذي لا يلاقي السطح ولو أخرج على استقامته الى سائر نهاية



٧ السطوح المتوازية هي التي لا تتلاقى ولو امتدت الى غير نهاية  
٨ الزاوية المجسمة هي الحادثة من التقاء ثلاث زوايا بسيطة فاكثر ليست في  
سطح واحد

### القضية الاولى . ن

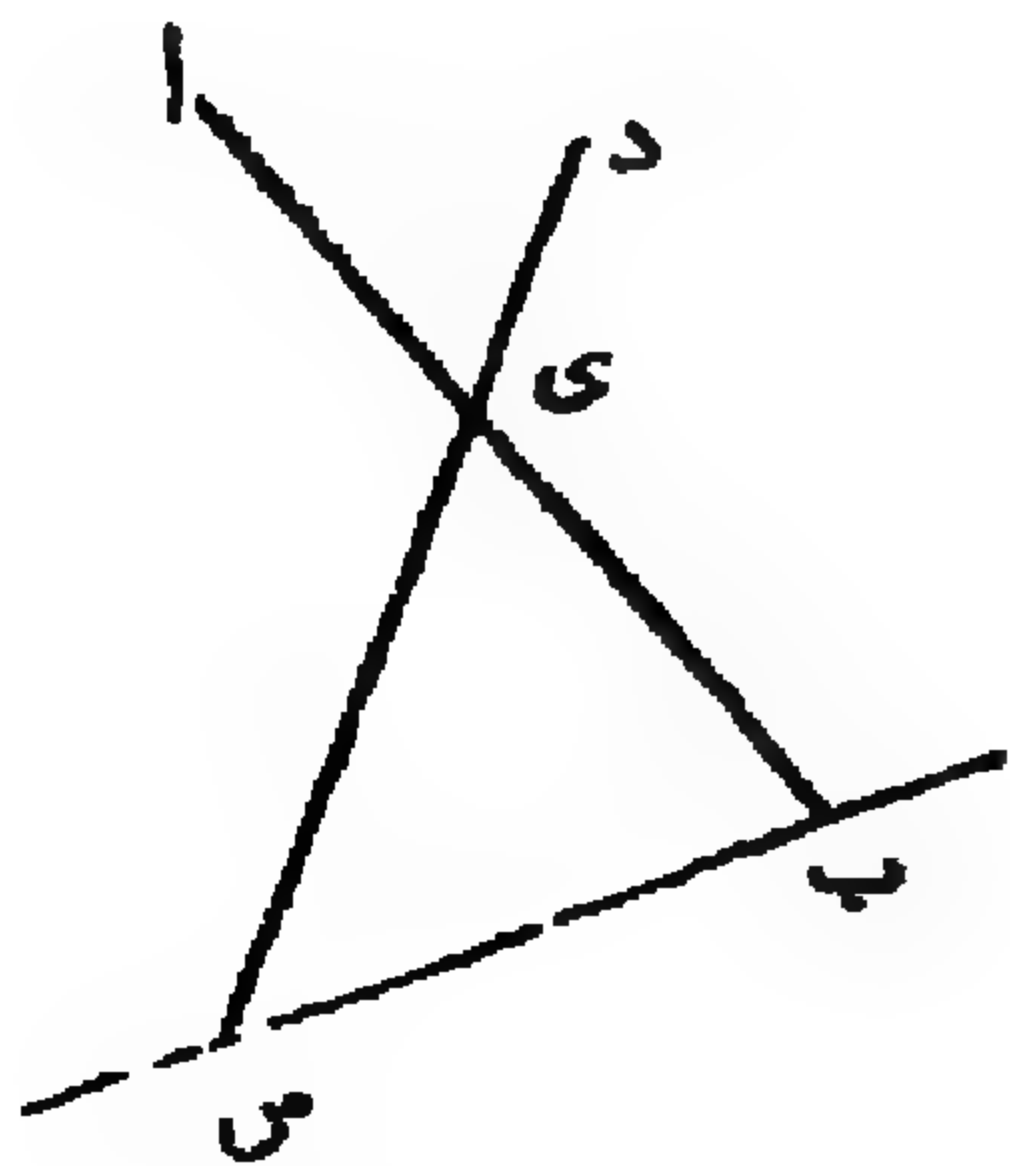
لا يكون قسم من خط مستقيم في سطح وقسم اخر منه فوق ذلك  
السطح

ان كانت ممكنا ليكن ا ب س خطا مستقيما وليكن القسم ا ب منه في سطح  
والقسم ب س منه فوق السطح . فليكون ا ب في  
سطح فيمكن اخراجه في ذلك السطح (اولى  
المقتضيات ك ١) فليخرج الى د فيكون ا ب س  
ا ب د خطين مستقيمين لهما قسم مشترك ا ب  
وذلك غير ممكن (فرع حد ٢ ك ١) فلا يكون ا ب س خطا مستقيما



### القضية الثانية . ن

اذا التقت ثلاثة خطوط مستقيمة في غير نقطة واحدة فهي في سطح واحد  
لتتلاق الخطوط الثلاثة المستقيمة ا ب ب س س د في النقطة ب س  
فهي في سطح واحد



ليمر سطح بالخط المستقيم ب و ليدير السطح  
على ب ي حتى يمر بالنقطة س . فليكون ي و س  
في هذا السطح يكون الخط ي س فيه ايضا وقد  
فرض ان ي ب فيه فالخطوط الثلاثة ي ب  
ب س س ي هي في السطح الواحد وهي تمام  
ا ب ا ب س س د ولا يكون قسم من خط مستقيم

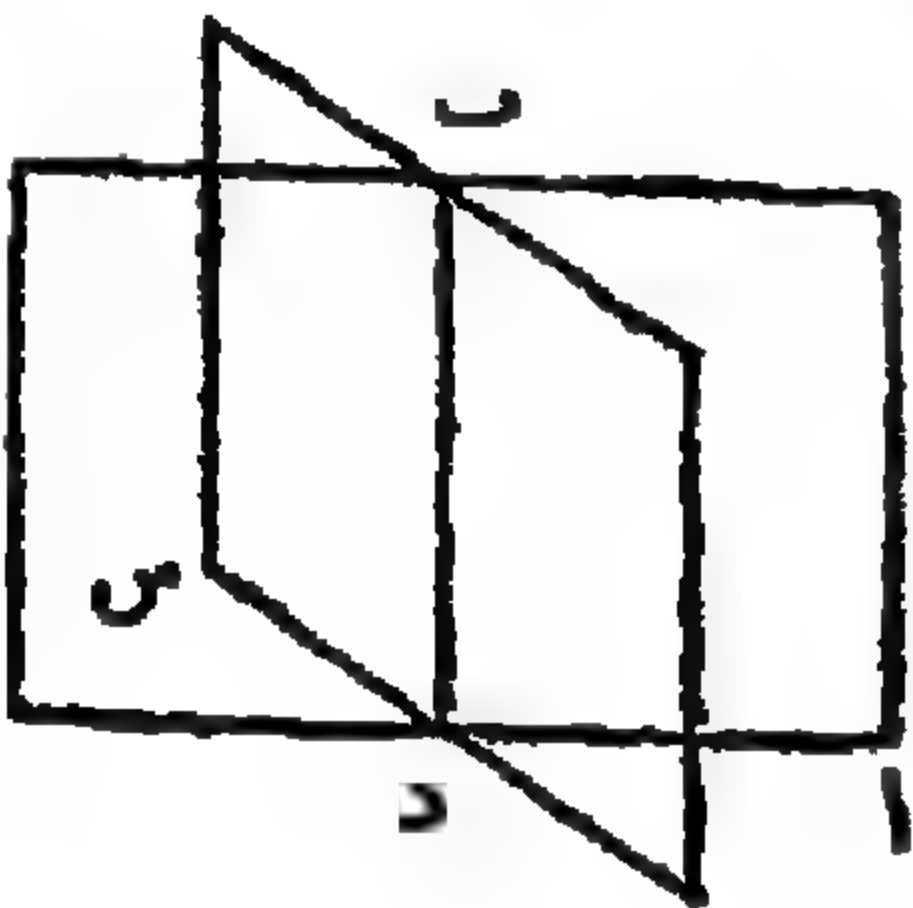
سطح وقسم اخر منه في غيره (ق ا ك ٢ مضافات) فكل الخطوط الثلاثة في سطح واحد

فرع. كل خطين متقاطعين هما في سطح واحد. وكل ثلاث نقط كيفما فرضت هي في سطح واحد.

### القضية الثالثة. ن

اذا تقاطع سطحان فموضع التقاطع هو خط مستقيم

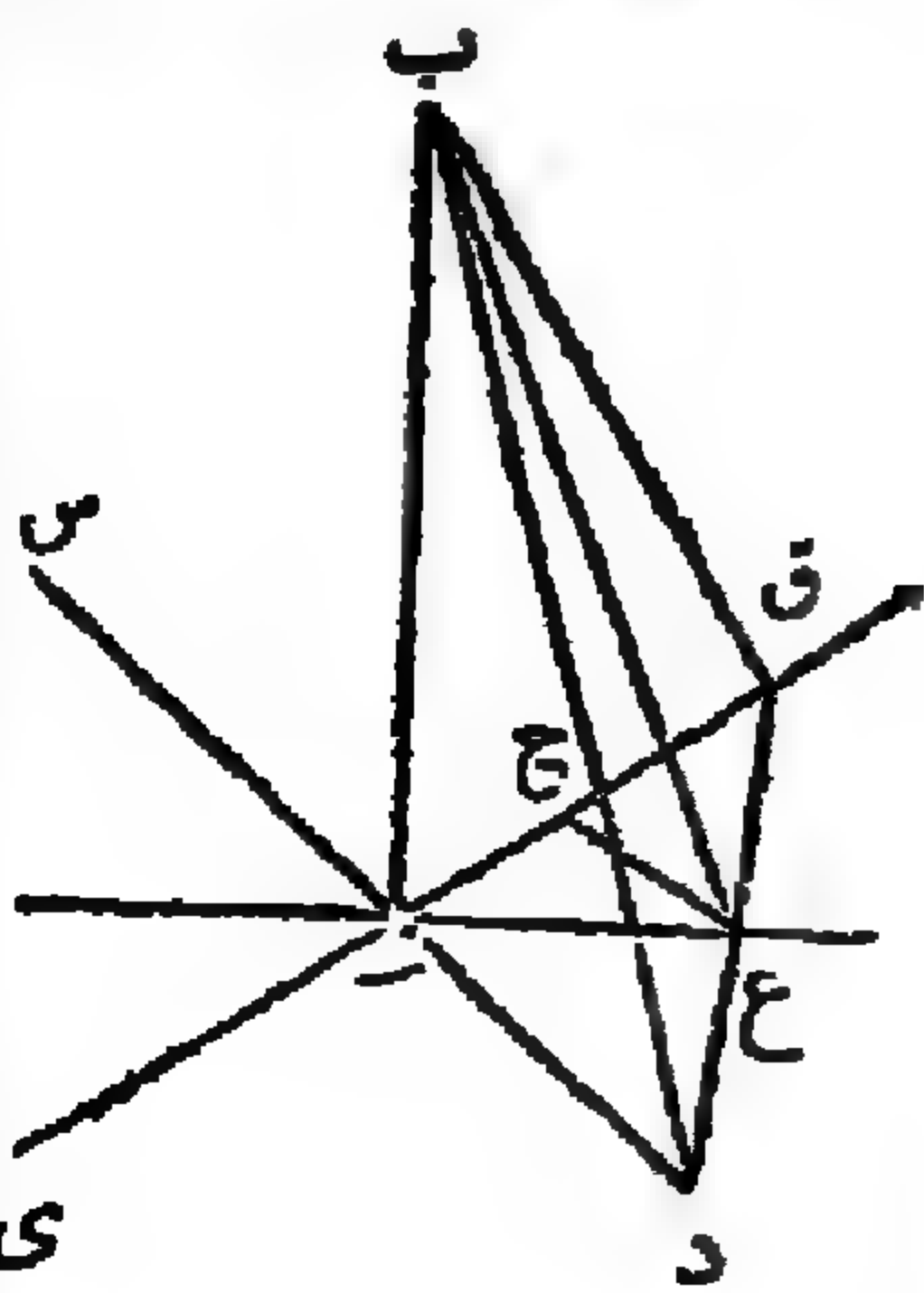
ليتقاطع السطحان ا ب و ب س وليكن ب و د نقطتين في خط التقاطع. ارسم الخط المستقيم ب د. فلان النقطتين ب و د في السطح ا ب فالخط ب د هو في ا ب (حده ك ا) ولما السبب ايضا هو في ب س فالخط المستقيم ب د مشترك بين السطحين ا ب و ب س اي هو موضع تقاطعها



### القضية الرابعة. ن

اذا كان خط مستقيم عموداً على خطين مستقيمين على ملتقاها فهو عمود على السطح الذي فيه الخطان

ليكن ا ب عموداً على الخطين المستقيمين ي ق و د س على نقطة التقائهما ا فهو عمود على السطح المار بالخطين ي ق و د س من ارسم اي خطي شئت في السطح الذي فيه ي ق و د س مثل الخط ا ع. وليكن ع نقطة في ذلك الخط. ارسم غ ح حتى يوازي ا د واجعل ح ق يعدل ح ا وارسم ق ع وليخرج حتى يلاقي س ا في د. ارسم ب د ب ع ب ق لان غ ح يوازي ا د وح ق = ح ا فلذا



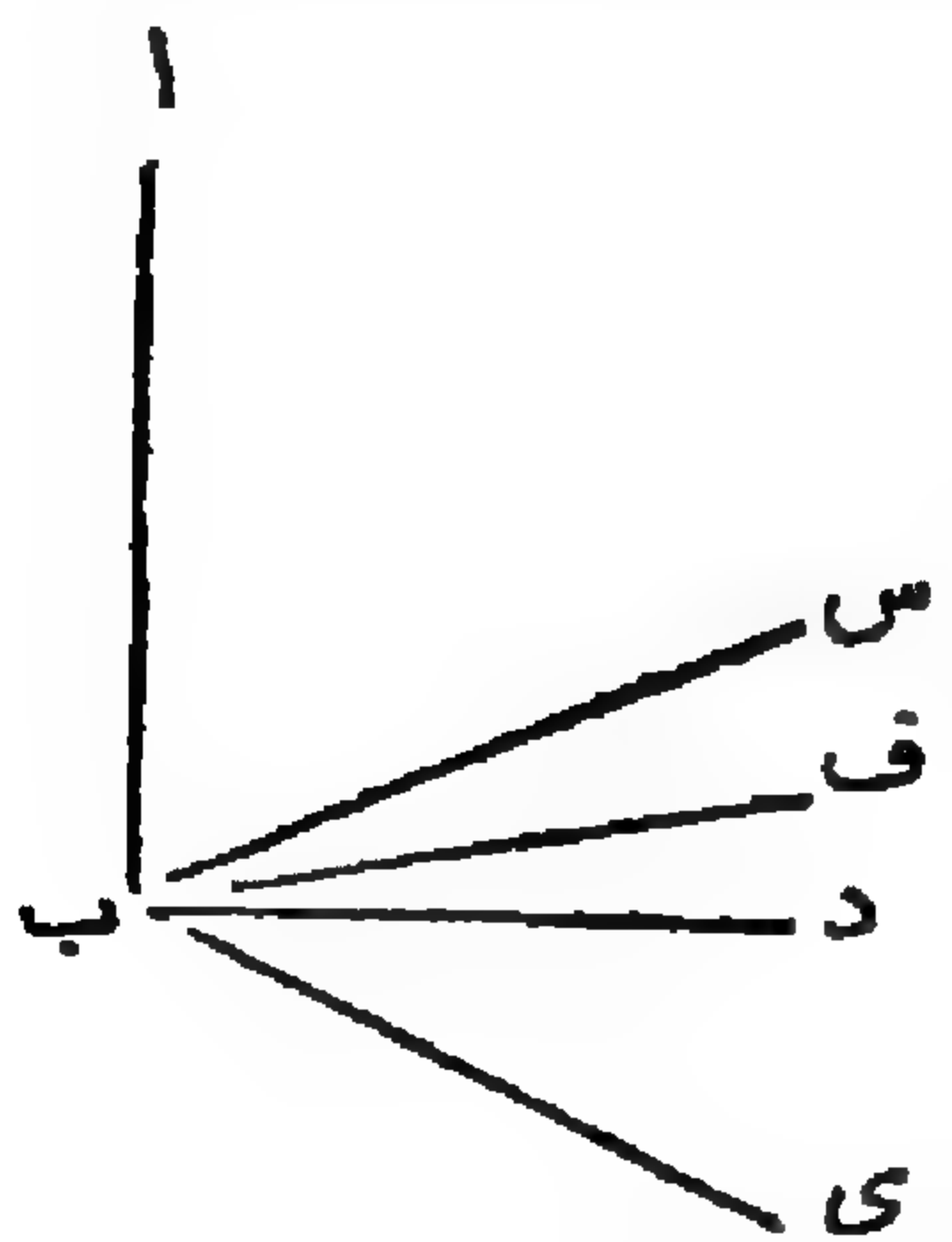


ق غ = غ د فالخط ق د قد تنصف في غ. ولأن ب ا د قائمة ب د = ب ا + ا د  
(ق ٤٧ ك ١) وب ق = ب ا + ا ق وب د = ب ق + ق د = ب ا + ا د + ا ق + ا ق.  
ولأن د ق قد تنصف في غ (ق ٢ ك ٢) ا د + ا ق = ا غ + ا غ = ا غ ق فاذا ب د +  
ب ق = ا ب + ا غ + ا غ ق ولكن ب د + ب ق = ا ب غ + ا غ ق  
(ق ١ ك ١) فاذا ا ب غ + ا غ ق = ا ب ا + ا غ + ا غ ق. اطرح ا غ ق  
من الحابيين فيبقى ا ب غ = ا ب ا - ا غ اوب غ = ا ب + ا غ فتكون  
ب ا غ قائمة (ق ٤٨ ك ١) واع هو في السطح الذي فيه ا د واق والخط العمودي  
على خط ب غ سطح ما هو عمودي على ذلك السطح (حد ٢ ك ٢ مضافات) فالخط  
ا ب هو عمود على سطح الخط ا ق ا د

### القضية الخامسة من

اذا تلاقت ثلاثة خطوط مستقيمة في نقطة واحدة وكان خط آخر  
مستقيم عموداً على الثلاثة في تلك النقطة فالخطوط الثلاثة في سطح  
واحد

ليكن ب س ب د ب ي ثلاثة خطوط مستقيمة متلاقية في النقطة ب وليكن  
ب ا عموداً عليها في تلك النقطة هذه الخطوط الثلاثة  
هي في سطح واحد



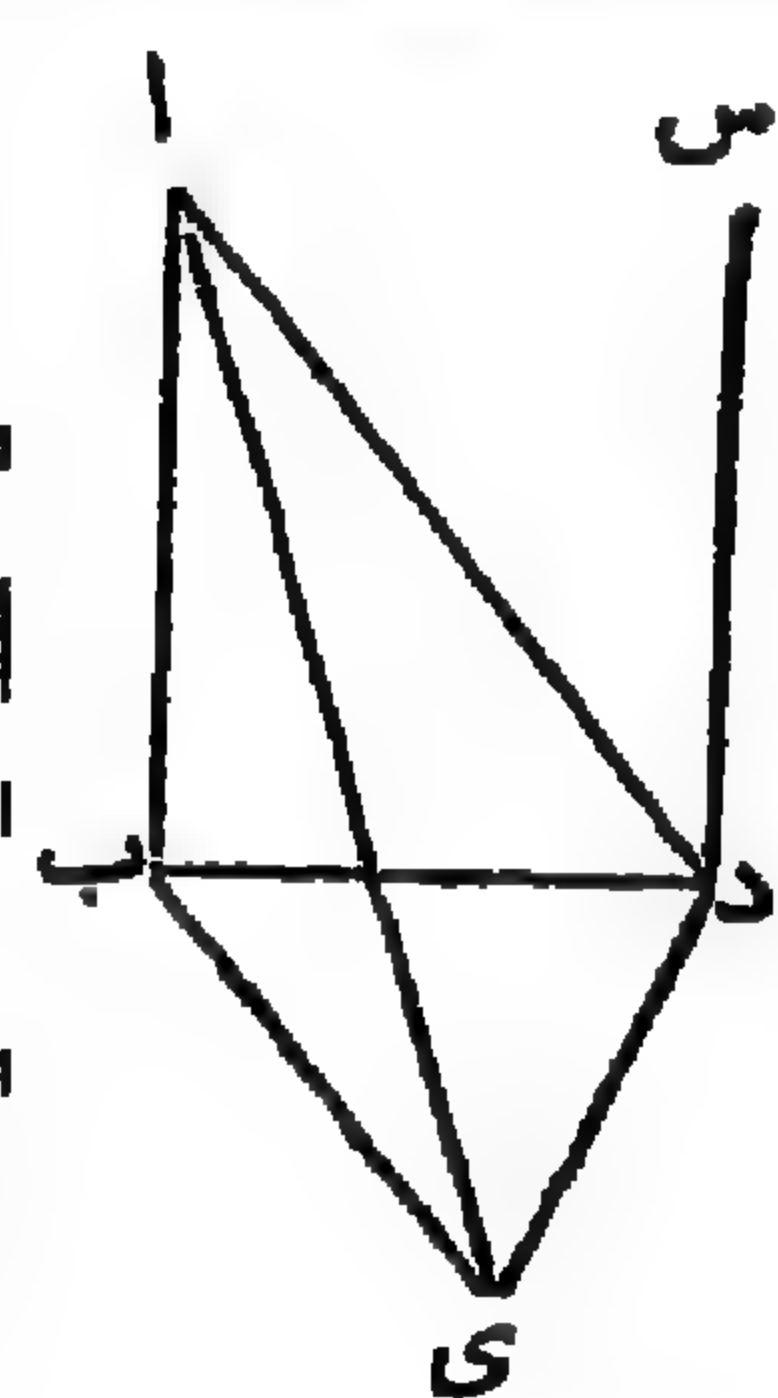
والأفان كان ممكناً ليكن ب د وب ي في سطح  
وب س فوقه وليمر سطح في ا ب وب س وليكن  
موضع تقاطعه مع السطح الذي فيه ب د وب ي  
خطاً مستقيماً (ق ٢ ك ٢ مضافات) وليكن ب ف  
ذلك الخط فالخطوط الثلاثة المستقيمة ا ب ب س

ب ف هي في سطح واحد اي الذي يمر في ا ب وب س. ولكون ا ب عموداً على كل  
من الخطين المستقيمين ب د ب ي وهو عمود على السطح المار فيها (ق ٤ ك ٢ مضافات)  
وهو عمود على كل خط في ذلك السطح وب ف هو في السطح الذي يلاقيه فالزاوية

ا ب ف قائمة وقد فرض ان ا ب س قائمة فالزاوية ا ب ف = ا ث س وهما في سطح واحد وذلك لا يمكن فالخط المستقيم ب س ليس فوق السطح الذي فيه ب د وب ي فالخطوط الثلاثة المستقيمة ب س ب د ب ي في سطح واحد

### القضية السادسة. ن

خطان مستقيمان عمودان على سطح واحد هما متوازيان  
ليكن الخطان المستقيمان ا ب وس د عمودين على السطح ب ي د فهما متوازيان

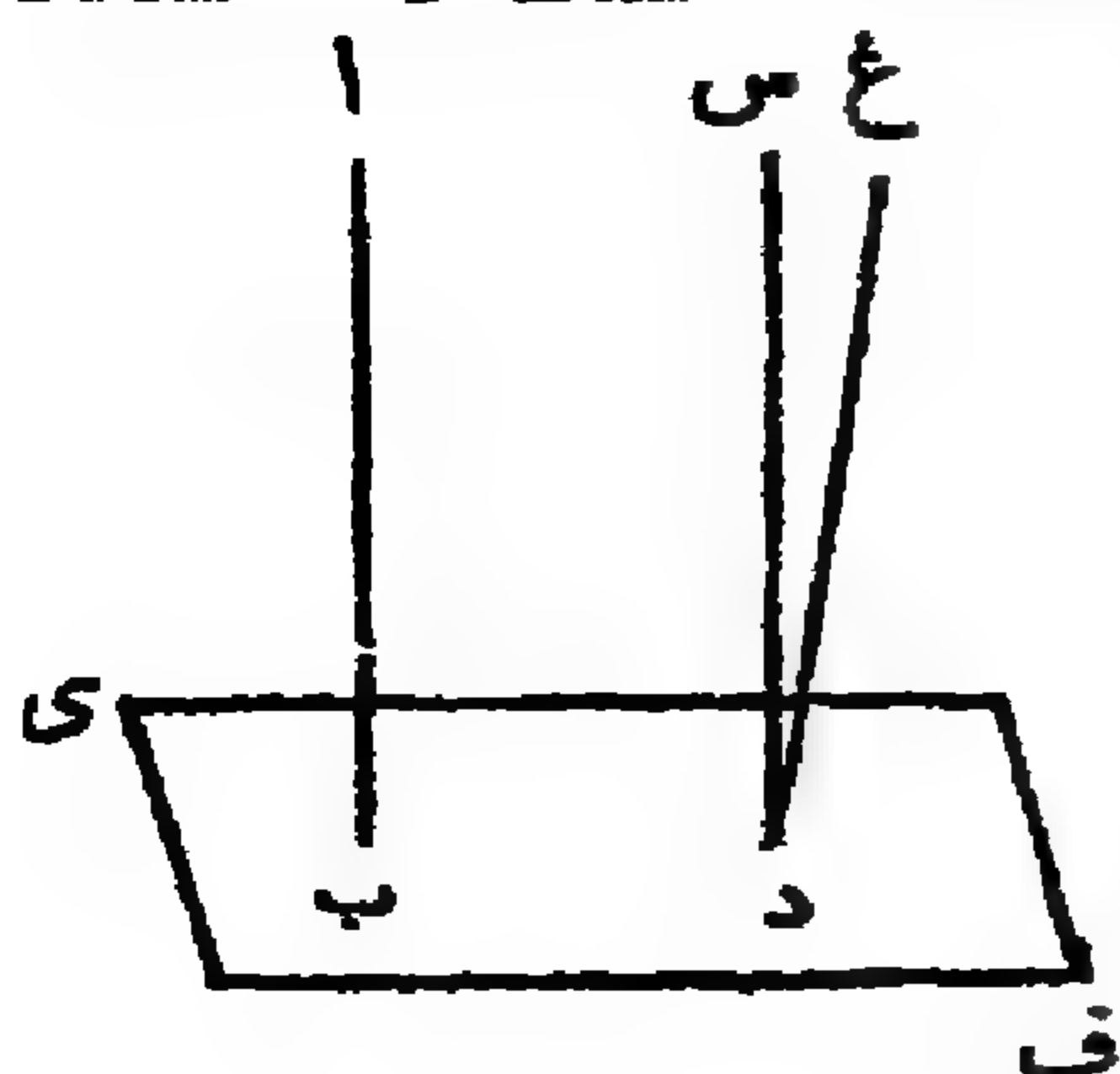


ليلاقيا السطح في النقطتين ب ود. ا رسم د ي عموداً على  
د ب في السطح ب د ي ولتكن ي نقطة ما فيه. ا رسم ا ي  
ا د ي ب. فلكون ا ب ي قائمة ا ب + ب ي = ا ي  
(ق ٤٧ ك ١) ولكون ب د ي قائمة ب ي = ب د +  
د ي فاذا ا ب + ب د + د ي = ا ي و ا ب + ب د =  
ا د فاذا ا د + د ي = ا ي فتكون ا د ي قائمة (ق ٤٨  
ك ١) فالخط ي د هو عمود على الخطوط الثلاثة ب د د ا

د س فهي في سطح واحد (ق ٥ ك ٢ مضافات) و ا ب هو في السطح الذي فيه ب د  
ودا لان كل ثلاثة خطوط متلاقية هي في سطح واحد (ق ٢ ك ٢ مضافات) فاذا  
ا ب ب د د س في سطح واحد وكل واحد من الراويين ا ب د ب د س قائمة  
فالخط ا ب يوازي الخط س د (ق ٢٨ ك ١)

### القضية السابعة. ن

اذا كان خطان مستقيمان متوازيين وكان احدهما عموداً على سطح  
فالآخر ايضاً عمود على ذلك السطح  
ليكن ا ب وس د خطين متوازيين وليكن احدهما ا ب عموداً على سطح ي ف



فيكون س د ايضاً عموداً عليه  
وان لم يكن س د عموداً على السطح الذي  
ا ب عمود عليه فليكن د غ عموداً عليه فاذا  
د غ يوازي ا ب (ق ٦ ك ٢ مضافات) وكلا  
د س د غ يوازي ا ب وقد رُسمت نقطة  
واحدة وذاك غير ممكن (اولية ١ ك ١)

## القضية الثامنة: ن

خطان مستقيمان يوازيان خطأ ثالثاً مستقيماً هما متوازيان وان لم تكن  
في سطح واحد

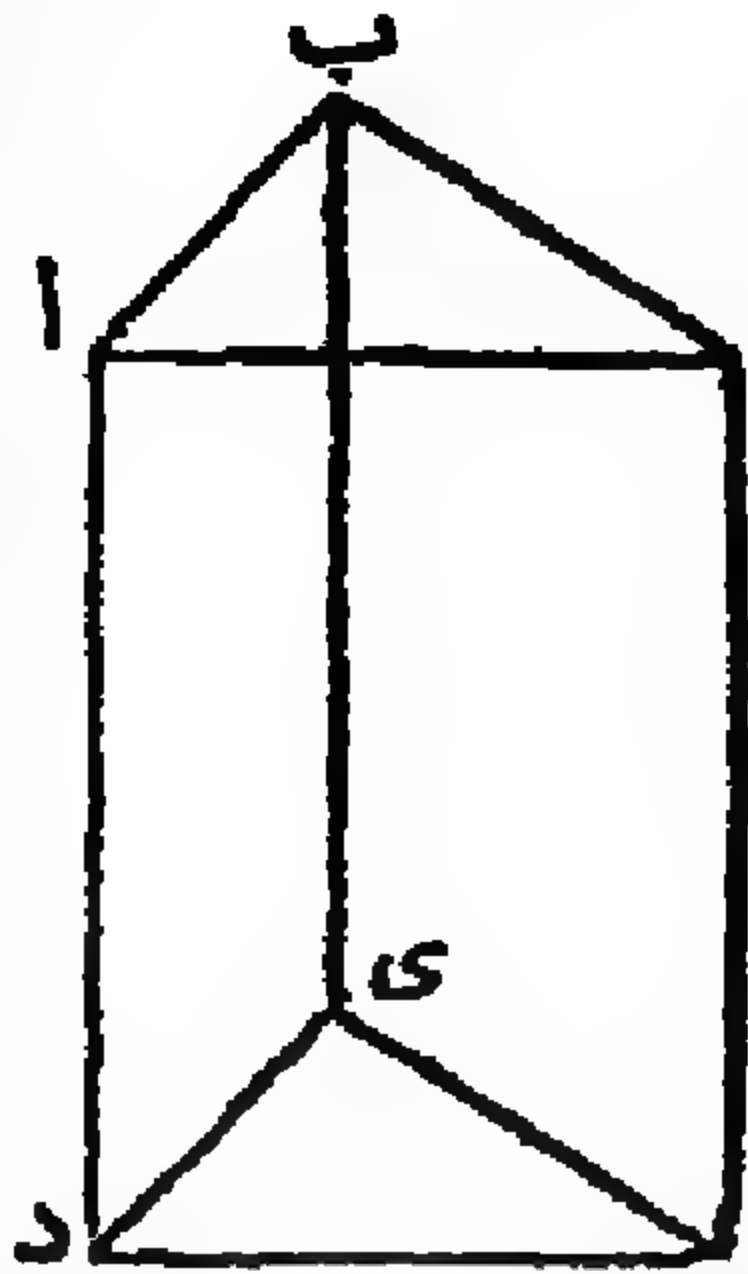
لفرض ان الخطين المستقيمين اب وس د يوازيان الخط المستقيم ي ف وهو  
ليس في سطحها فالخط اب يوازي الخط س د  
في ي ف خذ آية نقطة شئت مثل غ ومنها  
ارسم الخط المستقيم غ ح في السطح المار بالخطين  
اب ي ف وليكن غ ح عموداً على ي ف  
غ ك عموداً على ي ف في السطح الذي يتر  
بالخطين ي ف س د. ولكون ي ف عموداً على ح غ وك غ فهو عمود على السطح  
الماز بها ح غ ك (ق ٤ ك ٢ مضافات) وي ف يوازي اب فاذا اب هو عمود على  
السطح ح غ ك (ق ٧ ك ٢ مضافات) ولهذا السبب س د عمود على السطح ح غ ك  
فكلا اب وس د عمود على سطح واحد فهما متوازيان (ق ٦ ك ٢ مضافات)

## القضية التاسعة من

اذا تلاقي خطَّان مستقيمان ووازيّا خطَّين آخرين مستقيمين متلاقين  
وليسا في سطح الاولين فالزاوية الحادثة بين الاولين تعدل الحادثة  
بين الآخرين



ليكن  $اب$   $س$   $ب$  خطين مستقيمين وليتلاقيا في  $ب$  وليوازيا خطين آخرين مستقيمين  $دي$   $في$  المتقيين في  $ي$  وليسا في سطح



الاولين فالزاوية  $اب$   $س$  تعدل الزاوية  $دي$   $ف$ . اقطع  $س$  الاقسام المتساوية  $ب$   $ا$   $ب$   $س$   $ي$   $د$   $ي$   $ف$  وارسم  $اد$   $بي$   $س$   $ف$   $اس$   $د$   $ف$ . فلكون  $ب$   $ا$   $=$   $ي$   $د$  وبوازيه فالخط  $اد$   $=$   $بي$  وبوازيه (ق ٢٣ ك ١) ولهذا السبب

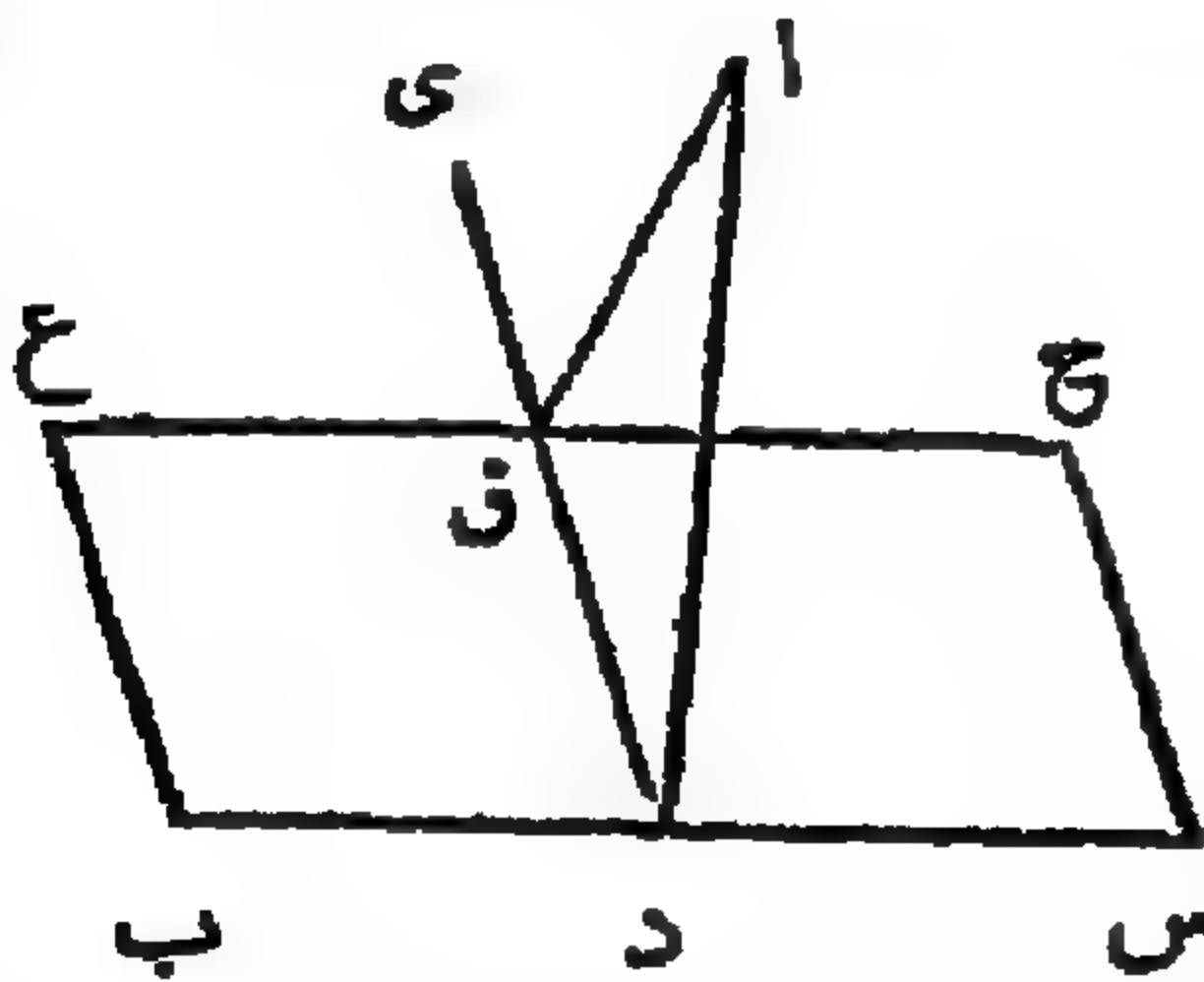
$س$   $ف$   $=$   $بي$  وبوازيه فاذا  $اد$   $=$   $س$   $ف$  وبوازيه  $ف$  (ق ٨ ك ٢ مضافات)  $واس$   $=$   $د$   $ف$  وبوازيه (ق ٢٢ ك ١) فلكون  $اب$   $وب$   $س$  يعدلان  $دي$   $وي$   $ف$  والقاعدة  $اس$   $=$  القاعدة  $د$   $ف$  فالزاوية  $اب$   $س$   $=$  الزاوية  $دي$   $ف$  (ق ٨ ك ١)

### القضية العاشرة. ع

علينا ان نرسم عموداً على سطح من نقطة مفروضة فوقه

ليكن النقطة المفروضة  $وب$   $ح$  السطح المفروض. علينا ان نرسم عموداً على

$ب$   $ح$  من النقطة  $ا$



ارسم في السطح اي خط مستقيم شئت مثل  $ب$   $س$  ومن  $ا$  ارسم  $اد$  عموداً على  $ب$   $س$  (ق ١٢ ك ١) فاذا كان  $اد$  عموداً على السطح  $ب$   $ح$  ايضاً فقد تم العمل. والآن

فمن النقطة  $ا$  ارسم الخط المستقيم  $دي$  في السطح  $ب$   $ح$  واجعله عموداً على  $ب$   $س$ . ومن  $ا$  ارسم  $اق$  عموداً على  $دي$ . وفي  $ق$  ارسم  $ق$   $ح$  حتى يوازي  $ب$   $س$  (ق ٢١ ك ١) فلكون  $ب$   $س$  عموداً على  $دا$  وعلى  $دي$  فهو عمود على السطح الما بينهما (ق ٤ ك ٢ مضافات)  $وغ$   $ح$  يوازي  $ب$   $س$  هو ايضاً عمود على ذلك السطح (ق ٧ ك ٢ مضافات) وهو عمود على كل خط مستقيم في ذلك السطح (ق ٢٢ ك ٢ مضافات) ويلتقي  $اق$  الذي هو في السطح المذكور اي الما بالخطين  $اد$   $ودي$  فاذا  $اق$  عمود على  $غ$   $ح$  و  $دي$  على موضع التقائهما فهو عمود على سطحهما (ق ٤ ك ٢ مضافات) وذلك السطح هو  $ب$   $ح$  فقد رُسم  $اق$  عموداً على السطح  $ب$   $ح$  من النقطة المفروضة

فرع. لو فرض ان يرسم عمود على سطح من نقطة فيه مثل س فعين نقطة فوقه  
مثل ا وارسم اق عموداً على السطح ومن س ارسم خطاً حتى يوازي اق فيكون عموداً  
على السطح (ق ٧ ك ٢ مضافات)

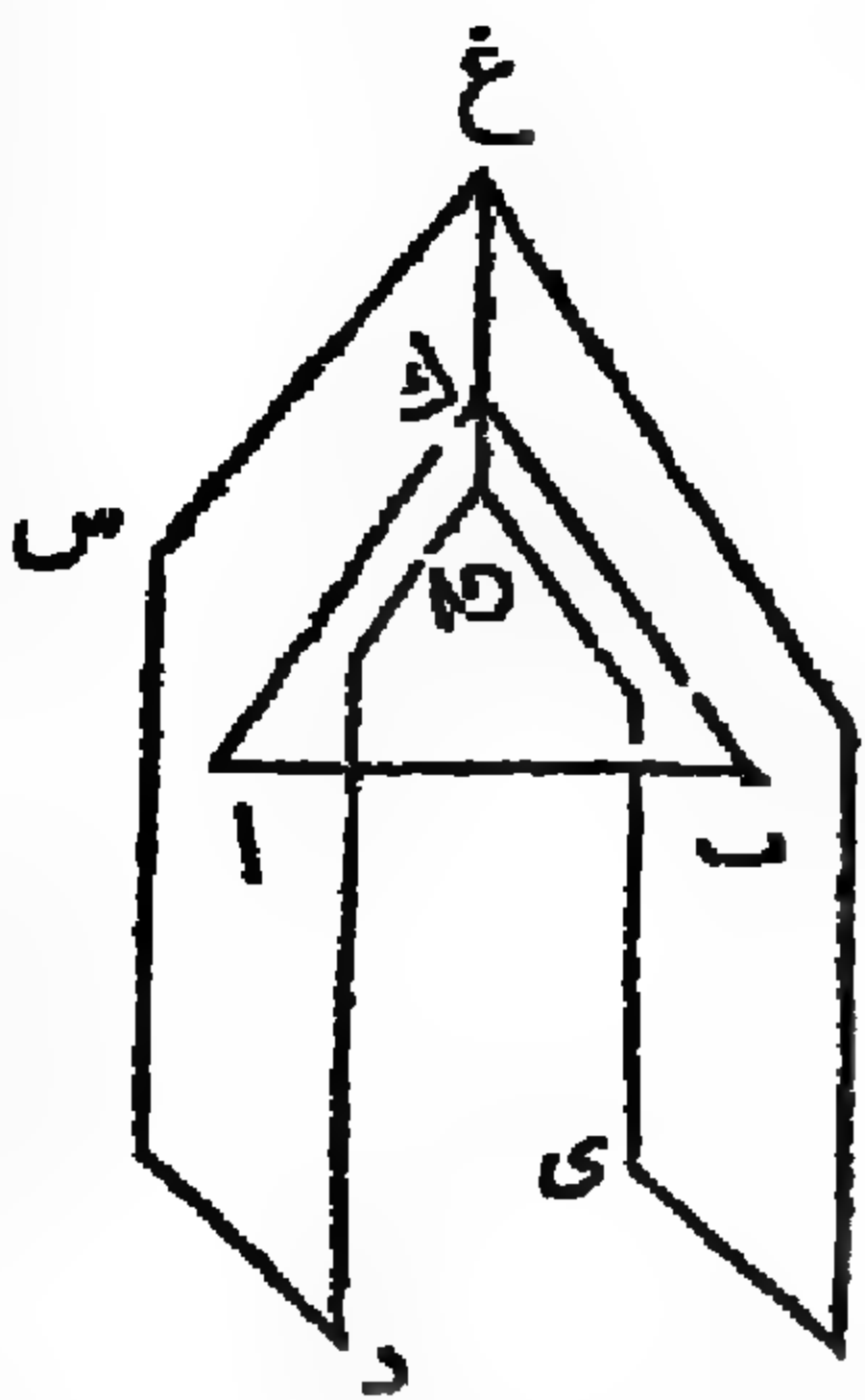
### القضية الحادية عشرة. ن

من نقطة واحدة في سطح لا يكون خطان مستقيمان عمودين على ذلك  
السطح على جانب واحد منه. ومن نقطة فوقه لا يكون اكثر من خط  
واحد عموداً عليه.

ان كان ممكناً ليكن اس اب عمودين على سطح مفروض على نقطة واحدة منه  
هي ا وعلى جانب واحد منه وليمر سطح بهذين  
الخطين ب ا س ا فعمل تقاطع هذا السطح بالسطح  
المفروض هو خط مستقيم ماراً بالنقطة ا (ق ٢ ك ٢  
مضافات) ليكن د ا ي محل التقاطع فالخطوط  
المستقيمة ب ا س ا د ا ي هي في سطح واحد. ولكون س ا عموداً على السطح  
المفروض فهو عمود على كل خط مستقيم يلاقيه في ذلك السطح فالزاوية س ا ي  
قائمة ولهذا السبب ايضاً ب ا ي قائمة وهما في سطح واحد وذاك غير ممكن. ومن  
نقطة مفروضة فوق السطح لا يكون الا خط واحد عموداً على السطح والا لكانا  
متوازيين (ق ٦ ك ٦ مضافات) وذاك محال

### القضية الثانية عشرة. ن

اذا كان خط مستقيم عموداً على سطوح فتلك السطوح متوازية  
ليكن الخط المستقيم اب عموداً على السطحين س د ي ف فهما متوازيان

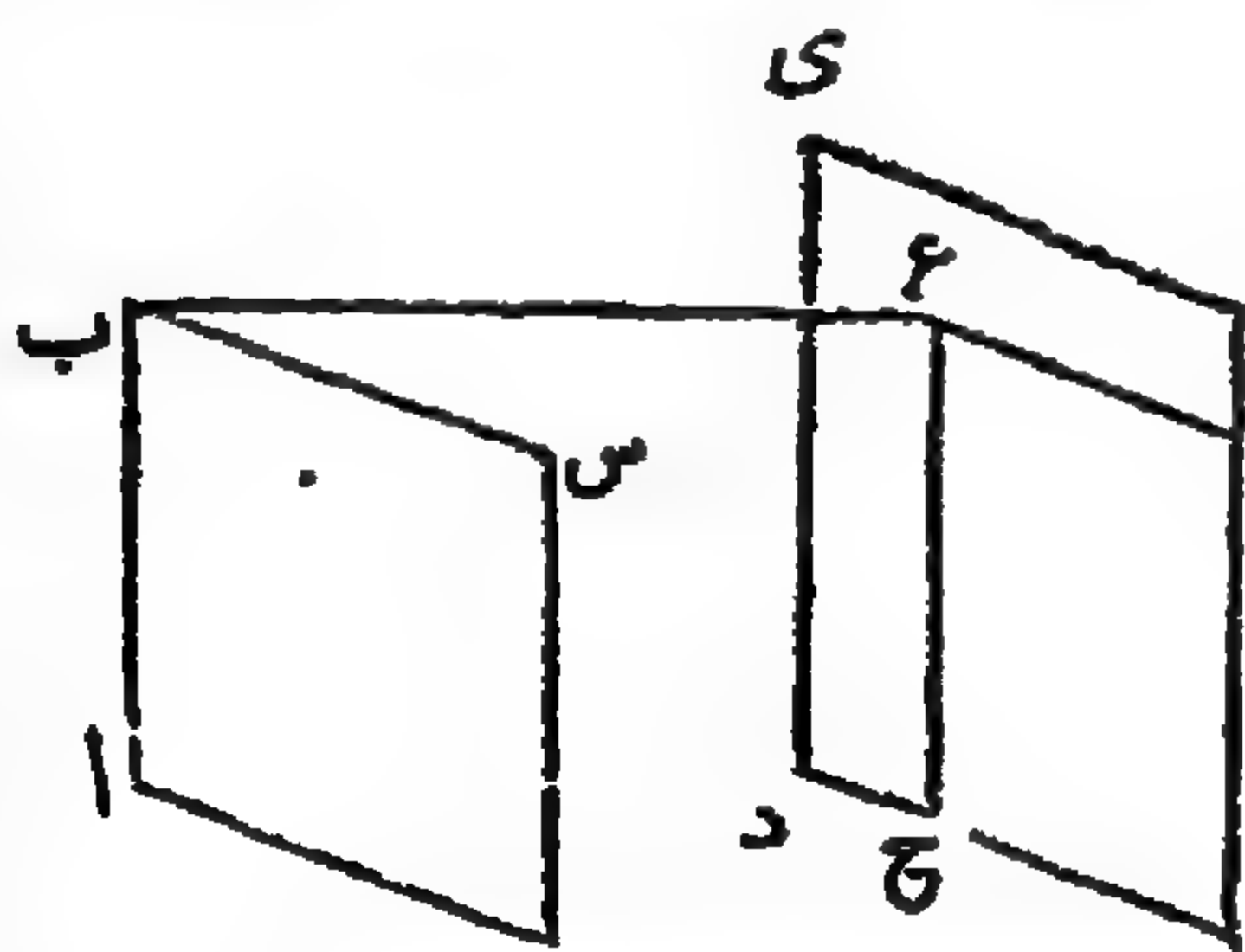


ولا فلا بد من التفاتها اذا أُخرجوا ويكون محل  
تقاطعها خطاً مستقيماً غ ح . خذ في غ ح اية نقطة شئت  
مثل ك وارسم اك ب ك . فلكون اب عموداً على  
السطح ي ف فهو عمود على كل خطٍ مستقيم يلاقيه في ف  
ذلك السطح ( حد ١ ك ٢ مضافات ) فهو عمود على  
ب ك وك ب قائمة . ولهذا السبب ايضاً ب اك قائمة  
ففي المثلث ك اب قائمتان وذاك غير ممكن ( ق ١٧  
ك ١ ) فالسطحان لا يتلاقيان ولو أُخرجاهما متوازيان ( حد ٧ ك ٢ مضافات )

### القضية الثالثة عشرة . ن

اذا كان خطان مستقيمان ملتقيان موازيين لخطين مستقيمين اخرين  
اللذين يلتقيان ايضاً وليسا في سطح الاولين فالسطح المار بالاولين  
يوازي المار بالآخرين

ليكن اب ب س خطين مستقيمين ولتلاقبا في ب وليوازي خطين اخرين  
مستقيمين ليسا في سطحهما د ي ف ي  
اللذين يتلاقيان في ي . فالسطح المار  
بالاولين يوازي المار بالآخرين  
من ب ارسم ب غ عموداً على  
السطح المار بالخطين د ي ي ف



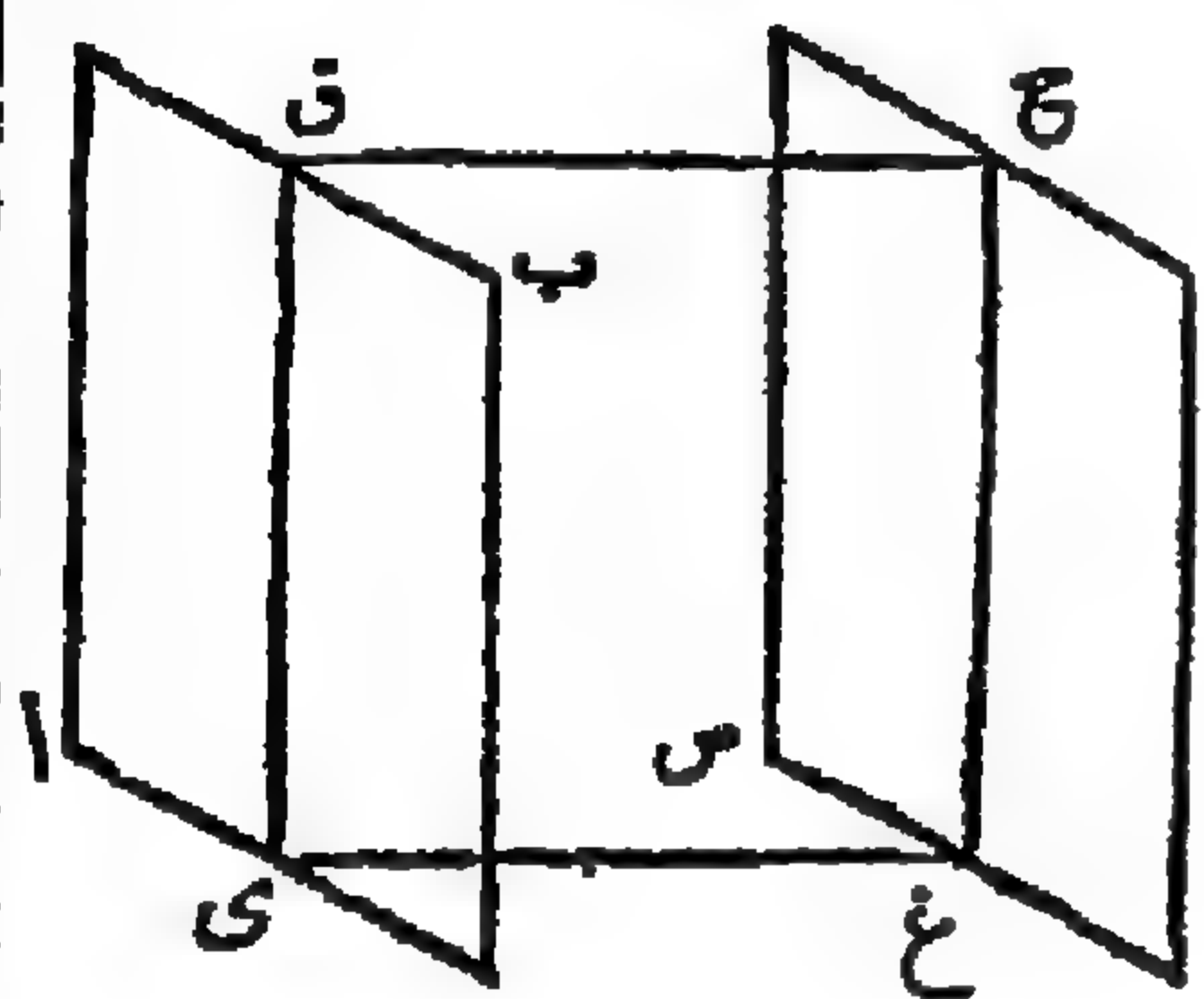
( ق ١٠ ك ٢ مضافات ) ولتلاقه في ع ومن غ ارسم غ ح حتى يوازي د ي ( ق ٢١  
ك ١ ) وغ ك حتى يوازي ف ي . فلكون ب ع عموداً على سطح د ي ي ف فهو عمود  
على كل خطٍ يلاقيه في ذلك السطح ( حد ١ ك ٢ مضافات ) فتكون كل واحدة من  
الزاويتين ك ع ب ح غ ب قائمة . ولكون ب ا يوازي ع ح ( ق ٨ ك ٢ مضافات )  
فالزاويتان ح غ ب ا ب غ معانعدلان قائمتين وح غ ب قائمة فتكون ا ب غ  
ايضاً قائمة وغ ب عمود على ب ا ولهذا السبب ايضاً هو عمود على ب س . فهو عمود



على السطح المائل بها وقد رُسم عموداً على سطح دى ي ف فهو عمود على السطحين  
فهما متوازيان (ق ١٢ ك ٢ مضافات)  
فرع اذا لاقى خطاً مستقيماً سطحين متوازيين وكان عموداً على احدهما فهو عمود  
على الثاني ايضاً

### القضية الرابعة عشرة. ن

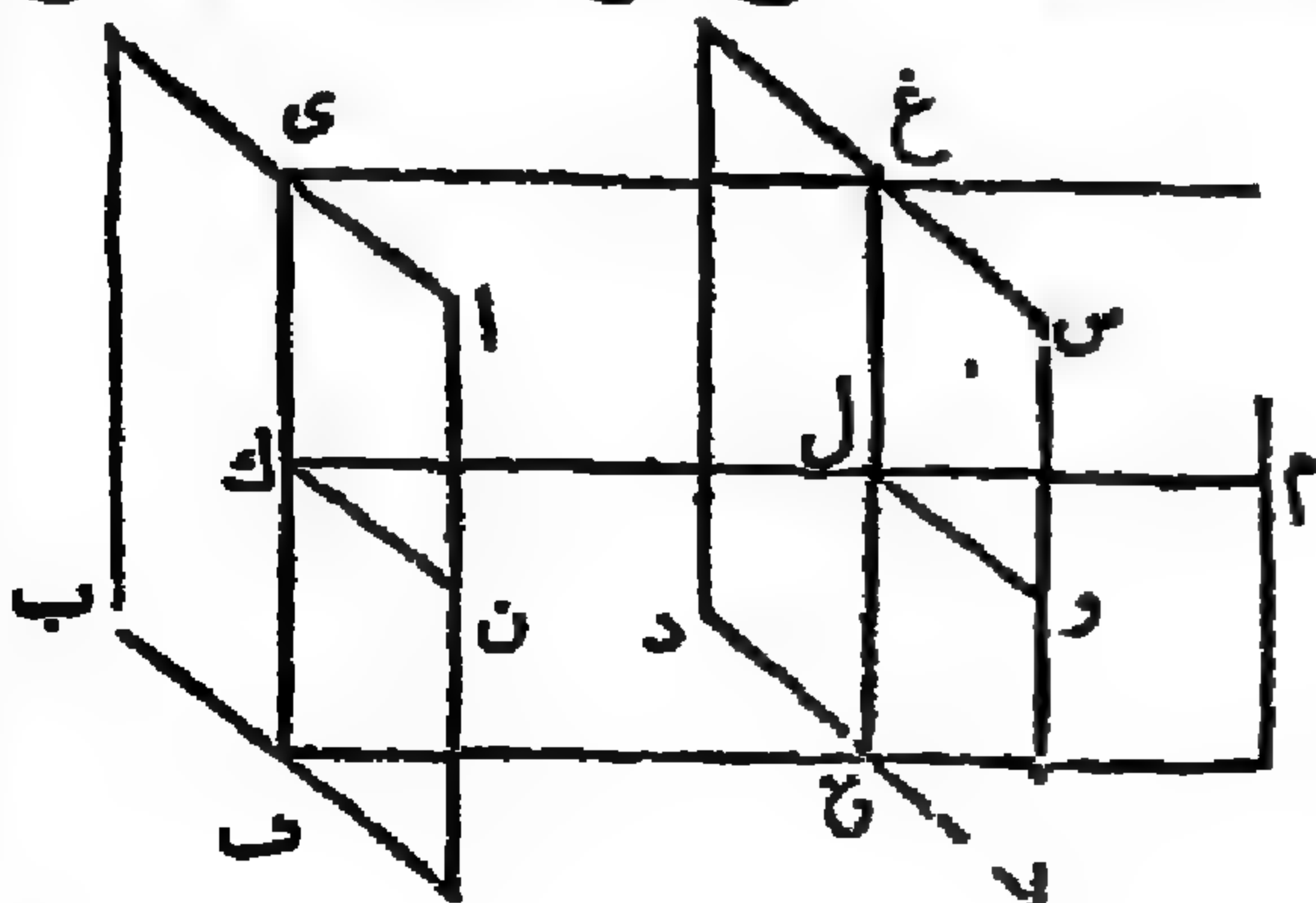
اذا قطع سطح<sup>٢</sup> سطحين متوازيين فخطاً التقاطع متوازيان  
ليكن اب وس د سطحين متوازيين وليقطعها السطح ي ق غ ح فخطاً التقاطع  
ي ق غ ح متوازيان



لأن الخط ي ق في السطح اب د  
والخط غ ح في السطح س د وكل واحد  
يبقى في سطحيهما أُخرج والسطحان  
لا يلتقيان لأنها متوازيان فالخطان  
لا يتلاقيان ولو أُخرجا فهما متوازيان  
(حد ٢٠ ك ١)

### القضية الخامسة عشرة. ن

اذا قطع سطح<sup>٢</sup> سطحين متوازيين فلها ميل واحد على ذلك السطح  
ليكن اب وس د سطحين متوازيين وليقطعها السطح ي ق غ ح فميل اب على ي ح  
هو مثل ميل س د على ي ح

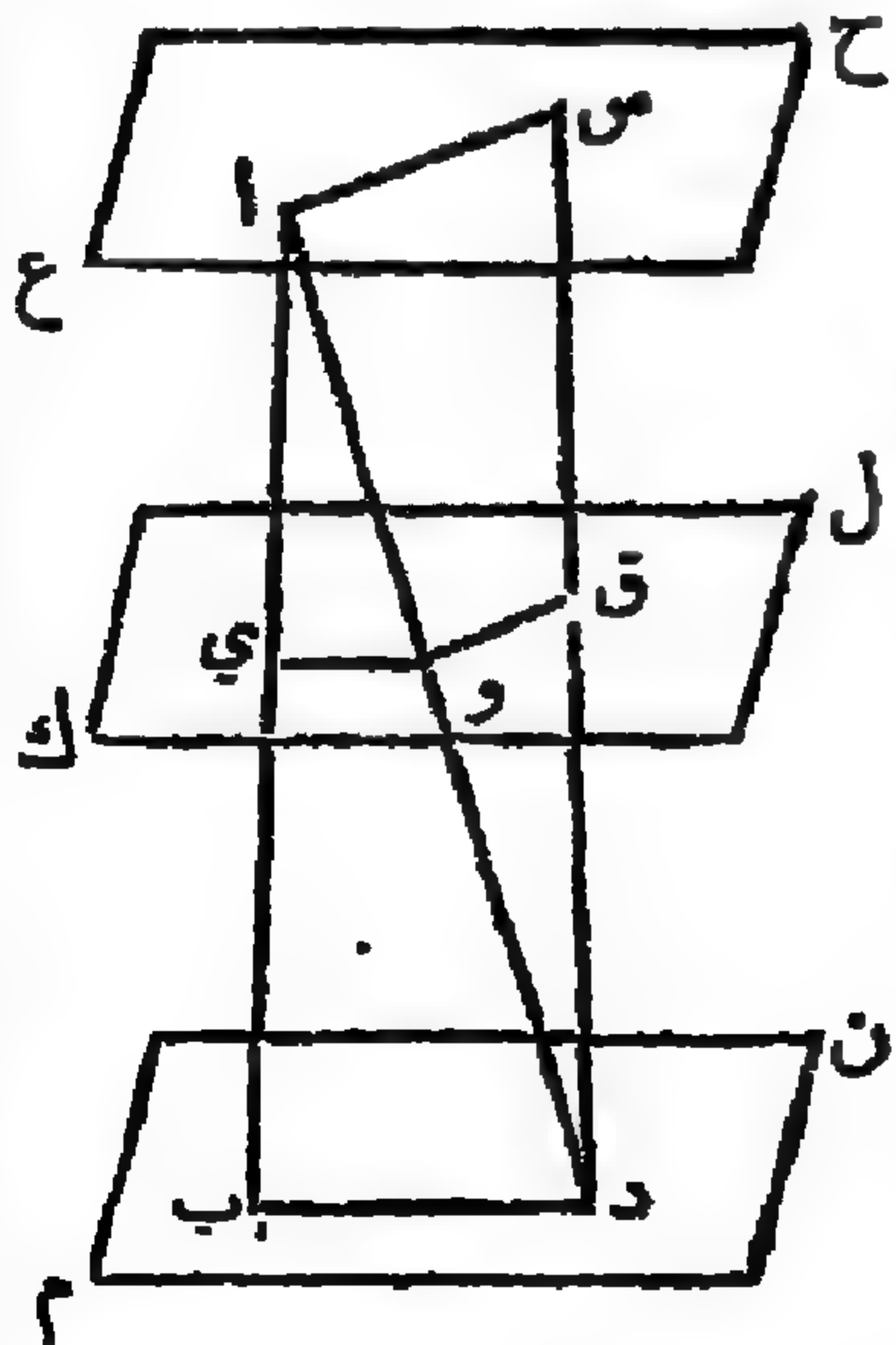


ليكن الخطان المستقيمان  
ي ق و غ ح موضعي التقاطع.  
من أية نقطة شئت في ي ق مثل  
ك ارسم الخط ك م في السطح ي ح  
عموداً على ي ق وليلاقى غ ح في  
ل وارسم كن عموداً على ي ق في السطح اب وليمر سطح بالخطين المستقيمين كن

ك م حتى يقطع السطح س د في الخط ل و. فلكون السطح س د ح بلقي السطحين  
المتوازيين ا ب س د في الخطين س د غ ح فذان الخطان متوازيان (ق ١٤ ك ٢  
مضافات) وى ق انما هو عمود على السطح المار بالخطين ك ن ك م (ق ٤ ك ٢  
مضافات) لانه عمود على ك ن وك م فالخط غ ح ايضا عمود على ذلك السطح  
(ق ٢ ك ٢ مضافات) فهو عمود على الخطين ل م ل و اللذين بلقيانه في ذلك  
السطح. ولان ل م ل و عمودان على ل غ محل تقاطع السطحين س د وى ح  
فالزاوية ول م هي ميل السطح س د على السطح س د ح (ق ٤ ك ٢ مضافات) وهكذا  
ايضا م ك ن هي ميل السطح ا ب على السطح س د ح. ون ك يوازي ول فالزاوية  
الداخلية ن ك م تعدل الخارجية م ل و (ق ٢٩ ك ١) فميل السطح ا ب على س د ح  
يعدل ميل السطح س د على س د ح

### القضية السادسة عشرة. ن

سطوح متوازية اذا قطعت خطين مستقيمين تقطعها على نسبة واحدة  
ليكن غ ح ك ل م ن سطوحا متوازية ولتقطع الخطين المستقيمين ا ب س د  
في النقط اى ب س ق د فنسبة اى :



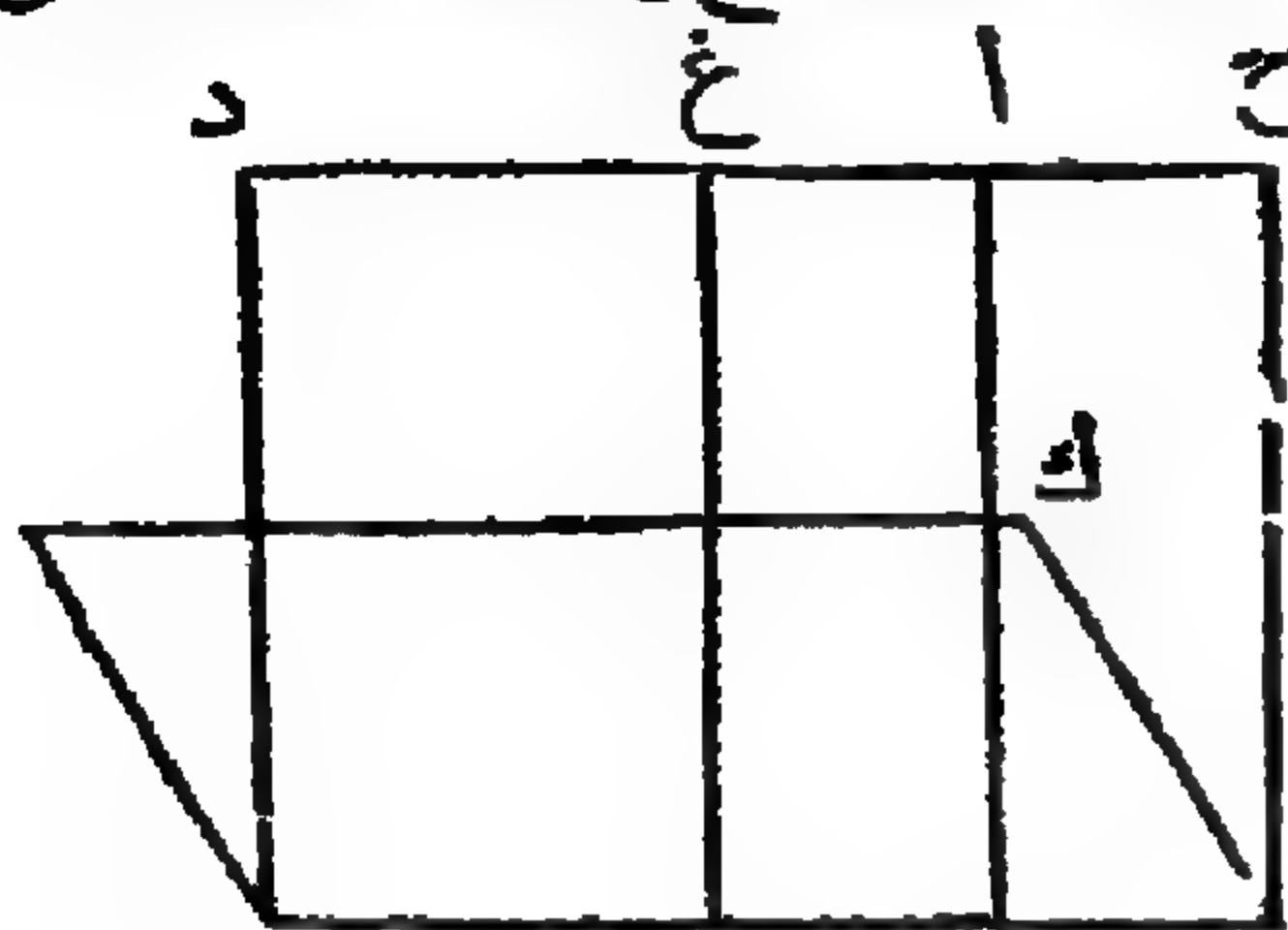
ب : س : ق : ق د  
ارسم اس ب د ا د. ولما ا د فلباق السطح  
ك ل في و. ارسم س د و ق. فلان السطحين  
المتوازيين ك ل م ن قد قطعها السطح س د ب د و  
فخطا التقاطع س د و ب د متوازيان (ق ١٤ ك ٢  
مضافات) وهكذا ايضا يبرهن ان اس و ق  
متوازيان. ولكون س د يوازي ب د ضلعا من  
المثلث ا ب د فنسبة اى : س : ب : ا و د (ق ٢ ك ٦) ولان ق و يوازي س د  
ضلعا من المثلث ا د س فنسبة ا و : د : س : ق : ق د فيالمساواة (ق ١١ ك ٥)  
اى : س : ب : س : ق : ق د

القضية السابعة عشرة. ن

اذا كان خطٌ مستقيمٌ عموداً على سطحٍ فكل سطحٍ ماربذلك الخط

هو عمود على السطح الاول

ليكن الخط المستقيم اب عموداً على السطح س ك فكل سطح يمر بالخط اب هو عمود على السطح س ك



ليمر سطح مثل دى في الخط اب وليكن الخط س ي مثل تقاطع السطح س ك في س ي خذ اية نقطة شئت مثل ف

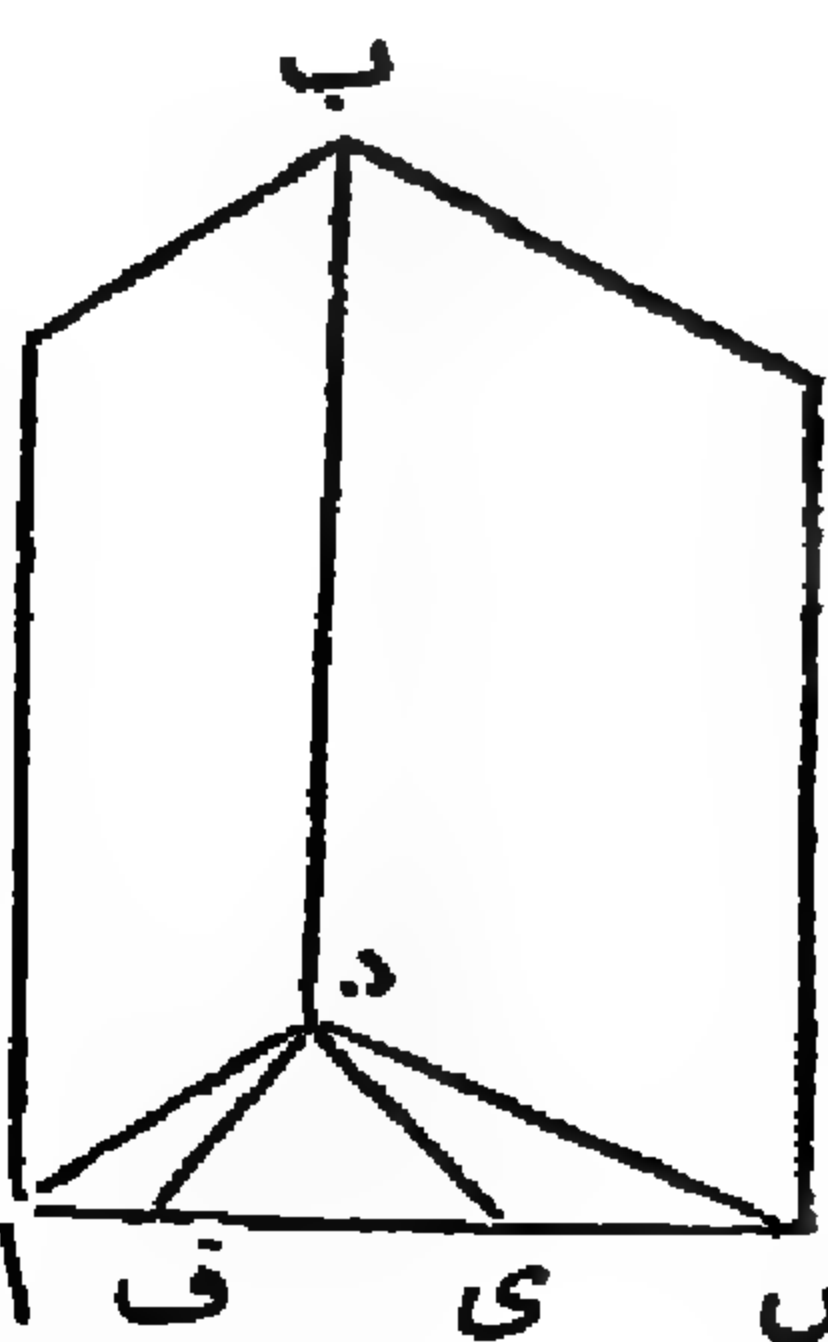
وفي السطح دى ارم ف غ عموداً على س ي. وكون اب عموداً على السطح س ك فهو عمود على كل خط مستقيم يلاقيه في ذلك السطح (حد ا ك ٢ مضافات) فهو عمود على س ي واب ف قائمة وغ ف ب ايضاً قائمة فاذا اب يوازي ع ف (ق ٨ ك ١) واب عمود على السطح س ك فالخط غ ف ايضاً عمود على ذلك السطح (ق ٧ ك ٢ مضافات) واب وغ ف في السطح دى فالسطح دى عمود على السطح س ك (حد ا ك ٢ مضافات) وهكذا يبرهن ان كل السطوح المارة بالخط اب عمودية على س ك

القضية الثامنة عشرة. ن

اذا تقاطع سطحان وكانا عموديين على سطح ثالث فنقط تقاطعها هو

ايضاً عمود على ذلك السطح

ليكن اب وب س سطحين ولينقاطعا في الخط ب د وليكونا عموديين على



السطح ا د س فالخط ب د هو ايضاً عمود على ا د س من د في السطح ا د س ارم دى عموداً على ا د و د ف عموداً على د س. فلكون دى عموداً على د ا خط تقاطع السطحين اب ا د س واب عمود على ا د س فالخط دى عمود على السطح اب (حد ا ك ٢ مضافات) فهو ايضاً عمود على الخط ب د الذي في ذلك



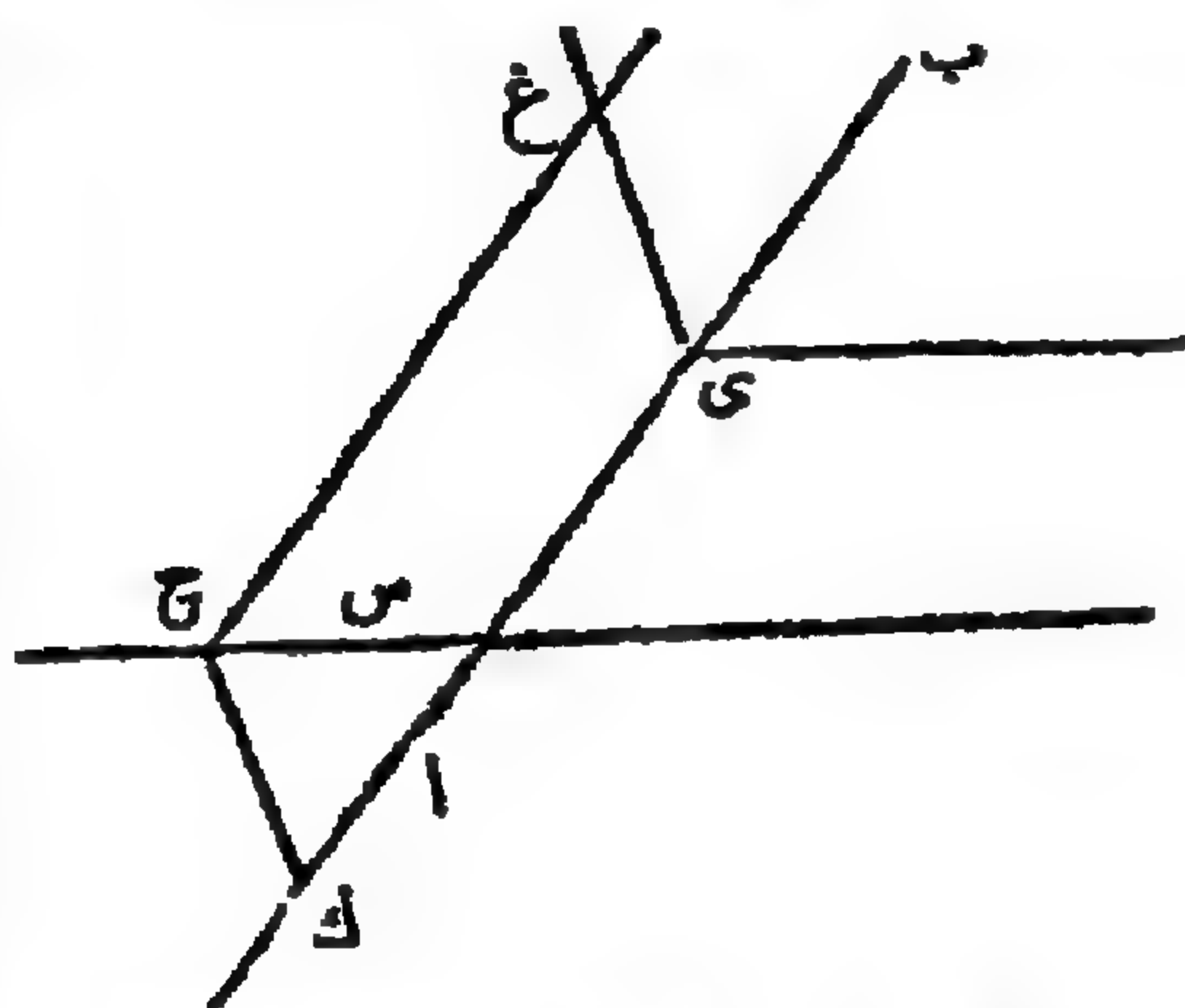
السطح (حدا ك ٢ مضافات) وهكذا ايضا يبرهن ان د ف عمود على د ب فالخط  
د ب عمود على د ي ود ف فهو عمود على سطحها اي على ا د س (ق ٤ ك ٢ مضافات)

### القضية الخامسة عشرة. ع

علينا ان نرسم خطاً عمودياً على خطين مستقيمين مفروضين وضعاً

وليسا في سطح واحد

ليكن ا ب وس د الخطين ولا يكونا في سطح واحد. علينا ان نرسم عموداً عليها



في ا ب خذ نقطة ي ومن

ي ارسم ي ف حتى يوازي س د

ولكن ي غ عموداً على السطح

المائر بالخطين ي ب ي ف

(ق ١٠ ك ٢ مضافات) وليز

السطح غ ك بالخطين ا ب و غ ي

وليلاق س د في ح ومن ح ارسم ح ك عموداً على ا ب فالخط ح ك هو المطلوب.

من ح ارسم ح غ حتى يوازي ا ب

فلكون ح ك و غ ي عمودين على ا ب وهما في سطح واحد فهما متوازيان. ولان

ح غ ح د يوازيان ي ب و ي ف فالسطح غ ح د يوازي السطح ب ي ف (ق ١٢ ك

٢ مضافات) فالخط غ ي العمودي على ب ي ف هو عمود على السطح غ ح د

ايضاً (فرع ق ١٢ ك ٢ مضافات) وح ك يوازي غ ي فهو عمود على السطح غ ح د

(ق ٧ ك ٢ مضافات) فهو عمود على ح د الواقع في ذلك السطح (حدا ك ٢ مضافات)

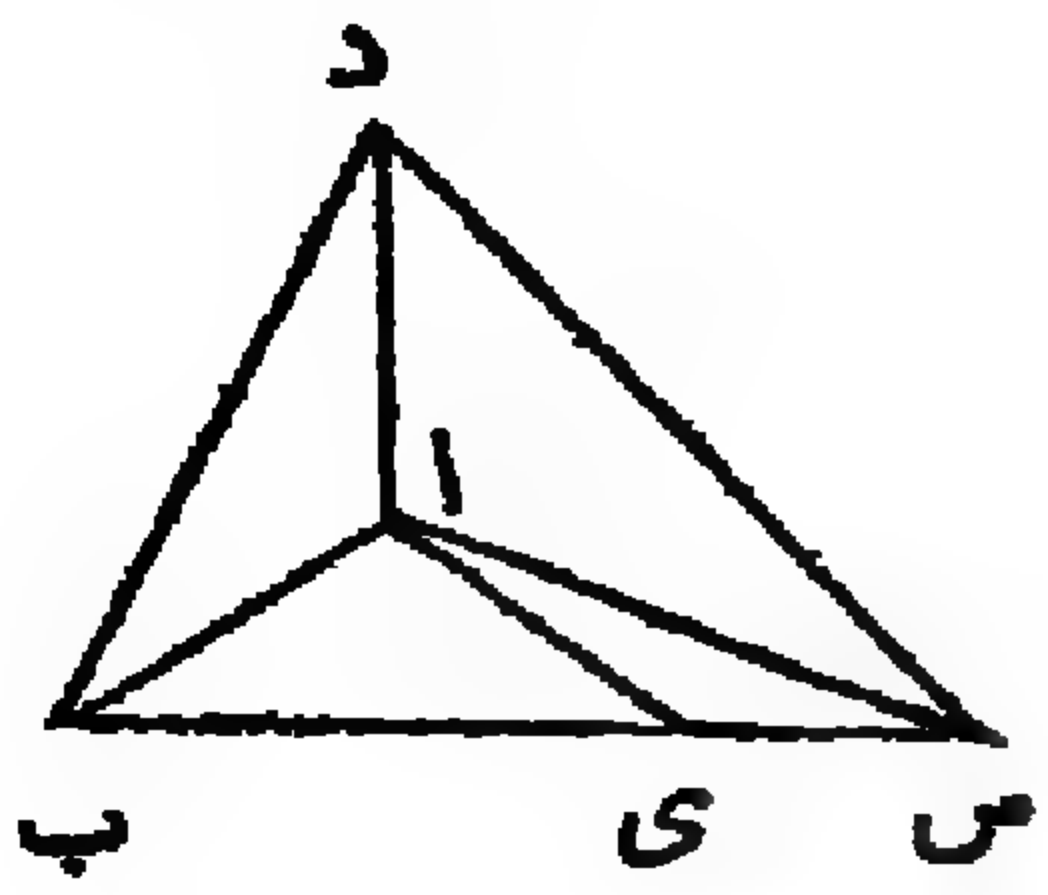
وقد رُسم ح ك عموداً على ا ب فهو عمود على الخطين المفروضين

### القضية العشرون. ن

اذا احاطت ثلاث زوايا بسيطة بزاوية مجسمة فكل اثنتين منها معاً

أكبر من الثالثة

لتنع الزاوية المجسمة ا بين الزوايا الثلاث البسيطة ب ا س ب ا د س ا د



فكل اثنتين منها معاً أكبر من الثالثة

فان كانت هذه الزوايا الثلاث متساوية فالامر واضح ان اثنتين منها معاً أكبر من الثالثة. وان لم تكن متساوية فلتكن ب ا س الزاوية التي ليست اصغر من احدى الاخرين والتي هي أكبر من احدهما اي

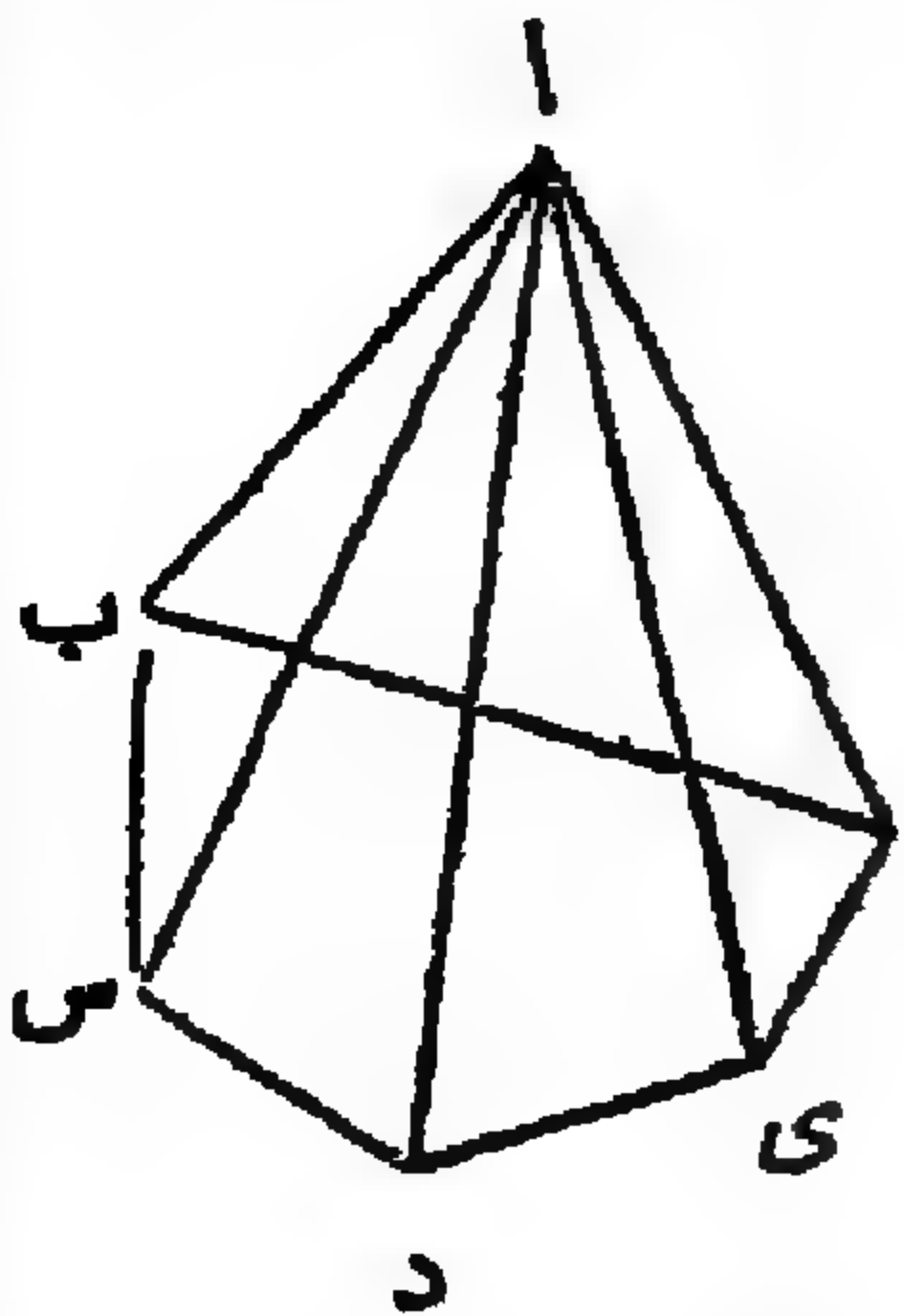
من د ا ب، وعند النقطة ا في الخط المستقيم ا ب وفي السطح المار بالخطين ب ا ا س اجعل الزاوية ب ا ي تعدل الزاوية د ا ب (ق ٢٢ ك ا) واجعل ا ي = ا د وفي النقطة ي ا رسم الخط ب ي س حتى يقطع ا ب و ا س في ب و س وارسم ب د و د س

فلكون د ا = ا ي و ا ب مشتركين المثلثين ب ا د ب ا ي والزاوية ب ا د = ب ا ي فالقاعدة ب د تعدل القاعدة ب ي (ق ٤ ك ا) ولان ب د و د س معاً اطول من ب س (ق ٢٠ ك ا) وقد تبهر ان احدهما ب د = ب ي الذي هو جزء من ب س فالآخر د س هو اطول من الباقي ي س. ولان د ا = ا ي و ا س مشتركين المثلثين والقاعدة د س اطول من القاعدة ي س فالزاوية د ا س هي أكبر من الزاوية ي ا س (ق ٢٥ ك ا) وقد جعلت الزاوية د ا ب = ب ا ي فالزاويتان د ا ب د ا س معاً أكبر من ب ا ي ا س او من ب ا س. وقد قُرض ان ب ا س ليست اصغر من احدى الزاويتين ب ا د د ا س فتكون ب ا س مع احدى الاخرين أكبر من الثالثة

### القضية الحادية والعشرون . ن

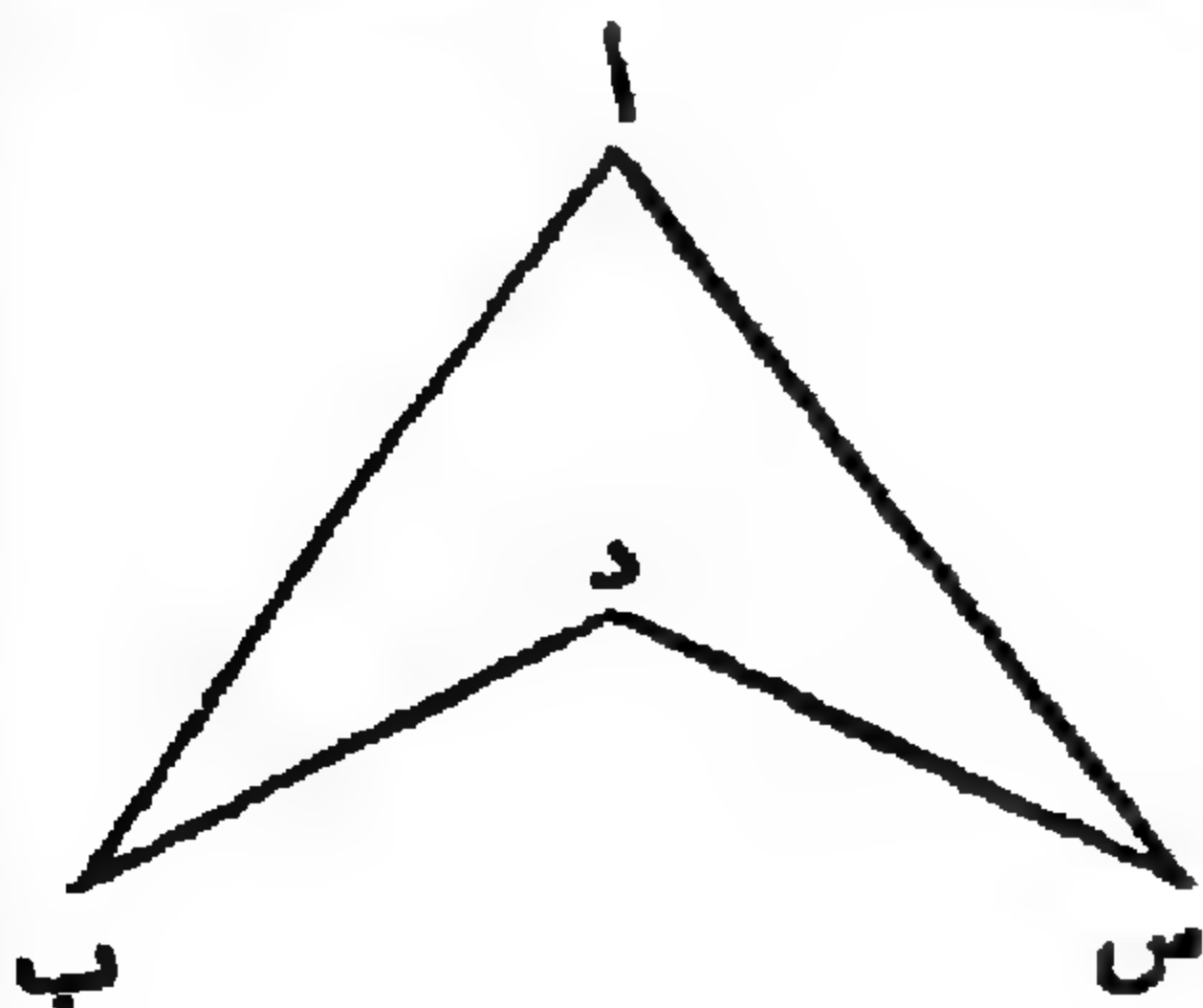
الزوايا البسيطة المحيطة بزاوية مجسمة هي معاً اصغر من اربع زوايا قائمة.

لكن ا زاوية مجسمة ولتخط بها زوايا بسيطة ب ا س ا د ا ي ا ف



ف ا ب في معاً اصغر من اربع زوايا قائمة  
لتنقطع السطوح المحيطة بالزاوية المجتمعة ا  
بسطح آخر وليكن محل التقاطع الشكل ذا الاضلاع  
المستقيمة ب س د ي ف. فالزاوية المجتمعة عند ب  
تحيط بها ثلاث زوايا بسيطة س ب ا ا ب ف  
ف ب س وكل اثنين منها اكبر من الثالثة

(ق ٢٠ ك ٢ مضافات) فالزاويتان س ب ا ا ب ف معاً اكبر من ف ب س.  
ولهذا السبب ايضاً الزاويتان البسيطتان عند كل واحدة من النقط س د ي ف  
وهي التي عند قواعد المثلثات المتلاقية في اها اكبر من الثالثة عند تلك النقط.  
فجميع الزوايا عند قواعد المثلثات هي معاً اكبر من جميع زوايا الشكل. وجميع زوايا  
المثلثات معاً تعدل من الزوايا القائمة مضاعف عدة المثلثات (ق ٢٢ ك ١) او مضاعف  
اضلاع الشكل ب س د ي ف وجميع زوايا الشكل مع اربع زوايا قائمة تعدل من  
الزوايا القائمة مضاعف عدة اضلاع الشكل (فرع اول ق ٢٢ ك ١) فجميع زوايا  
المثلثات تعدل جميع زوايا الشكل مع اربع زوايا قائمة. ولكن جميع الزوايا عند  
قواعد المثلثات اكبر من جميع زوايا الشكل كما قد تبين من الزوايا الباقية من المثلثات  
اي التي عند مجتمع المثلثات المحيطة بالزاوية المجتمعة ا هي اصغر من اربع زوايا قائمة  
تعليقة. اذا كانت احدى زوايا الشكل ب س د ي ف خارجة كالزاوية عند د  
لا تصح هذه القضية لان الزوايا المجتمعات عند القاعدة غير محاطة كلها بالزوايا البسيطة



التي اثنان منها في السطوح المثلثة المجتمعة  
عند ا والثالثة زاوية داخلية من الشكل  
المذكور. فلا يقال ان مجتمع الزوايا عند  
قواعد المثلثات هو ضرورة اكبر من مجتمع  
زوايا الشكل ب س د ي ف



# اصول الهندسة مضافات

## الكتاب الثالث

في مقايسة الاجسام

### حدود

- ١ الجسم هو ما كان له طول وعرض وعمق
- ٢ والاجسام المتشابهة هي التي تحيط بها علة واحدة من سطوح متشابهة شكلاً ووضعاً لها ميل واحد بعضها على بعض
- ٣ الهرم جسم يحيط به سطوح متلاقية في نقطة واحدة وتلك السطوح هي بين هذه النقطة وسطح اخر
- ٤ المشور ويقال له المشور جسم يحيط به سطوح منها سطحان متقابلان متساويان متشابهان ومتوازيان والبقية ذات اضلاع متوازية
- ٥ المتوازي السطوح هو جسم يحيط به ستة سطوح كل واحد منها ذواربعة اضلاع وكل اثنين منها متقابلان
- ٦ المكعب جسم يحيط به ست مربعات متساوية
- ٧ الكرة جسم يرسم بدوران نصف دائرة على قطر ثابت
- ٨ محور الكرة ويقال له الجزء او الجزع هو الخط الثابت الذي دار عليه نصف الدائرة
- ٩ مركز الكرة هو مركز نصف الدائرة الذي رسمت الكرة بدورانه
- ١٠ قطر الكرة هو خط مستقيم يمر بمركزها وينتهي طرفاه في سطحها

١١ المخروط هو جسم بُرِّمَ بدوران مثلث ذي قامة على أحد ضلعيه المحيطين بالقامة

١٢ محور المخروط أو جزعته هو الضلع الثابت من المثلث الذي رُسم المخروط بدورانه

١٣ قاعدة المخروط هي الدائرة المرسومة بالضلع الدائر الذي يلي القامة من المثلث الذي بدورانه رُسم المخروط

١٤ الاسطوانة جسم مرسوم (بدوران) شكل ذي اضلاع متوازية وزوايا قامة على أحد اضلاعه

١٥ سم الاسطوانة أو محورها هو الضلع الثابت من الشكل الذي رُسمت الاسطوانة بدورانه

١٦ قاعدتا الاسطوانة هما الدائرتان المحادستان من دوران الضلعين المتقابلين من الشكل الذي بدورانه رُسمت الاسطوانة

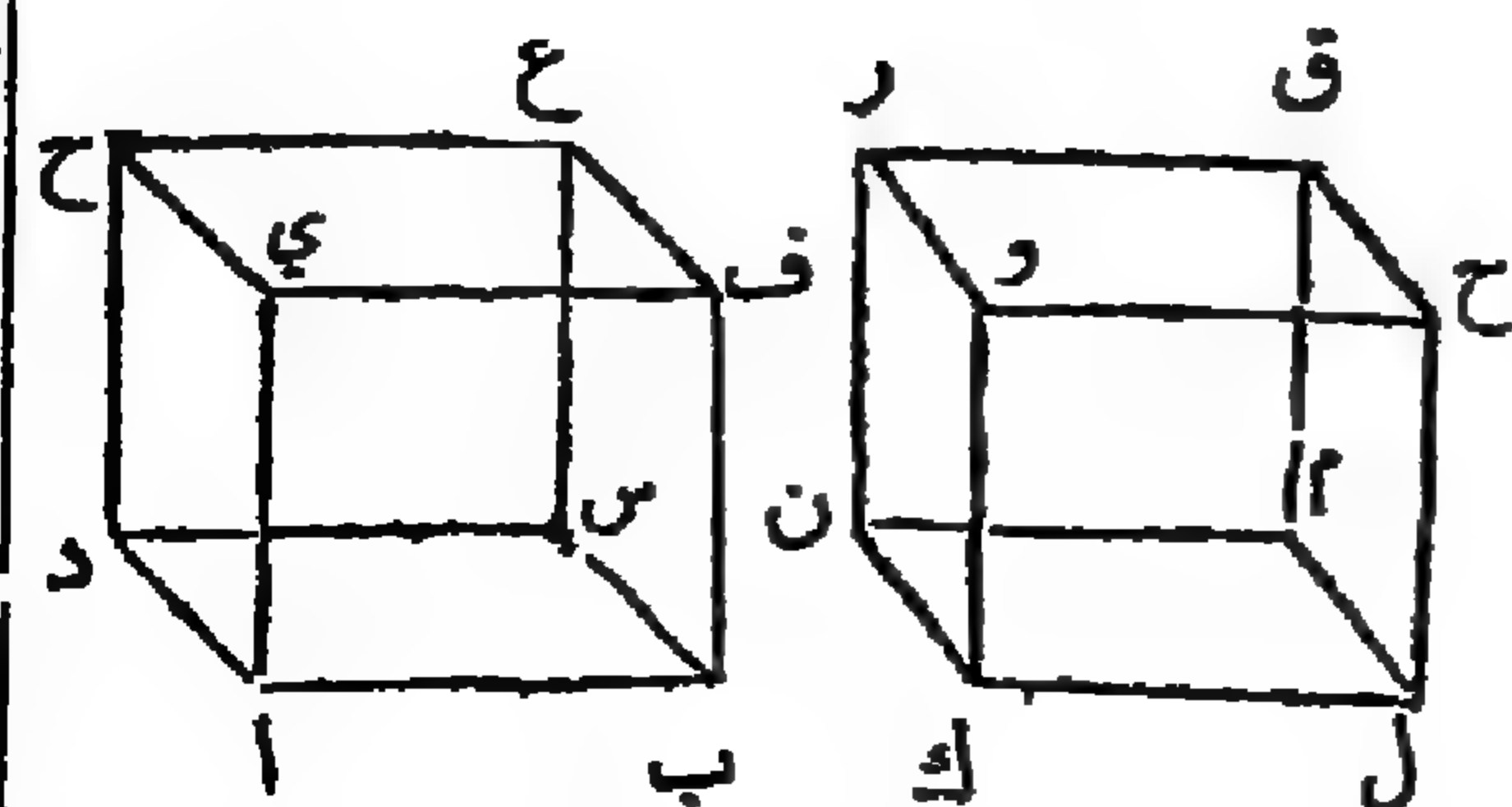
١٧ المخاريط المتشابهة والاساطين المتشابهة هي التي تكون مهامها واقطار قواعدها متناسبة

### الفصل الاول

إذا أُحيط جسمان بعدة متائلة من السطوح المتساوية المتشابهة شكلاً ووضعاً وكان ميل السطحين المتواليين في الجسم الواحد مثل ميل نظيرهما في الآخر فالجسمان متساويان ومتشابهان

ليكن اغ وك ق جسمين محيطين بعدة متائلة من السطوح المتساوية المتشابهة

شكلاً ووضعاً أي السطح اس يشبه السطح كم ويعدله واف يشبه ك ج ويعدله وهكذا في البقية وليكن ميل اف على اس مثل ميل ك ج على كم

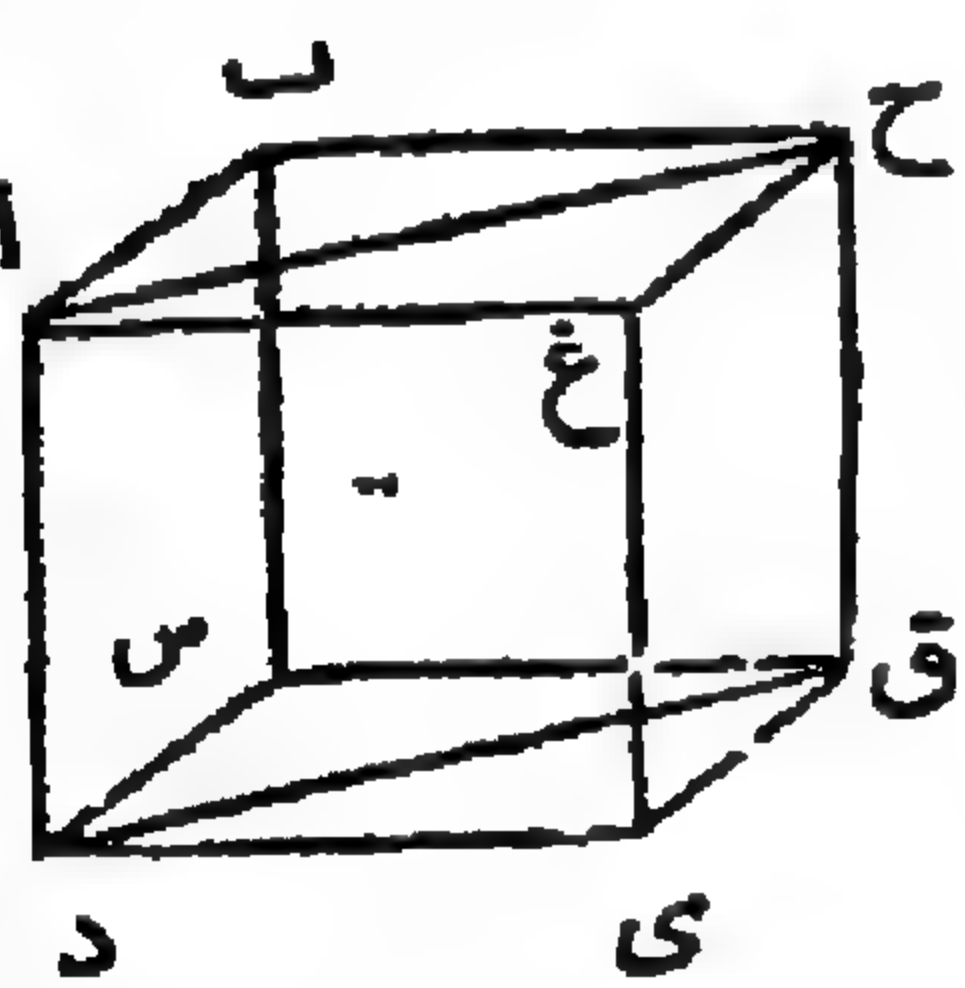


وهكذا في البقية فالجسم ك ق يعدل الجسم ا غ وبشبهه  
ليوضع الجسم ك ق حتى تطبق قاعدته ك م على اس قاعدة الجسم ا غ اي حتى  
تقع ن على د وك على ا وم على س ول على ب اذ القاعدتان متساويتان ومتشابهتان  
(اولية ثامنة ك ا). فلكون السطح ك م يطابق السطح اس وبالمفروض ميل ك ر على  
ك م مثل ميل ا ح على اس فالسطح ك ر يطابق السطح ا ح لانها متساويتان ومتشابهتان  
(اولية ثامنة ك ا) وضلعاهما المتساويتان ك ن و ا د متطابقتان. وهكذا يبرهن في بقية  
سطوح الجسمين ان كل واحد يطابق نظيره فالجسمان متطابقتان كلياً فهما متساويتان  
ومتشابهتان

### القضية الثانية. ن

اذا أُحيط جسمٌ بستةً سطوح كل اثنين منها متوازيان فالسطوح  
المتقابلة هي اشكال متوازية الاضلاع متشابهة ومتساوية

ليكن س د ع ح جسماً احاط به السطوح المتوازية اس غ ق وب غ س ي  
وق ب ي ا فالسطوح المتقابلة هي متواربة الاضلاع  
متشابهة ومتساوية



لان السطح اس يقطع السطحين المتوازيين ب ع  
وس ي فخطاً التقاطع ا ب ود س متوازيان (ق ١٤)  
ك ٢ مضافات) ولان السطح اس يقطع السطحين

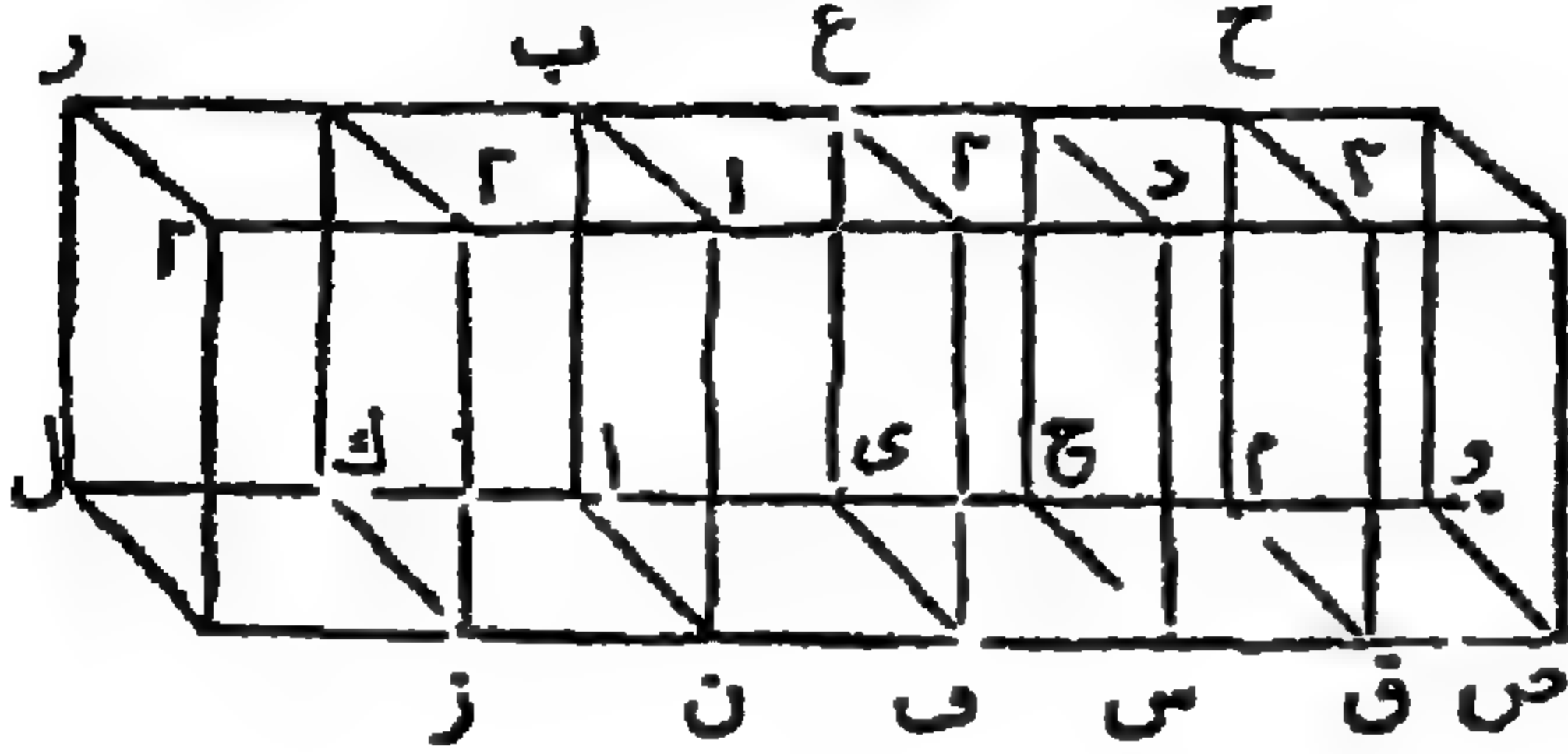
المتوازيين ب ق و ا ي فخطاً التقاطع ب س و ا د متوازيان و ا ب يوازي س د كما  
تقدم فالشكل ا ب س د متوازي الاضلاع وهكذا يبرهن في بقية السطوح انها  
متواربة الاضلاع. ارم ا ح ود ق. فلكون ا ب يوازي د س وب ح يوازي س ق  
فالخطان المتلاقيان ا ب ب ح يوازيان المتلاقيين د س س ق. فالزاوية ا ب ح =  
د س ق (ق ٩ ك ٢ مضافات) ولكون ا ب ب ح بعدلان د س س ق والزاوية  
ا ب ح = د س ق فالقاعدة ا ح = د ق (ق ٤ ك ١) والمثلث ا ب ح = المثلث د س ق.  
ولهذا ا ب ا ح = د س ق. فالتشكل ب ع = س ي وهكذا يبرهن ان اس =



القضية الثالثة. ن

جسم متوازي السطوح اذا قُطِعَ بسطح يوازي سطحيين متوازيين من سطوحه ينقسم الى جسمين نسبة بعضها الى بعض كسبة قاعدتيهما بعضها الى بعض

ليكن ا ب س د جسمًا متوازي السطوح وليقطع السطح ف ع الموازي السطحيين



المتقابلين ن ب ح د  
فينقسم الجسم الى  
جسمين ن ب ف ع  
و غ ف ح د حتى  
تكون نسبة ن ب ف غ

الى غ ف ح د كسبة القاعدة اى ف ن الى القاعدة ي ح س ف

اخرج ا ح الى الجهتين وخذ ح م و م وحتى يعدل اى ح و خذاك كل حتى  
يعدلاى و تم الاشكال المتوالية الاضلاع ل ز ك ن ح ق م ص والاجسام ل ٢  
ك ا ح ٢ م ت. المخطوط ل ك ا اى متساوية والمخطوط ل ز ا ن ي ف  
متساوية وهي تحدث زوايا متساوية مع ل ك ا و اى فالاشكال المتوالية الاضلاع  
ل ز ك ن ا ف متساوية ومتشابهة (ق ٢٦ ك ا و حداك ٦) وهكذا الاشكال  
ك ر ك ب ا غ وايضا الاشكال ل ٢ ك ١ ٢ (ق ٢ ك ٢ مضافات) لانها  
سطوح متقابلة. وهكذا يبرهن ان الاشكال ي س ح ق م ص متساوية  
(ق ٢٦ ك ا حداك ٦) وايضا الاشكال ح غ ح ج ج و وايضا ح د م ٢ ت و  
(ق ٢ ك ٢ مضافات) فثلاثة سطوح من الجسم ل ٢ تعدل ونسه ثلثة سطوح  
من الجسم ك ا و ثلاثة سطوح من الجسم ا ٢ والثلاثة التي تقابلها في الاجسام  
الثلاثة هي متساوية ومتشابهة (ق ٢ ك ٢ مضافات) فالاجسام ل ٢ ك ا ١ ٢  
تحيط بها سطوح متساوية ومتشابهة. ولكون السطوح ل ٢ ك ١ ٢ متوازية  
ويقطعها السطح ر ٢ يكون ميل ل ٢ على ر ٢ مثل ميل ك ٢ على ٢ ب او ميل ا ١  
على ب ٢ (ق ١٥ ك ٢ مضافات) وهكذا يقال في بقية السطوح المتوالية. فالاجسام

ل ٢ ك ١ ا في متساوية (ق ١ ك ٢ مضافات). وهكذا يبرهن ان الاجسام  
 ي د ح ٢ م ت متساوية فكما تتكرر ا ف في ل ف هكذا يتكرر الجسم ا ٢ في الجسم  
 ل ٢ وكذلك كما تتكرر ف ح في ف وهكذا يتكرر الجسم ي د في الجسم ي ت وإذا  
 كانت القاعدة ل ف تعدل القاعدة ف و فلجسم ل ٢ يعدل الجسم ي ق (ق ١  
 ك ٢ مضافات) وان كانت اكبر فاكثر وان كانت اصغر فاصغر فالقاعدة ا ف:  
 القاعدة ف ح :: الجسم ا ٢: الجسم ي د (حد ٥ ك ٥)  
 فرع. لان الشكل المتوازي الاضلاع ا ف: ف ح :: ن ف: ف س (ق ١ ك ٦)  
 فالجسم ا ٢: الجسم ي د :: ن ف: ف س

### القضية الرابعة ن

جسم متوازي السطوح اذا قطعه سطح مائل بقطري السطحين  
 المتقابلين ينقسم الى موشورين متساويين

ليكن ا ب ج ه متوازي السطوح وليقطع بالسطح س ق ي د المائل بقطري  
 السطحين المتقابلين غ ب و ا ح فانه ينقسم الى  
 موشورين متساويين. لان س د يوازي غ ا و ق ي  
 يوازي ع ا وهو ليس في سطحه فالحيطان س د ق ي  
 متوازيان (ق ١ ك ٢ مضافات) فالقطران س ق  
 د ي هما في سطح س د وق ي فهما متوازيان (ق ١ ك ٤  
 ك ٢ مضافات) وللتثلث س ب ق = س غ ق

(ق ١ ك ٢٤) ود ح ي = د ا ي والشكل س ا يعدل الشكل المقابل له ب ي  
 (ق ٢ ك ٢ مضافات) و غ ي = س ح فالسطوح المحيطة بالموشورين س ا ي  
 س ب ي متساوية ومتشابهة كل واحد بنظيره وهي على ميل واحد بعضها على  
 بعض لان السطح ا س يوازي السطح ي ب و ا ق يوازي س ح ونقطعها السطح س ي  
 (ق ١ ك ٢ مضافات) فالموشور س ا ي = س ب ي (ق ١ ك ٢ مضافات)

نبيه. في القضايا الآتية يراد بالمحطوط الواقعة اضلاع الاشكال الواقعة بين

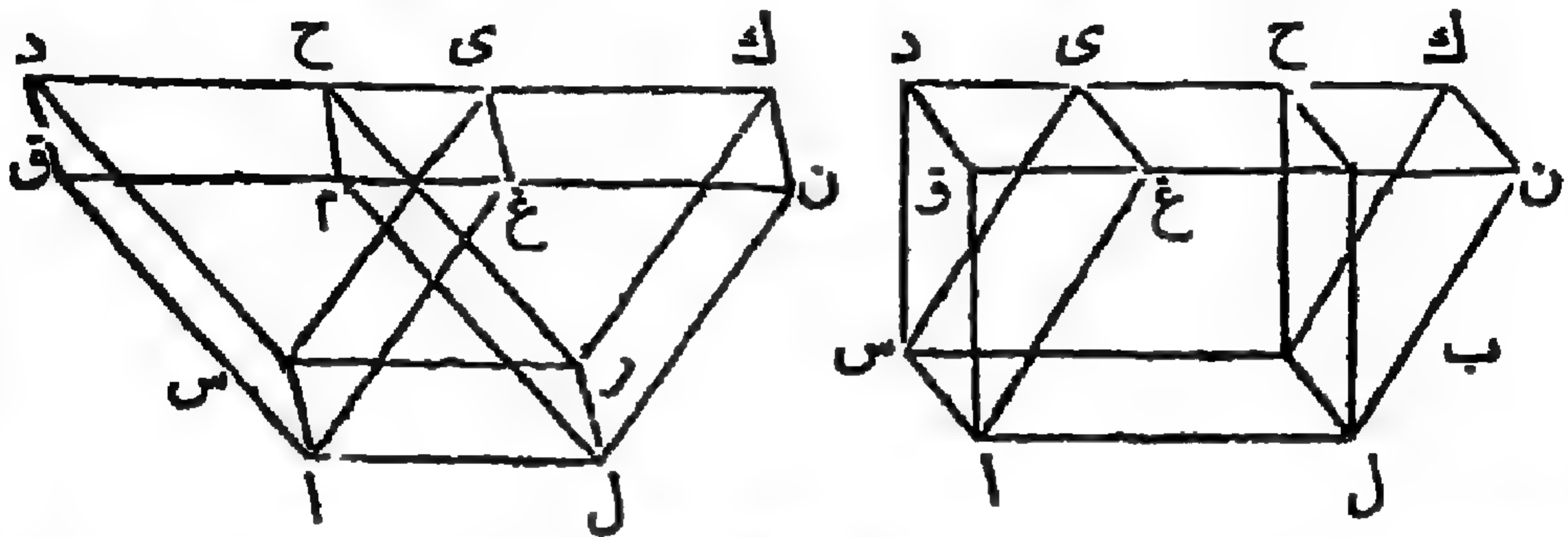
قاعدتي الجسم والسطح الذي يقابلها



القضية الخامسة. ن

لجسام متوازية السطوح على قاعدة واحدة وعلى علو واحد هي متساوية  
إذا انتهت خطوطها الواقعة إلى خط مستقيم واحد في السطح الذي  
يقابل القاعدة

ليكن اح اك جسمين على قاعدة واحدة اب وعلى علو واحد وخطوطها



الواقعة اق اغ ل م ل ن منتهية إلى خط واحد ق ن والخطوط س د س ي  
ب ح ب ك منتهية إلى خط واحد د ك فالجسمان متساويان  
لأن س ح س ك متوازي الاضلاع فالضلع س ب يعدل كل واحد من  
الضلعين المتقابلين د ح وى ك (ق ٢٤ ك ١) د ح = ي ك فان اضيف اليها الجزء  
المشترك ح ي او طرح منها فالجمع او الباقي دى = المجتمع او الباقي ك ح والثلث  
س دى = ب ح ك (ق ٢٨ ك ١) والشكل د غ = الشكل ح ن (ق ٢٦ ك ١) ولهذا  
السبب اق غ = ل م ن وس ق = ب م (ق ٢ ك ٢ م) وس غ = ب ن لانها سطوح  
متقابلة فالسطوح المحيطة بالمشور دا غ اما تعدل وتنبه السطوح المحيطة بالمشور  
ح ل ن كل واحد يعدل وبشبه نظيرة والسطوح المتوالية هي على ميل واحد بعضها  
على بعض (ق ١٥ ك ٢ م) فالمشوران دا غ ح ل ن متساويان (ق ١ ك ٢ م)  
فان طرح المشور ل ن ح من الجسم الذي قاعدته الشكل اب وق د ك ن السطح  
المقابل لها وطرح منه ايضا المشور دا غ د فالجسم الباقي اي المتواري السطوح اح  
يعدل الباقي اك



## القضية السادسة من

اجسام متوازية السطوح على قاعدة واحدة وعلى علو واحد هي متساوية  
وان لم تنته خطوطها الواقعة في خط واحد في السطح المقابل القاعدة  
ليكن الجسمان المتوازيان السطوح س م و س ف على قاعدة واحدة ا ب وعلى علو

واحد وخطوطها الواقعة اق

اغ لم لف سد سی

ب ح ب ك غير منتهية الى

خط واحد كما في النضية

## السابقة فالجبران م م م ف

## متساویان

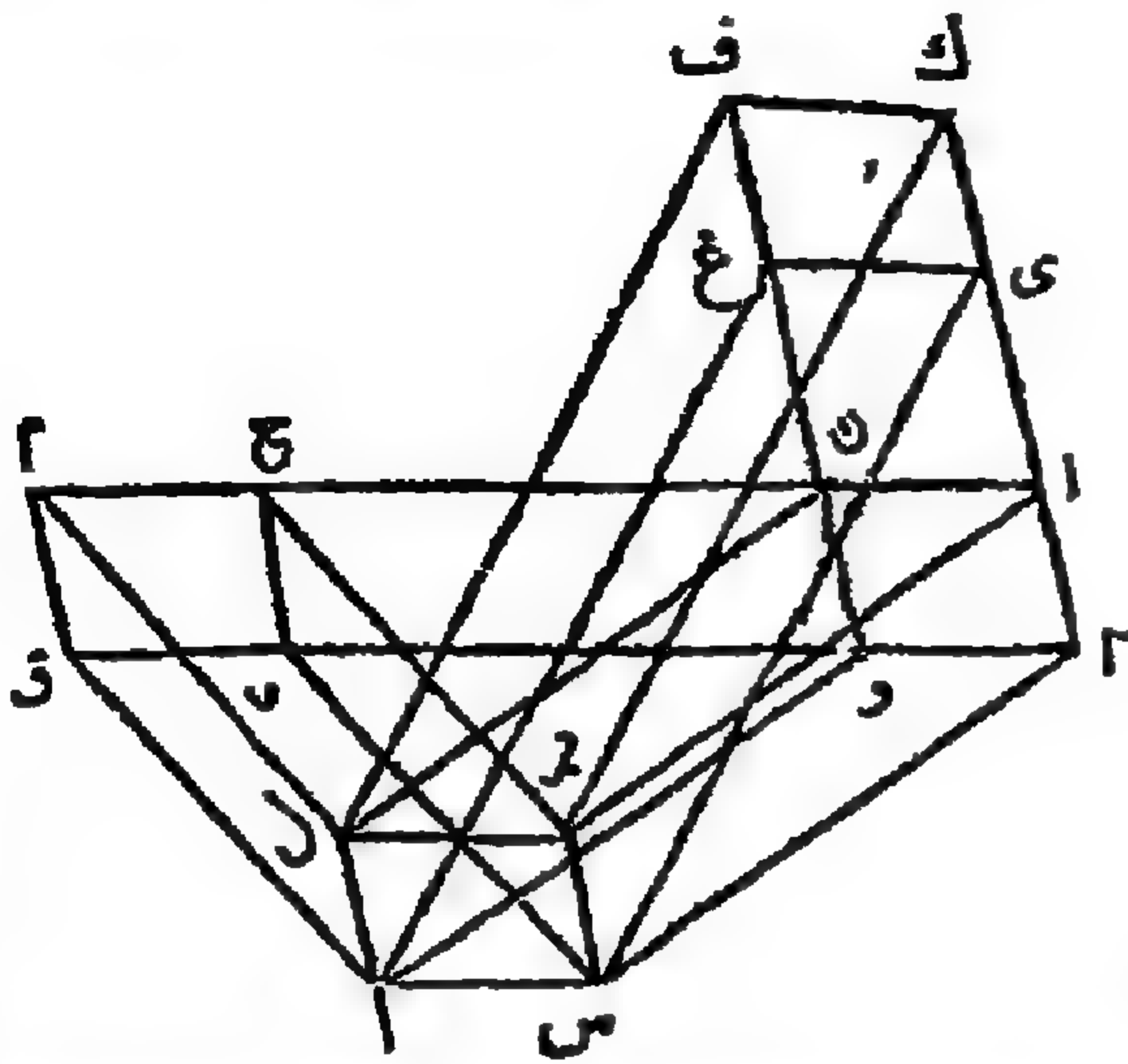
لانها على علو واحد

فالسلم حق والسلم كغني

سطح واحد وإذا أخرج السطح ح ق والسطح ك غ تقاطع اضلاعها. فليخرجوا وليتقاطعا

في ان ٢ و. فالجسم س ف = س ن (ق ٥ ك ٢ مضافات) والجسم س ق = س ن

(ق ٥ ك ٢ مضافات) فالجسم س ف = س م (اولية اك ا)



## القضية السابعة.ن

اجسام متوازية السطوح على قواعد متساوية وعلى علو واحد هي

## متساوية

ليكن الجسمان المتوازيان السطوح  $S$  و  $F$  على علو واحد وعلى قاعدتين

## متساویتیں حل وس د فہا

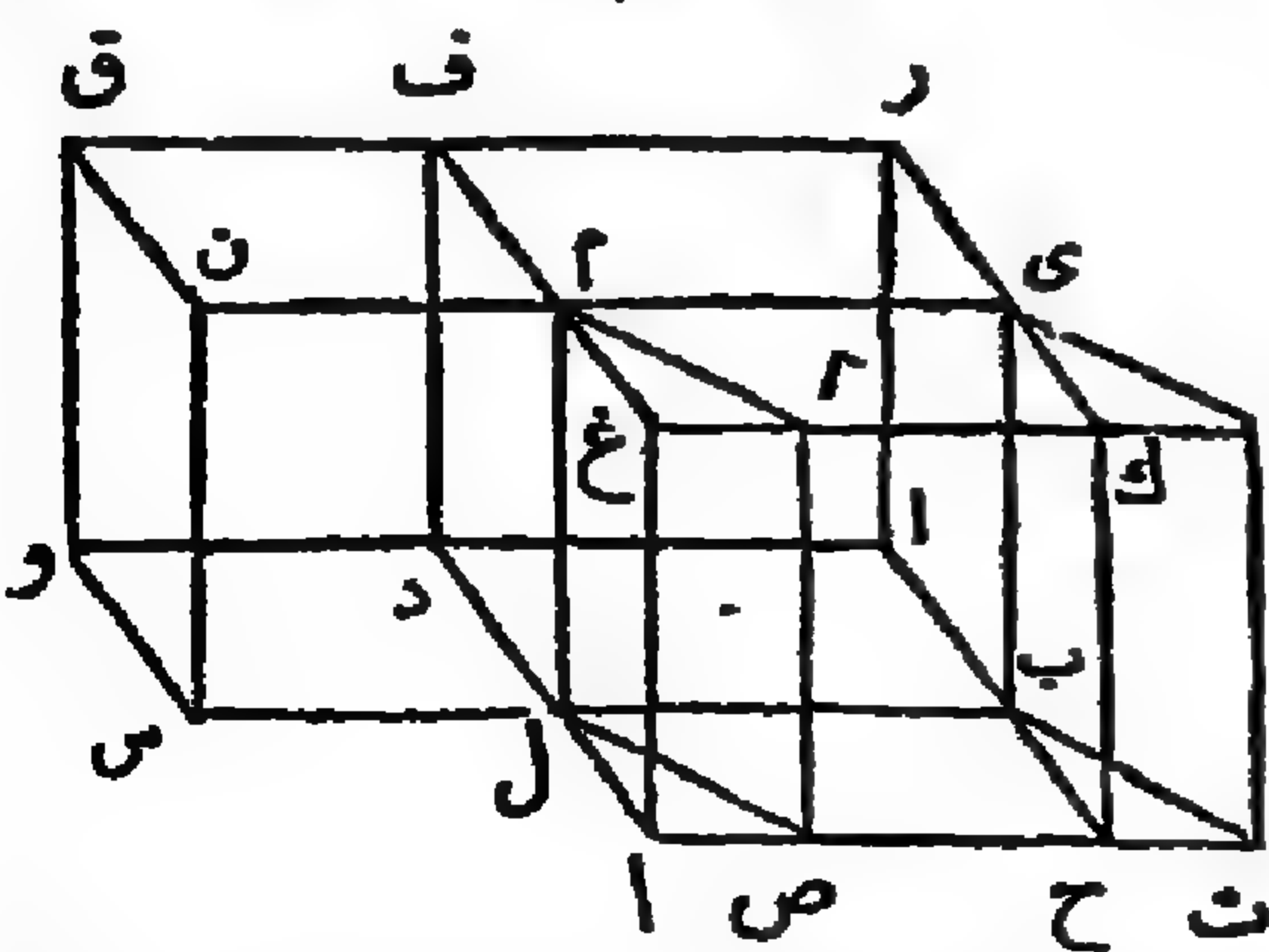
## متساویان

ليوضع الجسمان حتى تكون ج

القاعدتان في سطح واحد.

فلكونها على علو واحد يكون

## السطحان المقابلان القاعدتين



ن ف غ ي ايضا في سطح واحد ولتخرج السطوح حتى يصطنع السطحان م ر وب د  
وتم الجسم ل ر فهو يعدل الجسم م ف (ق ١ ك ٢ م) وهو ايضا يعدل اى ف الجسم  
اى يعدل الجسم م ف (اولية ا ك ١)



### القضية الثامنة. ن

اجسام متوازية السطوح اذا كانت على علو واحد تكون نسبة بعضها  
الى بعض كنسبة قواعدها بعضها الى بعض

ليكن ا ب و س د جسمين متوازي السطوح وعلى علو واحد فنسبة ا ب :

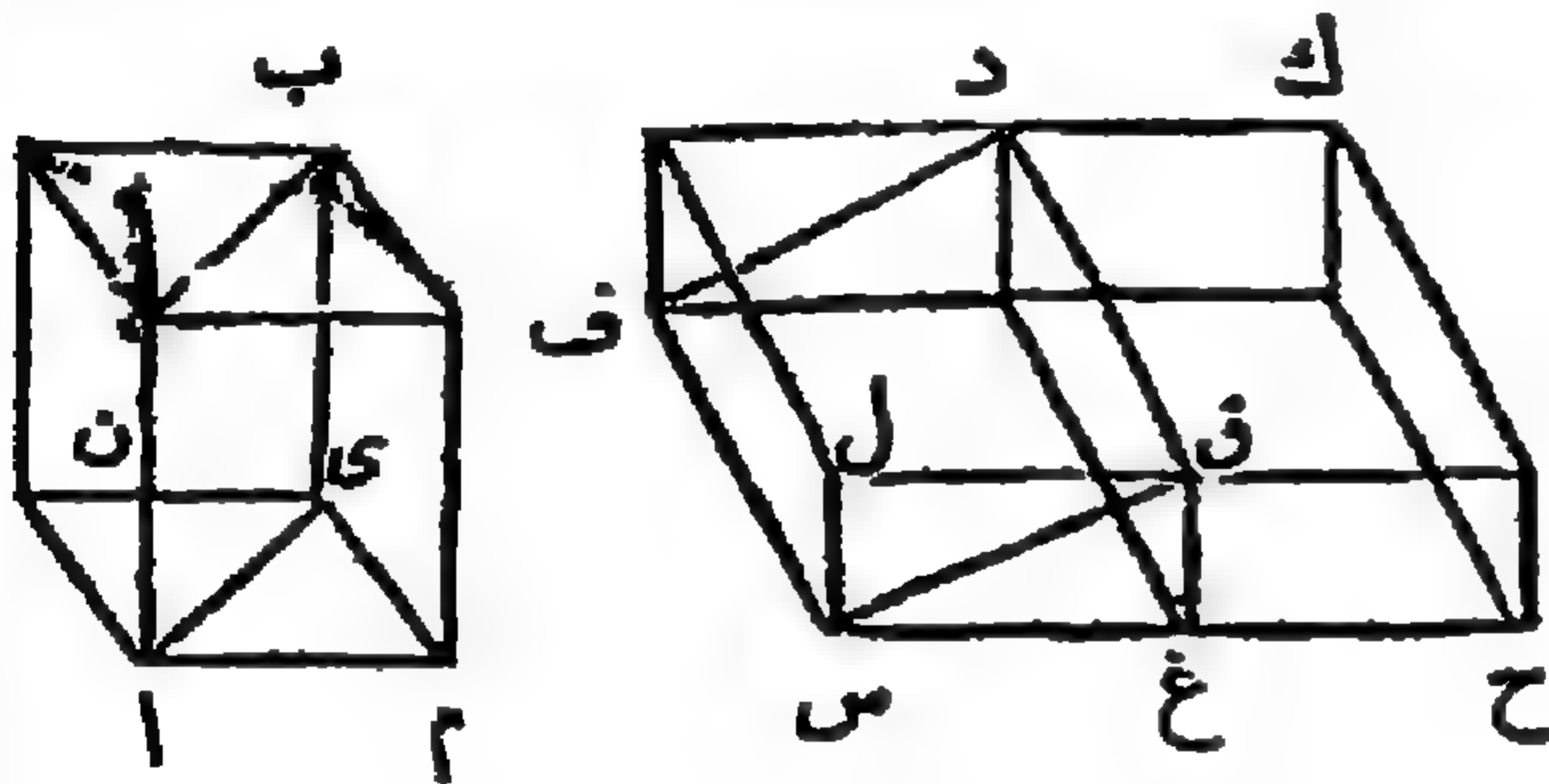
س د :: القاعدة اى :

القاعدة س ق

ارسم الشكل

المتوازي الاضلاع ق ح

على الخط المستقيم



ق غ حتى يعدل القاعدة اى (فرع ق ٤٥ ك ١) والزاوية ق غ ح فلتعدل ل م س غ  
وتم الجسم المتوازي السطوح غ ك على القاعدة ق ح فيكون ق د واحدا من خطوط  
الواقفة فيكون الجسمان س د و غ ك على علو واحد والجسم ا ب يعدل الجسم غ ك  
(ق ٧ ك ٢ م) ونسبة ح ق : ق س :: الجسم ح د : الجسم د س (ق ٢ ك ٢ م) والقاعدة  
ح ق = اى والجسم غ ك = ا ب فنسبة ا ب : س د :: اى : س ق

فرع اول. يتضح من هذه القضية ان المواشير على قواعد مثلثة الاضلاع وعلى  
علو واحد تكون نسبة بعضها الى بعض كنسبة قواعدها بعضها الى بعض

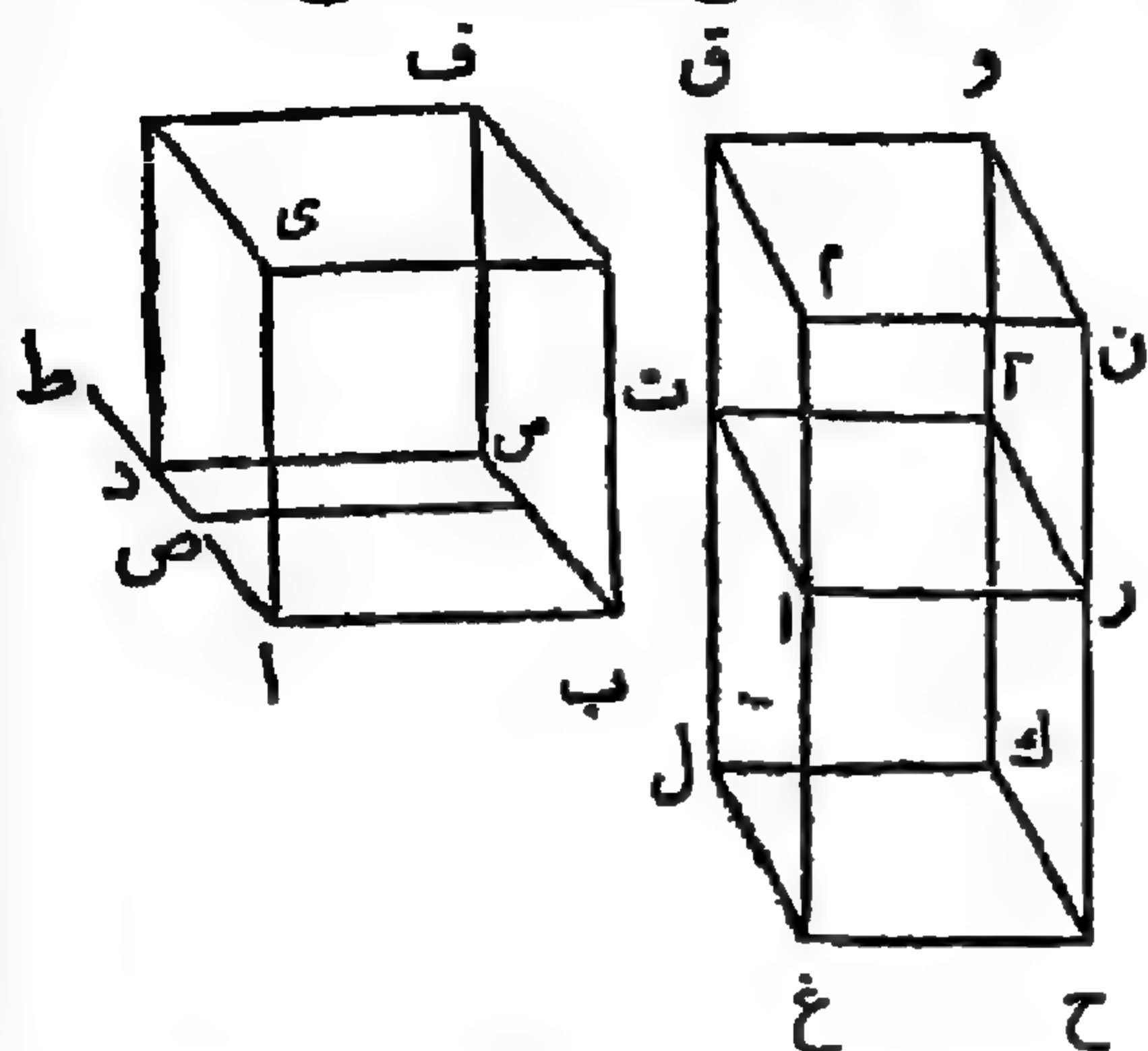
فرع ثان. اذا كان جسم متوازي السطوح وموشر على علو واحد فنسبة احدها  
الى الاخر كنسبة قاعدة الواحد الى قاعدة الاخر





# القضية التاسعة . ن

اجسام متوازية السطوح تكون نسبة بعضها الى بعض كنسبة مسطح  
 علو الواحد في مساحة قاعدته الى مسطح علو الاخر في مساحة قاعدته  
 ليكن اف و غ و جسمين متوازي السطوح . فنسبة اف : غ و :: اس :  
 س ف : غ ك × ك و



من غ م احد الخطوط  
 الواقعة للجسم غ و اقطع غ ا  
 حتى يعدل س ف او اى  
 من الجسم اف وليتر بالنقطة  
 ا سطح يوازي غ ك مثل  
 السطح ا ت ا ر ف الجسم غ ا

متوازي السطوح ( ح د ه ك ا م ) وعلوه هو علو اف . ونسبة الجسم اف : الجسم غ و  
 هي مركبة من نسبة اف : غ ا ونسبة غ ا : غ و ( ح د ا ك ه ) ونسبة اف : غ ا  
 هي كنسبة القاعدة اس : القاعدة غ ك ( ق ا ك ا م ) لانها على علو واحد ونسبة الجسم  
 غ ا : الجسم غ وهي كنسبة غ ا : غ م ( ق ا ك ا م ) فالتسوية المركبة من نسبة اف :  
 غ ا ومن نسبة غ ا : غ و هي مثل المركبة من نسبة القاعدة اس : القاعدة غ ك  
 والعلو اى : العلو غ م ( ق و ك ه ) ولكن نسبة اف : غ و هي المركبة من اف : غ ا  
 وغ ا : غ و فنسبة اف : غ و هي المركبة من نسبة القاعدة اس : القاعدة غ ك والعلو  
 اى : العلو غ م فنسبة اف : غ و :: اس : س ف : غ ك × ك و

فرع اول . يمكن استعمال خطين مستقيمين نسبة احدهما الى الاخر كنسبة الجسم  
 اف الى الجسم غ و . ليوضع الشكل المتوازي الاضلاع ب ص على ا ب وليفرض  
 ان ب ص = غ ك وزاوية من زواياه تعدل ب ا د ( ق ا ك ا م ) واس : ا ط ::  
 اى : غ م ( ق ا ك ا م ) فتكون نسبة ا د : ا ط :: الجسم اف : غ و . لان نسبة ا د :  
 ا ط مركبة ( ح د ا ك ه ) من نسبة ا د : ا ص ونسبة ا ص : ا ط ولكن نسبة ا د :  
 ا ص هي مثل نسبة الشكل اس : الشكل ب ص او غ ك ( ق ا ك ا م ) ونسبة  
 ا ص : ا ط هي مثل نسبة اى : غ م فنسبة ا د : ا ط مركبة من نسبة اس : غ ك

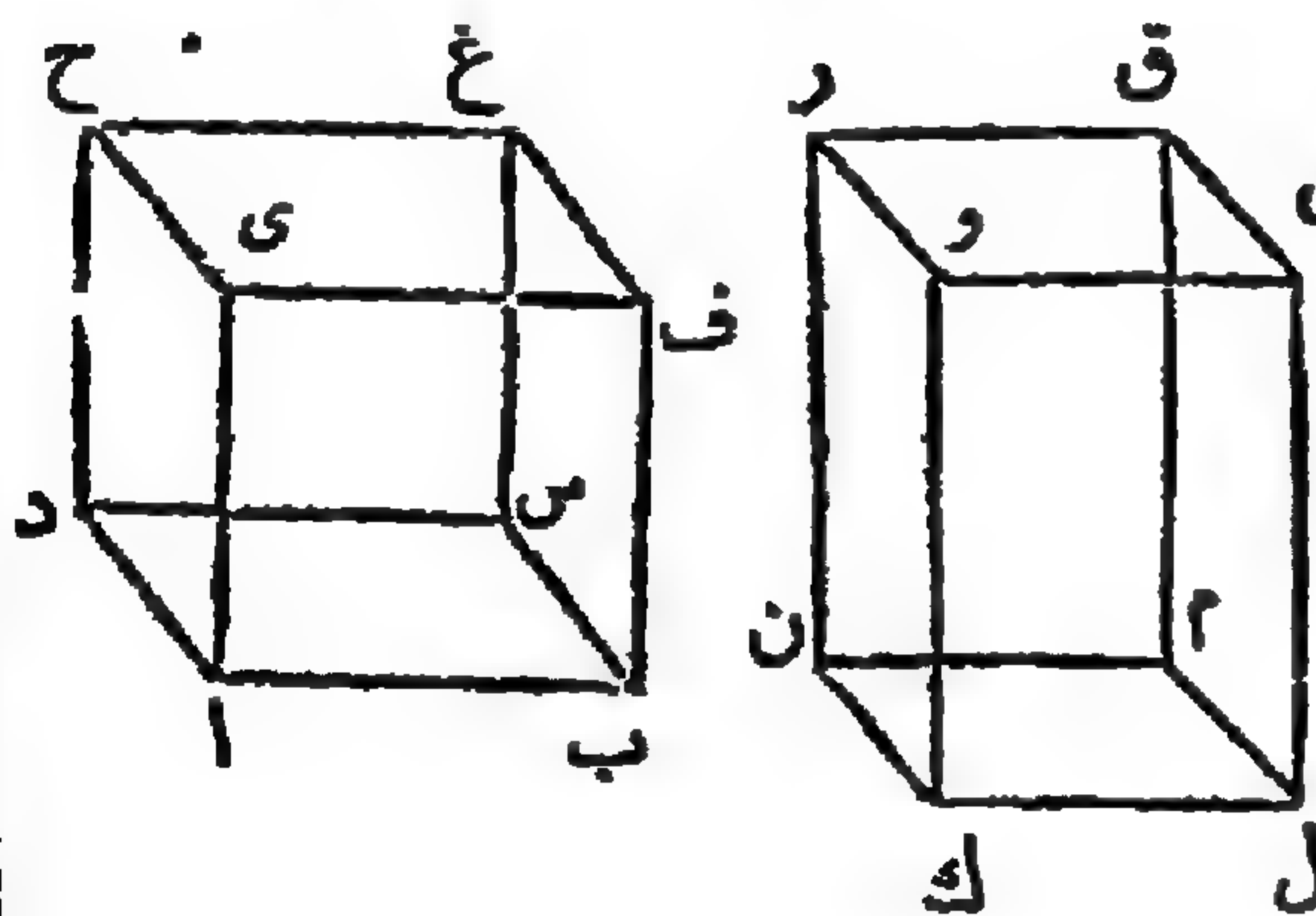


ونسبة اى:غ م (ق:ه ك) ونسبة الجسم ا ف الى الجسم غ و هي مركبة من ذات  
لهذه النسب فنسبة ا ف:غ و:: ا د:ا ط  
فرع ثان. نسبة المواشير بعضها الى بعض كالنسب المركبة من قواعدها في  
طولها (فرع ٢ ق ٨ ك ٢ م)

### القضية العاشرة. ن

اجسام متوازية السطوح هي متساوية اذا كانت قواعدها وعلوها  
متناسبة بالتكافؤ. والاجسام المتوازية السطوح المتساوية تكون  
قواعدها وعلوها متناسبة بالتكافؤ

لتكن نسبة ا س:ك م:: ك و:اى ف الجسم ا غ = الجسم ك ق لانه بتحويل هذه  
النسبة لنا ا س × اى = ك م  
× ك و و ا س × اى = ا غ  
(ق ٩ ك ٢ م) وك م × ك و  
= ك ق  
ثم اذا فرض ان ا س  
× اى = ك م × ك و لنا  
ا س:ك م:: ك و:اى



فرع. في المواشير المتساوية تكون قواعدها وعلوها متناسبة بالتكافؤ وبالعكس  
اذا كانت العلو والقواعد متناسبة بالتكافؤ تكون المواشير متساوية

### القضية الحادية عشرة. ن

اجسام متشابهة متوازية السطوح تكون نسبة بعضها الى بعض كنسبة  
كعوب اضلاعها المتشابهة بعضها الى بعض

ليكن  $ا غ و ك ق$  جسمين متوازيي السطوح  $ا ب$  و  $ك ل$  الضلعين المتشابهين  
 فنسبة  $ا غ : ك ق :: ا ب : ك ل$   
 لكون الجسمين متشابهين يكون  
 اح و ك ر سطحين متشابهين و  $ا ف$   
 و  $ك ط$  كذلك (حد  $ا ك ٢ م$ )  
 ونسبة  $ا ب : ك ل$  و  $ا ي : ك و$

و  $ا د : ك ن$  متساوية (حد  $ا ك ٦$ ) ونسبة  $ا غ : ك ق$  هي مركبة من نسبة  $ا م : ك م$   
 و  $ا ي : ك و$  ونسبة  $ا م : ك م$  هي مركبة من  $ا ب : ك ل$  و  $ا د : ك ن$  فنسبة  $ا غ :$   
 $ك ق$  مركبة من النسب الثلاث اي نسبة  $ا ب : ك ل$  و  $ا د : ك ن$  و  $ا ي : ك و$  وقد  
 تبهرن ان هذه النسب الثلاث متساوية اذا  $ا ب : ك ل :: ا غ : ك ق$  (حد  $ا ك ٥$ )

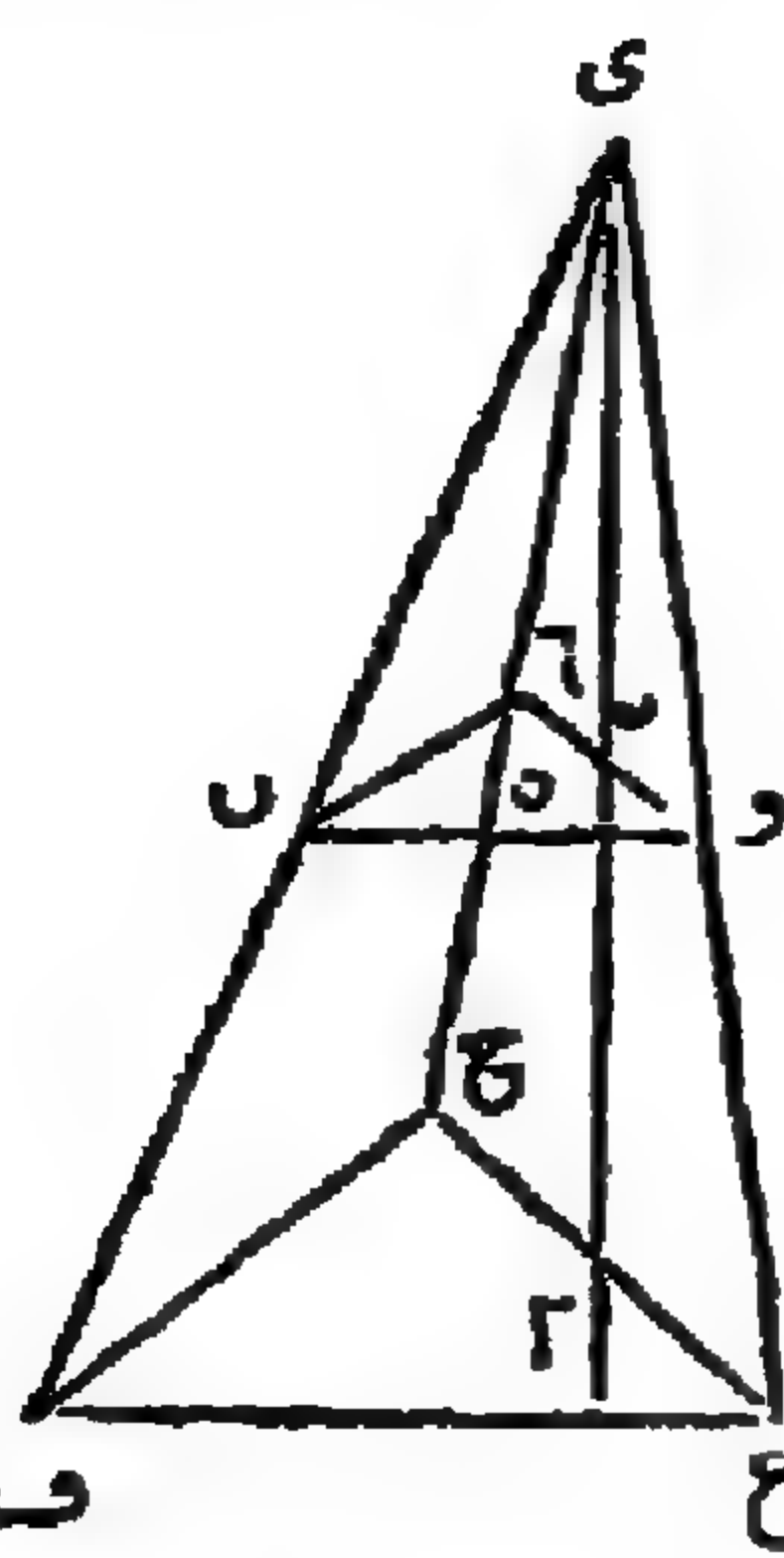
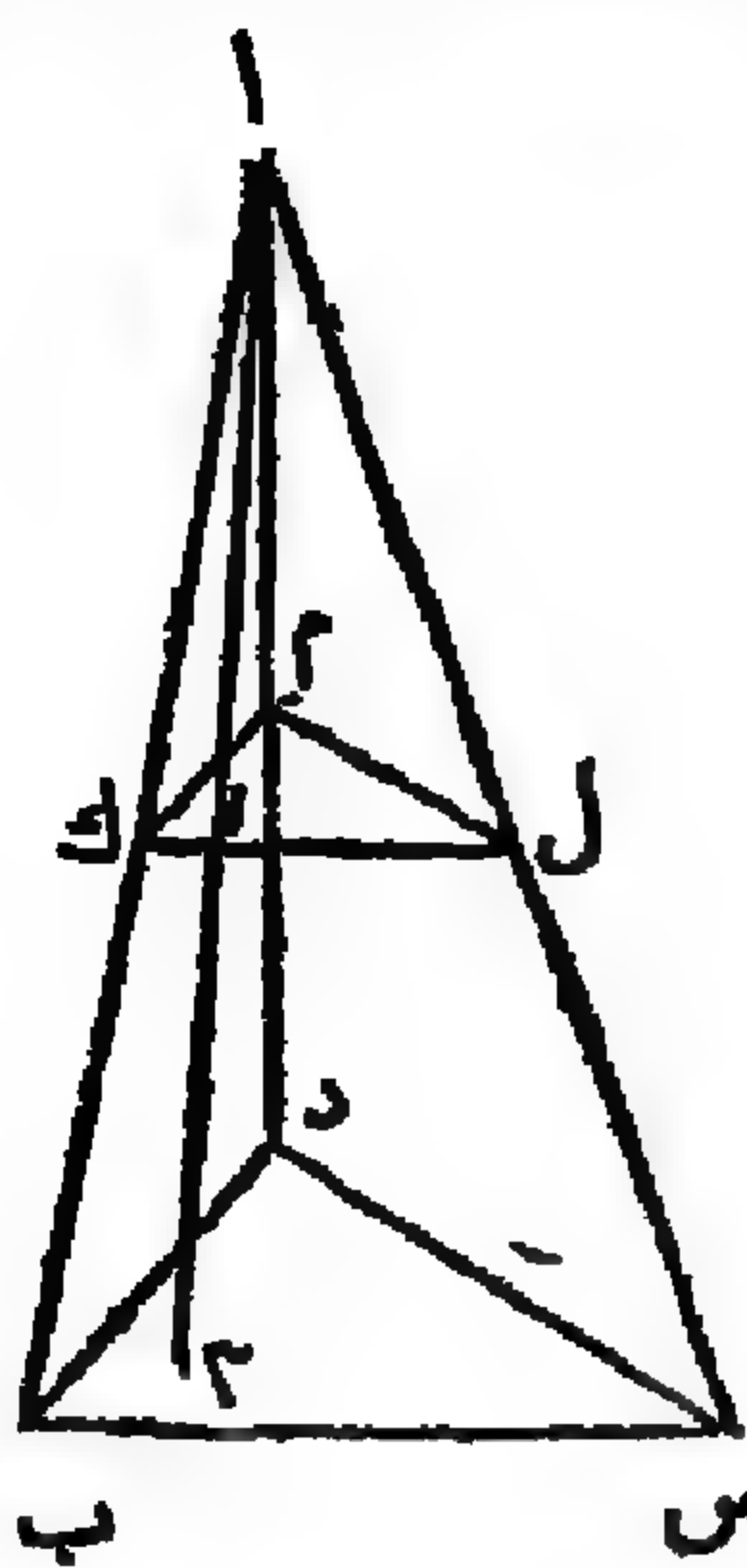
فرع اول . اذا فرض  $ا ب : ك ل :: م : ن$  و  $ك ل : م :: م : ن$  فتكون نسبة  
 $ا ب : ن :: ا غ : ك ق$  . لان  $ا ب : ن = ا ب : ك ل$  (حد  $ا ك ٥$ ) اي  $ا غ : ك ق$   
 فرع ثان . لكون الاجسام المكعبة متشابهة يكون المكعب على  $ا ب : المكعب$   
 على  $ك ل :: ا غ : ا ق$  فنسبة اجسام متوازية السطوح بعضها الى بعض كنسبة  
 كعوب اضلاعها المتشابهة بعضها الى بعض

فرع ثالث . وهكذا يبرهن ايضا ان الموشورات المتشابهة هي ككعوب اضلاعها  
 المتشابهة

### القضية الثانية عشرة . ن

هرمان مثلثا الاضلاع على قاعدتين متساويتين وعلى علو واحد اذا  
 قطع كل واحد منها بسطح يوازي قاعدته وعلى بعد واحد من  
 القاعدتين يكون موضعا التقاطع متساويتين

ليكن  $ا ب س د$   $ي ف غ ح$  هرمين متلي الاضلاع على قاعدتين متساويتين  
 $د ب س$   $ح ف غ$  وعلى علو واحد اي العمود  $ا ٢$  والعمود  $ي ٢$  من  $ا و ي$  على  
 القاعدتين و  $ا ٢$   $ي ٢$   $ا ح$   $ي د$   $ا ل$   $ي م$  والاضلاع  $ا ٦$   $ي ٦$   $ا د$   $ي د$  واحد من



المتعادتين اي طول العمودين  
٣١ و ٢٥. فموضعا التقاطع  
اي المثلثان ك ل م ن و  
متساويان

السطحان ب د س  
ك م ل متوازيان ويلاقيهما  
السطح ا ب د فالخطان  
ب د ك م متوازيان (ق ١٤)

ك م) وهكذا يبرهن ان د س و م ل متوازيان وب د د س بوازيان ك م م ل  
وليست في سطح واحد فالزاوية ب د س تعدل الزاوية ك م ل (ق ١٦ ك م) وعلى  
هذا الاسلوب يبرهن ان بقية زوايا المثلثين متساوية كل واحدة لظبرها فالمثلثان  
متشابهان وهكذا ايضا في المثلثين ف ع ح ن و فها متشابهان لان الخطين  
المستقيمين ٣١ ا ك ب يلاقيان السطحين المتوازيين ك م ل ب د س فيقطعها على  
نسبة واحدة (ق ١٦ ك م) ونسبة ١:٢ :: ا ب: ك ا و ١:٢ :: ا ب: ا ك  
(ق ١٨ ك ه) وهكذا ايضا ي ٢. ي ٥ ف: ي ن فتكون نسبة ا ب: ا ك ::  
ي ف: ي ن لان ٢ = ي ٢ و ١ = ي ٥ ولان المثلثين ا ب س ا ك ل  
متشابهان ا ب: ا ك :: ب س: ك ل وايضا  
ي ف: ي ن :: ف غ: ن و فلما  
ب س: ك ل :: ف غ: ن و

واذا كانت اربعة خطوط مستقيمة متناسبة تكون الاشكال المرسومة عليها متناسبة  
ايضا (ق ٢٢ ك ٦) فالمثلث ب س د: المثلث ك ل م. المثلث ف غ ح: المثلث  
ن و ٦. ولكن قد فرض ان ب س د ف ع ح متساويان فاذا ك ل م ن و ٦  
متساويان ايضا (ق ١ ك ه)

فرع اول. كل موضع يُقطع فيه هرمٌ مثلثُ الاضلاع على موازاة قاعدته هو  
مثلثٌ يشبه قاعدة الهرم وهكذا يبرهن ان الشكل الحادث من قطع كل هرم على  
موازاة قاعدته هو شكل شبيه بقاعدة الهرم

فرع ثانٍ. اهرام كثيرة الاضلاع هي على علو واحد وعلى قواعد متساوية تكون



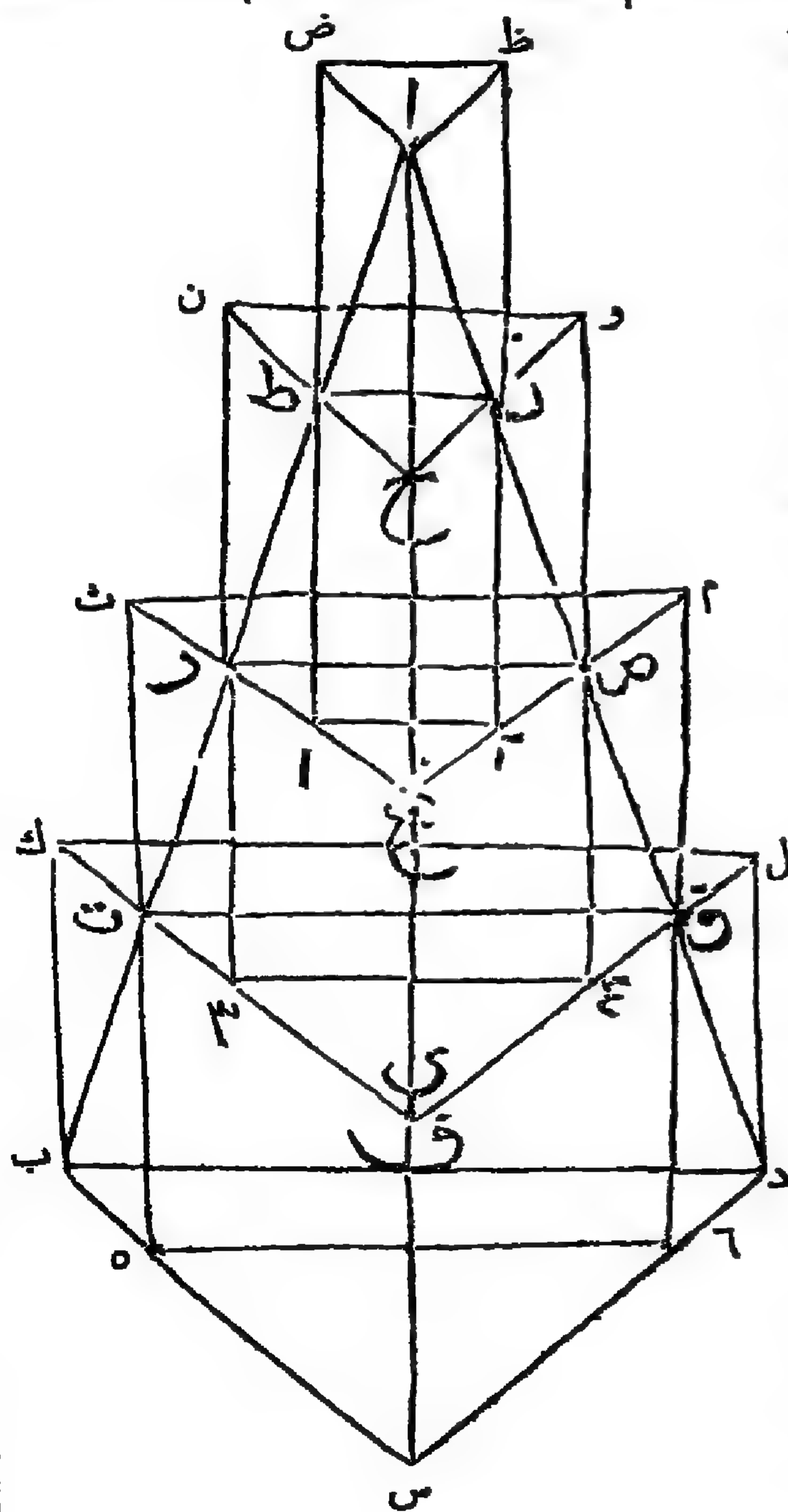
الأشكال الحادثة من قطعها على بعد واحد من القواعد متساوية

## القضية الثالثة عشرة. ن

يُمْكِنُ أَنْ تُرْسَمَ عِدَّةٌ مُوَاشِيرٍ عَلَى عَلَوٍّ وَوَاحِدٍ مُحِيطَةٍ بِهِمْ حَتَّى يَكُونَ مُجْتَمِعٌ

المواشير اعظم من الهرم بمقدار جسم اصغر من جسم مفروض

لیکن اب س دھرمًا وزالجسم المفروض فقد يمكن ان يرسم عدة مواشير محيطه



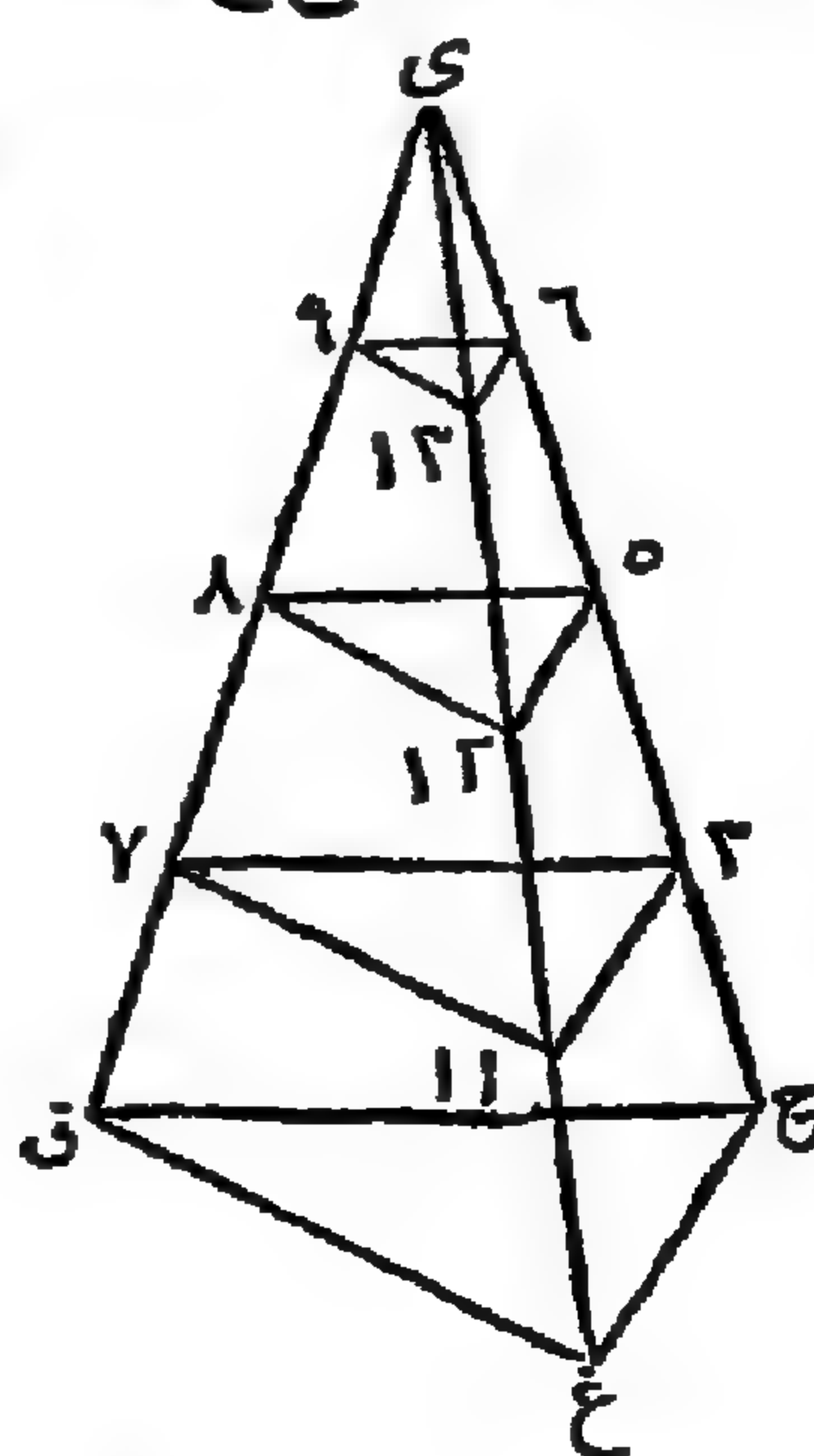
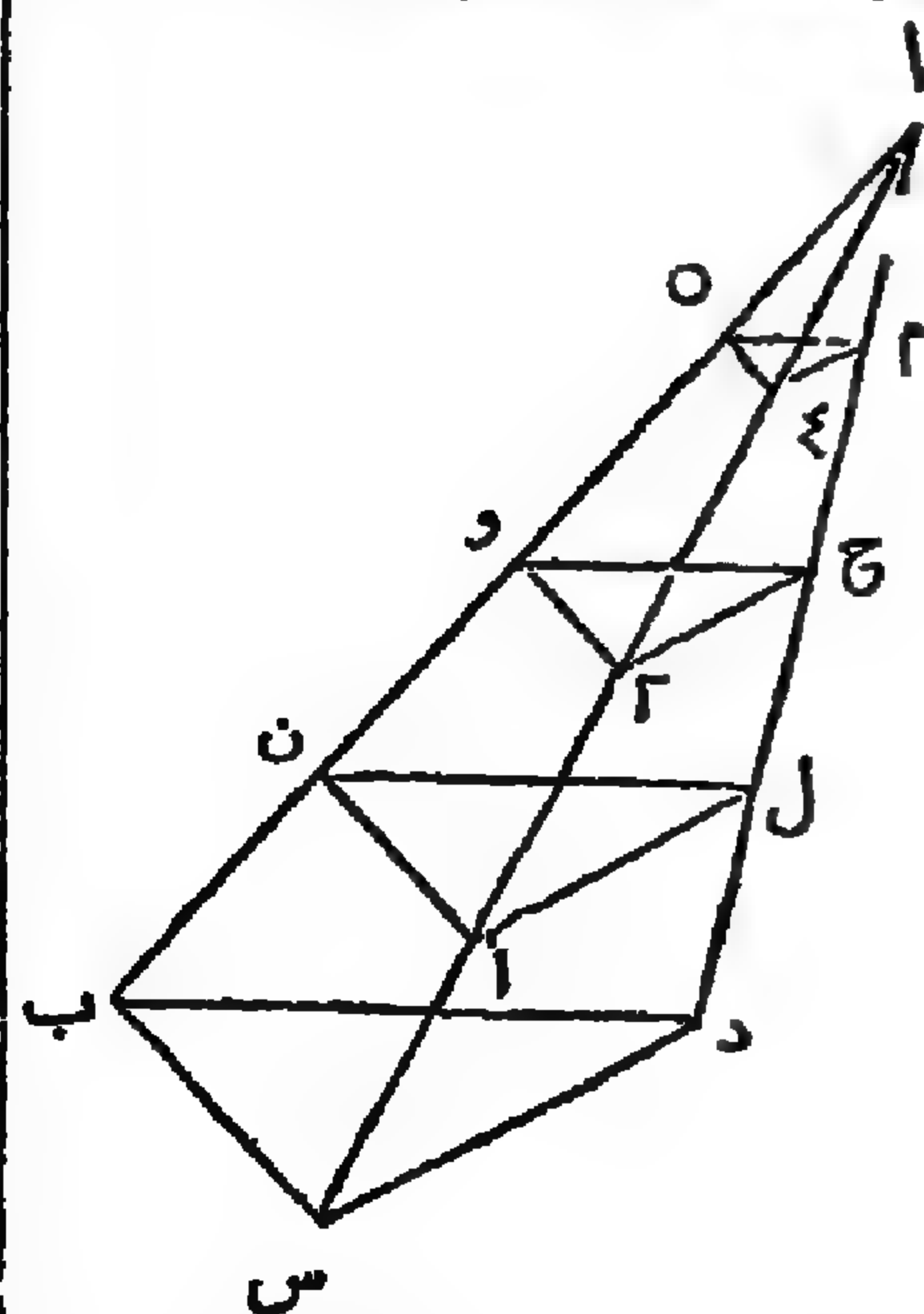
بالهرم ا ب س د مجتمعا  
 اعظم من ا ب س د  
 بمقدار جسم اصغر من ز  
 لنفرض ان ز يعدل  
 موشورا على قاعدة الهرم  
 ب س د وعلو ي س  
 العمود على القاعدة  
 ب س د ، فان ضرب  
 س ي في م مثلاً يكون  
 المحاصل اكبر من ا س .  
 اقسام س ا الى اقسام  
 متساوية عددها يماثل  
 الاحاد في م ولتكن  
 تلك الاقسام س ف  
 ف غ غ ح و ح ا فيكون  
 كل واحد منها اقل  
 من س ي . ثم لير في  
 النقط ف و غ و ح سطوح  
 توازي القاعدة وتصنع مع  
 اضلاع الهرم السطوح

ف ت ق و غ ر ص و ح ط ذ فهي متشابهة بعضها لبعض والقاعدة ب س د (ق ١٢ ك ٢ فرع ١ م) ثم ارسم من ب الخط ب ك حتى يوازي س ف ويلاقي ف ت بعد اخراجه في ك وهكذا دل حتى يلاقي ف ق في ل وارسم ك ل فيكون ك ب س دل ف موشوراً (حد ٤ ك ٢ م) وعلى هذا القياس اصنع الموشير ت م ورووط ظ ثم اخرج ث ت الى ه وم ق الى ٦ وارسم الخط ٦ ه فيكون ه س ٦ ق ف ت موشوراً يعدل الموشور ت م (ق ٨ ك ٢ فرع ١ م) وعلى هذا القياس اصنع الموشير ٢ ص = ر و و ا ذ = ط ظ فجميع الموشير الداخلية ه ق و ٢ ص و ا ذ = مجميع ت م ورووط ظ اي مجتمع الخارجية الأ ب ل فيكون ب ل فضلة الموشير الداخلية والخارجية و ب ل انما هو اصغر من الموشور على القاعدة ب س د وعلى علو س ي الذي يعدل الجسم المفروض ز. فضلة الموشير الخارجية والداخلية في اصغر من الجسم المفروض ز وهذه الفضلة انما هي اعظم من فضلة الموشير الخارجية والهرم ا ب س د لأن الهرم اعظم من مجتمع الموشير الداخلية فبالاخرى تكون فضلة الموشير الخارجية والهرم اصغر من الجسم المفروض ز

### القضية الرابعة عشرة ن

اهرام على قواعد متساوية وعلى علو واحد هي متساوية

ليكن ا ب س د ي ق غ ح ه ر م ن على قاعدتين متساويتين ب س د



ق غ ح وعلى  
علو واحد اي  
العهد من  
الراسين ا و ي  
على القاعدتين  
فالهرمان  
متساويان  
والا

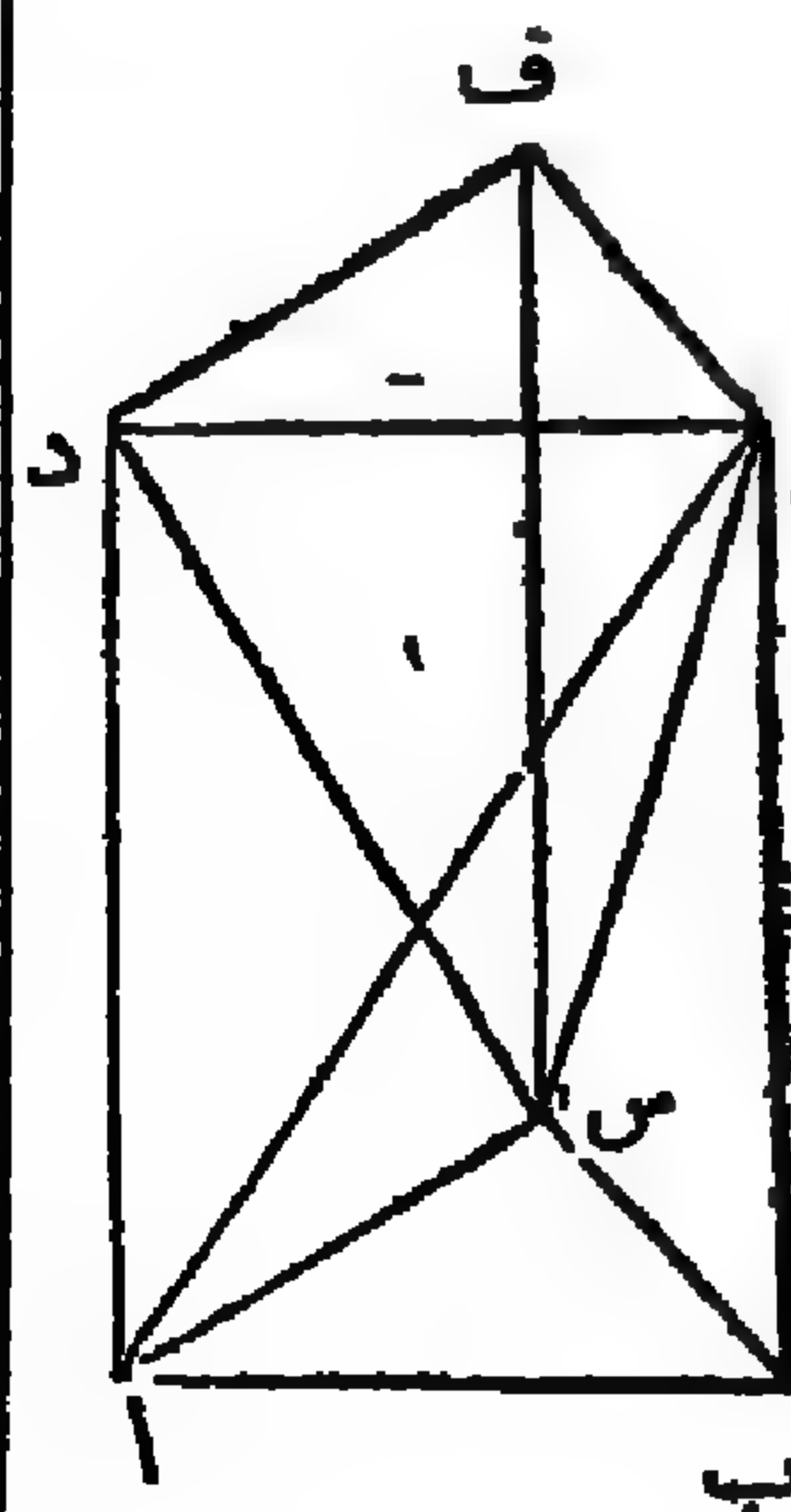
فليكن ي ق غ ح اعظم من ا ب س د بمقدار جسم ز. فيمكن ان ترسم عدة موشير على



علو واحد محيطه بالهرم ا ب س د حتى يكون مجتمعها اعظم من الهرم بمقدار جسم اصغر من ز (ق ١٢ ك ٢ م) ولتكن قواعد هذه المواشير المثلثات ب س د ا ن ل ٢ وج ٥ ٤ م. اقسام ي ح الى اقسام متساوية تماثل اقسام ا د وهي ي ٦ ٦ ٥ ٢ ٢ ٥ ح ولترب هذه النقط سطوح توازي القاعدة ق غ ح وهي ١ ٢ ٥ ٧ ١ ٢ ٥ ٨ ١ ٢ ٦ ٩. فاقطع ن ا ل يعدل القطع ١ ٢ ٦ ٩ (ق ١٢ ك ٢ م) و و ا ج = ١ ٢ ٨ ٥ ٤ م = ٦ ١ ٢ ٩ والمواشير المبنية على هذه الاقطاع المتساوية هي متساوية (فرع اول ق ٨ ك ٢ م) اي الموشور على القاعدة ب س د وبين السطحين ب س د ن ا ل يعدل الموشور على القاعدة ق غ ح وبين السطحين ق غ ح ١ ٢ ٦ ٩ وهكذا في البقية لانها على علو واحد. فجميع المواشير المحيطة بالهرم ا ب س د يعدل مجتمع المواشير المحيطة بالهرم ي ق غ ح وفضلة ا ب س د والمواشير المحيطة به هي اقل من ز. فتكون فضلة هذه المواشير والهرم ي ق غ ح اقل من ز. وقد فرض ان فضلة الهرمين تعدل ز. فالهرم ي ق غ ح هو اعظم من الهرم ا ب س د بمقدار اعظم من فضلة المواشير المحيطة بالهرم ي ق غ ح والهرم ا ب س د. فالهرم ي ق غ ح اعظم من مجتمع المواشير المحيطة به وذاك غير ممكن. فلا يكون الهرمان غير متساويين اي هما متساويان

### القضية الخامسة عشرة ن

كل موشور مثلث القاعدة ينقسم الى ثلاثة اهرام متساوية مثلثة القاعدة لنفرض موشوراً قاعدته المثلث ا ب س وليكن د ي ف المثلث المقابل القاعدة فالموشور ا ب س د ي ف قابل الانقسام الى ثلاثة اهرام متساوية مثلثة القواعد. ارم ا ي وس د وس ي فيكون ا ب ي د متوازي الاضلاع وقطره ا ي فالمثلث ا د ي = ا ب ي (ق ٢٤ ك ١) فالهرم الذي قاعدته ا د ي يعدل الذي قاعدته ي ب ا وراسها ي ف س (ق ١٤ ك ٢ م) والهرم ا ب س ي = د ي ف س (ق ١٤ ك ٢ م) فالاهرام الثلاثة ا د ي س ا ب ي س د ف ي س هي متساوية ومجتمعها هو الموشور المفروض

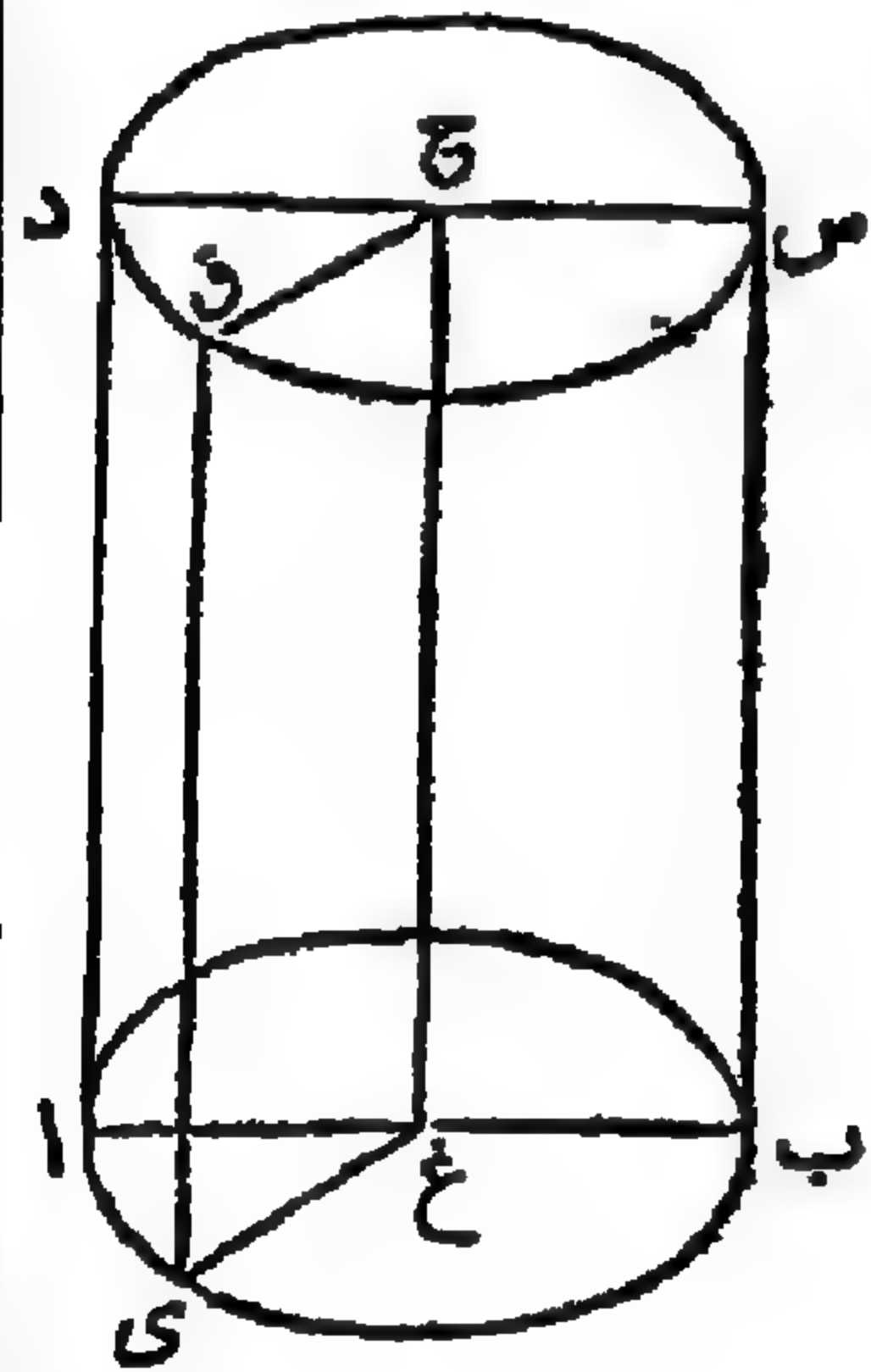




فرع أول. كل هرم هو ثلث منشور على قاعدة تعدل قاعدته وعلى علوه يعدل علوه لأنه وإن كانت قاعدته غير مثلثة يمكنها أن تُقسَم إلى مواشير لها قواعد مثلثة فرع ثانٍ. نسبة أهرام على علو واحد بعضها إلى بعض كنسبة قواعدها بعضها إلى بعض (ق ٨ ك ٢ فرع ١ م)

### القضية السادسة عشرة من

إذا فرضت نقطة في محيط قاعدة اسطوانة ورُسم منها خطٌ مستقيم عموداً على سطح القاعدة يكون الخطُ كله في سطح الاسطوانة لكن أ ب س د اسطوانة محيط قاعدتها أ ب وليكن د ق س الدائرة التي



تقابل القاعدة وليكن غ ح محورها. ولنفرض في محيط القاعدة النقطة ي وليرسم منها الخط المستقيم ي ق عموداً على سطح الدائرة أ ب. فالخط ي ق كله في سطح الاسطوانة. ليلاق الخط ي ق السطح المقابل بقاعدة د ق س في النقطة ق. ارسم ي غ وق ح. وليكن ا غ ح د الشكل القائم الزوايا الذي بدورانه رُسمت الاسطوانة (حد ١ ك ٢ م)

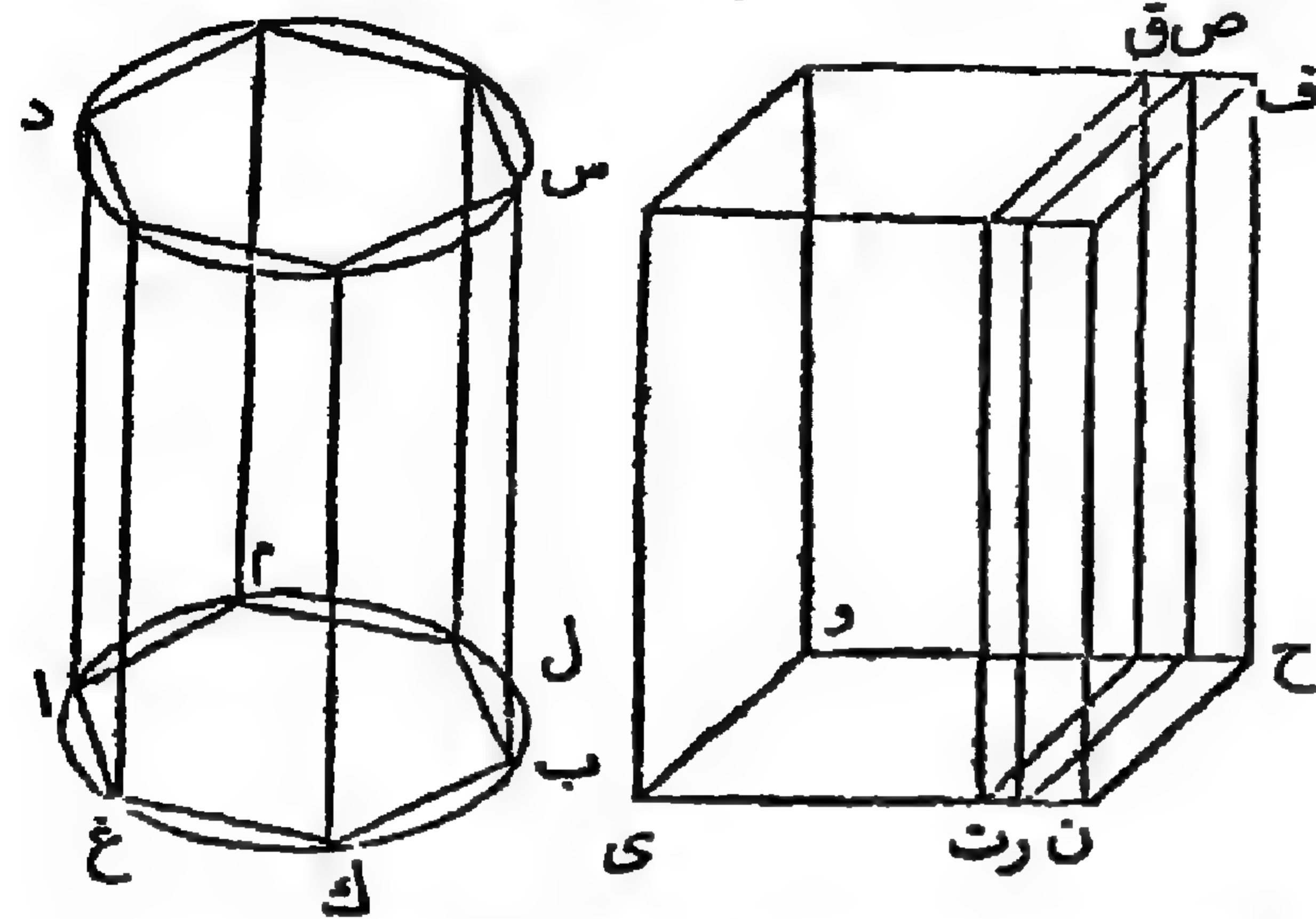
لكون الخط غ ح عموداً على ا غ الذي

بدورانه رُسمت الدائرة أ ب فهو عمود على جميع الخطوط المستقيمة في سطح تلك الدائرة التي تلاقيها في غ. فهو عمود على سطح الدائرة أ ب. والخط ي ق هو عمود على ذلك السطح فالخط ي ق يوازي غ ح (ق ٦ ك ٢ م) وهما في سطح واحد. والسطح المار بالخطين ي ق غ ح يقطع السطحين المتوازيين د ق س أ ب في الخطين المستقيمين ي غ ق ح فهما متوازيان (ق ١٤ ك ٢ م) فالشكل ي ق ح غ متوازي الاضلاع والزوايا ي غ ح منه قائمة فالشكل قائم الزوايا ويعدل القائم الزوايا ا ح لان ي غ = ا غ. فاذا دار الشكل ا ح حتى يوافق الخط ا غ الخط ي غ فالشكلان ا ح ي ح يتوائمان والخط ا د يوافق الخط ي ق ولكن ا د هو في سطح الاسطوانة فيكون ي ق ايضاً في سطح الاسطوانة

القضية السابعة عشرة. ن

اسطوانة وجسم متوازي السطوح على قاعدتين متساويتين وعلى علو واحد هما متساويان

لتكن ا ب س د اسطوانة وليكن ي ف جسماً متوازي السطوح والقاعدة ا غ ب



فلتعدل القاعدة  
ي ح وليكن علو  
الجسمين واحداً  
فالاسطوانة  
ا ب س د تعدل  
الجسم ي ف  
والا فلنكن  
الاسطوانة اصغر

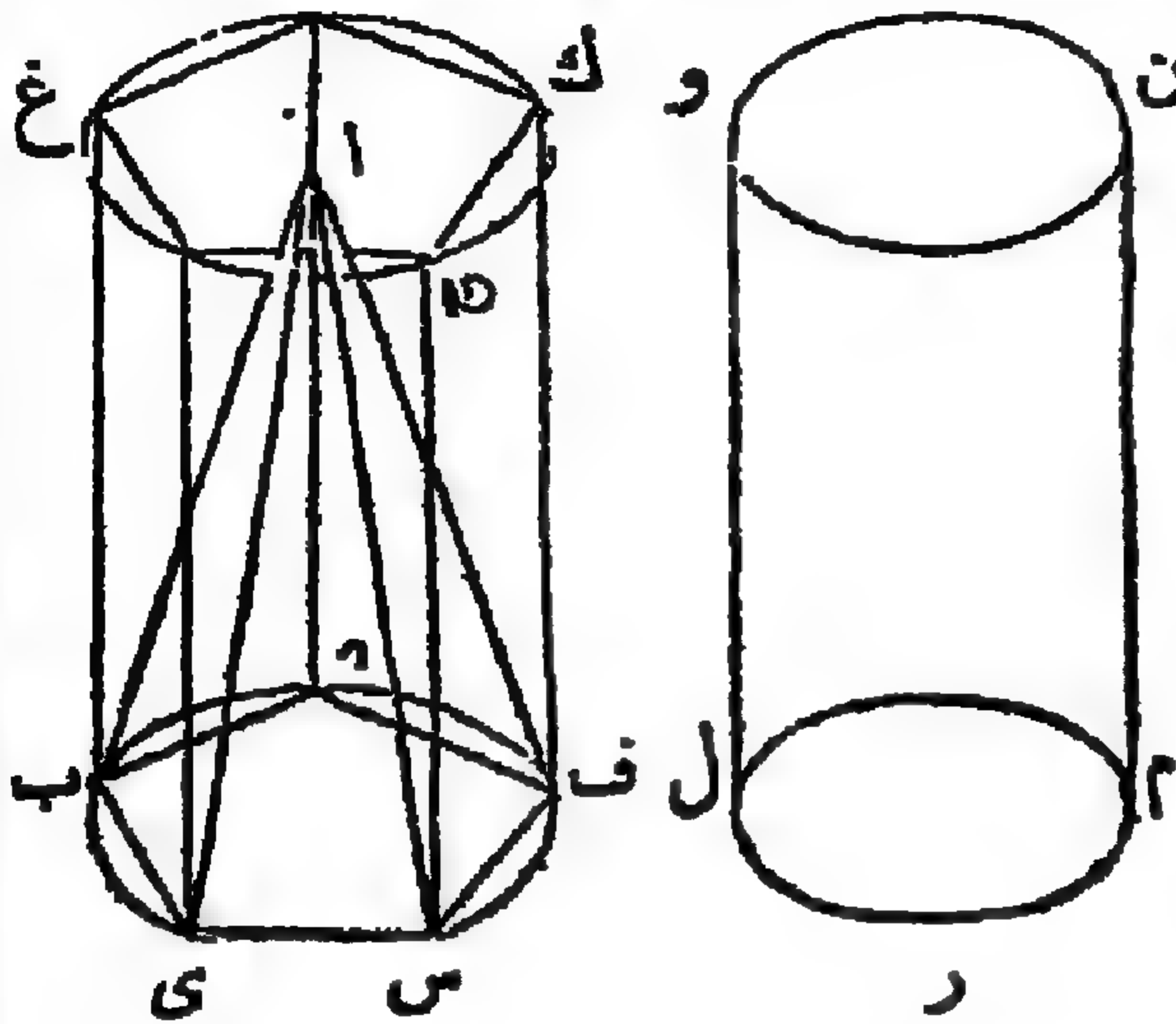
من الجسم ي ف. ولينصل من ي ف جزء ي ق يعدل الاسطوانة ا ب س د.  
وذلك بواسطة سطح ت ق الذي يوازي ن ف ثم ارسم في دائرة ا غ ب شكلاً كثير  
الاضلاع ا غ ك ب ل م ويكون الفرق بينه وبين الدائرة اقل من الشكل ت ح  
(ق ٤ ك ١ فرع ١ م) وافصل من ي ح جزءاً و ر = ا غ ك ب ل م. فتقع النقطة ر  
بين ت و ن ثم ارسم على ا غ ك ب ل م موشوراً ا غ ب س د على علو الاسطوانة  
فيكون اصغر منها (ق ٦ ك ١ م) ثم ليتر السطح ر ص في النقطة ر وليوازي ن ف  
فيقطع من ي ف الجسم ي ص = الموشور ا غ ب س د (ق ٨ ك ٢ فرع ٢ م) لانها  
متساويان في القاعدة والعلو وللموشور هو اصغر من الاسطوانة وقرب ان  
الاسطوانة = ي ق اذا ي ص هو اصغر من ي ق وذاك محال فلا يمكن ان تكون  
الاسطوانة اصغر من ي ف. وعلى هذا الاسلوب يبرهن انها ليست اكبر من ي ف



القضية الثامنة عشرة. ن

إذا كانت اسطوانة ومخروط على قاعدة واحدة وعلى علو واحد  
فالمخروط ثلث الاسطوانة

ليكن المخروط ا ب س د والاسطوانة ب ف ك غ على قاعدة واحدة هي الدائرة



ب س د وعلى علو واحد ن  
هو العمود من ا على سطح  
القاعدة ب س د فالمخروط  
ا ب س د انما هو ثلث  
الاسطوانة ب ف ك غ  
والا فليكن المخروط  
ا ب س د ثلث اسطوانة  
اخرى ل م ن وعلوها مثل

علو الاسطوانة ب ف ك غ ولكن القاعدة ل م ليست مثل القاعدة ب س ف  
ولا لتكن ب س د اكبر من ل م

ثم لان الدائرة ب س د اكبر من الدائرة ل م فيمكن ان يرسم في ب س د  
شكل كثير الاضلاع فضلها اصغر من فضلة ب س د ول م (ق ٤ ك ا م)  
ليكن ب ي س ف د ذلك الشكل وليبين عليه الهرم ا ب ي س ف د والموشور  
ب س ف ك ح غ

فلكون الشكل الكثير الاضلاع ب ي س ف د اعظم من الدائرة ل م يكون  
الموشور ب س ف ك ح غ اعظم من الاسطوانة ل م ن ولان لها علوا واحدا ولكن  
قاعدة الموشور اكبر من قاعدة الاسطوانة. ولكن الهرم ا ب ي س ف د هو ثلث الموشور  
ب س ف ك ح غ (ق ١١ ك ا م) فهو اعظم من ثلث الاسطوانة ل م ن و. وقد  
فرض ان المخروط ا ب س د هو ثلث الاسطوانة ل م ن و. فالهرم ا ب س ف د  
اعظم من المخروط ا ب س د وهو ايضا اصغر منه وذاك محال فالمخروط ا ب س د  
ليس اقل من ثلث الاسطوانة ب ف ك غ. وعلى هذا الاسلوب اذا رسم شكل كثير

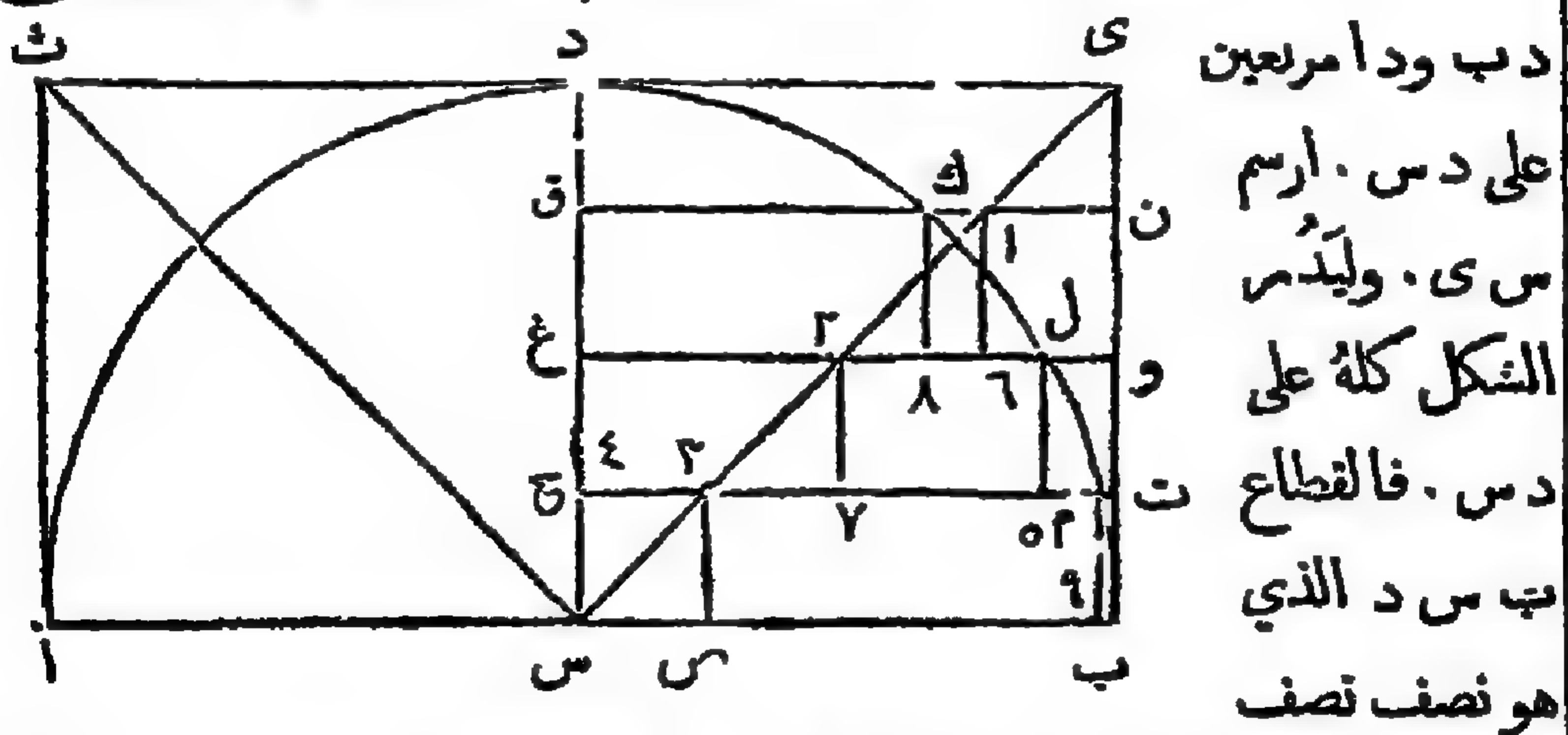


الاضلاع محيط بالدائرة ب س د يبرهن ان المخروط ا ب س د ليس اعظم من ثلث الاسطوانة ب ف ك غ فالمخروط ثلث الاسطوانة

### القضية التاسعة عشرة. ن

اذا كان نصف كرة ومخروط على قاعدتين متساويتين وعلى علو واحد فيمكن ان ترسم في نصف الكرة عدة اساطين وعدة اخرى محيطة بالمخروط كلها على علو واحد وفضلة مجتمعها ومجتمع نصف الكرة والمخروط يعدل جسماً اصغر من جسم مفروض

لتكن ا د ب نصف دائرة مركزها س. وليرسم س د عموداً على ا ب وليكن



الدائرة ا د ب يرسم نصف كرة مركزها س (حد ٧ ك ٢ م) والمثلث س د ي يرسم مخروطاً رأسه س وقاعدته الدائرة المرسومة بالخط د ي (حد ١١ ك ٢ م) التي تعدل المرسومة بالخط ب س الذي هو قاعدة نصف الكرة ولتكن ع جسماً ما. فيمكن ان ترسم عدة اساطين في نصف الكرة ا د ب وعدة اخرى تحيط بالمخروط ي س ت وتكون فضلة مجتمعها ومجتمع المخروط ونصف الكرة اصغر من ع الجسم المفروض ارسم على قاعدة نصف الكرة اسطوانة = ع وليكن علوها س ٤ واقسم س د الى اقسام ١٠. ا و ١٠. ا د. ب س ٤ واكن ١١ ح و ج غ و غ ق وق د. ثم ارسم ن ن و ع و ح ت حتى نوازي س ب وتلاقي محيط الدائرة في ك ول وم وتلاقي الخط س ي في النقطة ١ ٢ ٣ وارسم ك ٨ ول ٥ وم ٩ عمودية على

غ و ح ت و س ب وايضاً ٢ ص و ٧ ٢ و ٦ ا عمودية على المخطوط المذكورة  
 فبعد اتمام هذا الرسم ان دار الجميع حول س د فالاشكل المتوازية الاضلاع والقائمة  
 الزوايا ق ٨ و غ ٥ و ح ٩ تُحدث بدورانها اساطين (حد ١ ك ٢ م) في نصف  
 الكرة ب د ا والاشكال دن ق ٦ غ ٧ ح ص تُحدث اساطين مهيطة بالمخروط  
 ث س ي. فيمكن ان يبرهن كما في المواشير المرسومة في هرم (ق ١ ك ٢ م) ان مجتمع  
 كل الاساطين في نصف الكرة هو اقل من نصف الكرة بمقدار جسم اصغر من  
 الاسطوانة المحاذية من دوران ح ب اي اصغر من ع لان ح ب قد فرض اصغر من  
 ع. وهكذا يبرهن ايضاً ان مجتمع الاساطين المهيطة بالمخروط ث س ي هو اكبر من  
 المخروط بمقدار جسم اصغر من الاسطوانة المحاذية من دوران دن ا ب ب جسم اصغر  
 من ع. فلكون مجتمع الاساطين المرسومة في نصف الكرة مع جسم اصغر من ع يعدل  
 نصف الكرة ولكون مجتمع الاساطين المهيطة بالمخروط يعدل المخروط مع جسم  
 اصغر من ع فبإضافة اشياء متساوية الى اشياء متساوية مجتمع هذه الاساطين مع  
 جسم اصغر من ع يعدل مجتمع نصف الكرة والمخروط مع جسم اصغر من ع. ففضلة  
 مجتمع كل الاساطين ومجتمع نصف الكرة والمخروط يعدل فضلة جسمين كل واحد  
 منها اصغر من ع فلا بد ان تكون هذه الفضلة ايضاً اصغر من ع

### القضية العشرون . ن

اذا فرض ما فرض في القضية السابقة فجميع الاساطين في نصف  
 الكرة والمهيطة بالمخروط يعدل اسطوانة علوها وقاعدتها مثل علو  
 نصف الكرة وقاعدته

لنتم الرسم كما في القضية السابقة فجميع الاساطين المحاذية من دوران اسكال  
 ح ٩ غ ٥ ق ٨ اي الواقعة في نصف الكرة مع المحاذية من دوران الاشكال  
 ح ص غ ٧ ق ٦ ودن اي المهيطة بالمخروط يعدل الاسطوانة المحاذية من دوران  
 الشكل ب د. لتكن ل نقطة التماس غ و بمحيط الدائرة فلان س غ ل قائمة فان  
 أوصل بين س ول فالداثرتان المرسومتان على نصف القطر س غ و غ ل تعدلان  
 الدائرة المرسومة على نصف القطر س ل او غ و (ق ٦ ك ١ فرع ٢ م) وس غ =



غ ٢ لان س د = دى فالدايترتان المرسومتان على نصف القطر ع ٢ وغ ل معا  
تعدلان الدائرة المرسومة على نصف التارخ و اى الدائرتان المرسومتان بدوران  
غ ٢ وغ ل على نقطة غ هما معا تعدلان الدائرة المرسومة بدوران غ وعلى تلك  
النقطة. فالاسطوانتان الواقفتان على الدائرتين المذكورتين اذ كان لهما علو واحد  
غ ح تعدلان القائمة على الدائرة الاخرى التي لها ايضا علو غ ح. فالاساطين الحادة  
من دوران غ ٥ وغ ٧ تعدل الحادة من دوران غ ت وهكذا يبرهن في الجميع  
فالاساطين الحادة من دوران ح ٩ غ ٥ ق ٨ وح ص غ ٧ ق ٦ ود ن  
تعدل الحادة من دوران ب د اى تعدل اسطوانة علوها وقاعدتها مثل علو  
نصف الكرة وقاعدته.

### القضية الحادية والعشرون . ن

الكرة هي ثلثا الاسطوانة المحيطة بها

ليرسم كما في القضية السابقة. فان لم يكن نصف الكرة الحادث من دوران  
ب د س ثلثي الاسطوانة الحادة من دوران ب د فلنرضه أكبر من ذلك بمقدار  
جسم ع. ثم لان المحروط الحادث من دوران س دى هو ثلث الاسطوانة المشار اليها  
(ق ١٨ ك ٢ م) فيكون نصف الكرة والمحروط معا أكبر من الاسطوانة بمقدار جسم  
ع. ولكن هذه الاسطوانة تعدل مجتمع الاساطين الحادة من دوران الاشكال ح ص  
غ ٥ الح (ق ٢٠ ك ٢ م) فيجتمع نصف الكرة والمحروط هو أكبر من مجتمع هذه  
الاساطين بمقدار جسم ع وذاك محال لانه قد تهرن (ق ١٩ ك ٢ م) ان فضلة  
مجتمع نصف الكرة والمحروط ومجتمع الاساطين يعدل جسماً اصغر من ع فنصف  
الكرة يعدل ثلثي الاسطوانة الحادة من دوران ب د فكل الكرة ثلثا الاسطوانة  
الحادة من مضاعف ب د اى ثلثا الاسطوانة المحيطة بها.



## اصول قياس المثلثات البسيطة

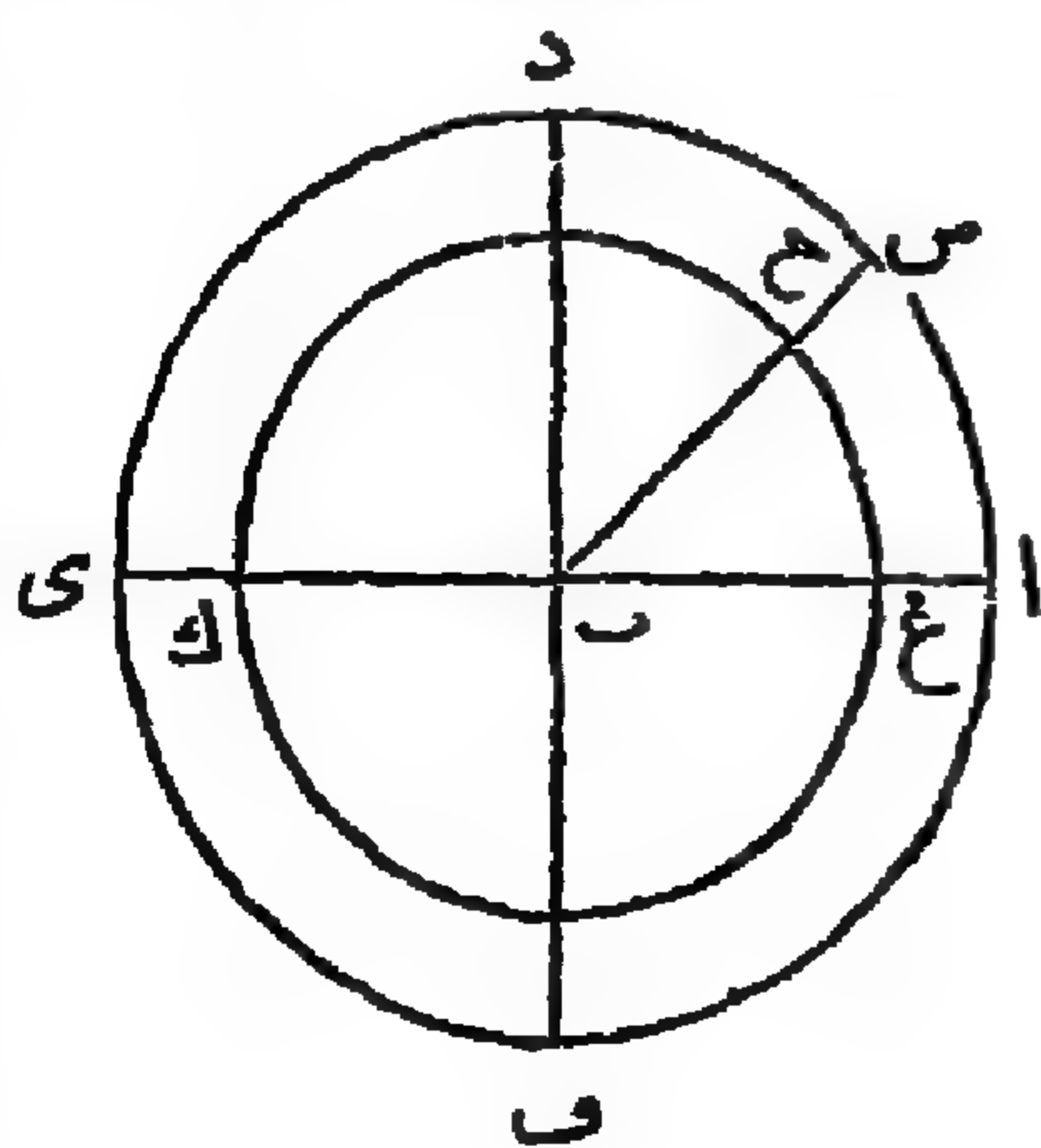
اصول قياس المثلثات البسيطة تنقسم الى ثلاثة اقسام. القسم الاول ايضاح  
المبادئ. الثاني قواعد العمل. والثالث كيفية اصطلاح الجداول مع بعض النظريات  
المسئلة لبعض العجايب العسرة

### القسم الاول

#### سابقة اولى

نسبة زاوية في مركز دائرة الى اربع زوايا قائمة كنسبة القوس الذي  
يقابلها الى محيط الدائرة

لتكن ا ب س زاوية عند مركز الدائرة ا س ي ف واس القوس المقابل لها. فنسبة



ا ب س : اربع زوايا قائمة :: ا س : محيط

الدائرة ا س ي ف. اخرج ا ب حتى يلاقي

المحيط في ي وارسم د ب ف عموداً على ا.

فالزاويتان ا ب س ا ب د هما عند مركز

دائرة واحدة ونسبة ا ب س : ا ب د :: القوس

ا س : القوس ا د (ق ٢٢ ك ٦) ونسبة الزاوية

ا ب س : اربعة امثال ا ب د :: ا س : اربعة

امثال ا د (ق ٤ ك ٥) واب د قائمة. فاربعة امثال ا د يعدل كل المحيط ا س ي ف

فنسبة  $اب س$  : اربع زوايا قائمة :: القوس  $اس$  : المحيط  $ا د ي ف$   
 فرع. الزوايا المتساوية عند مراكز دوائر مختلفة بين اقواسها ذات النسبة التي  
 بين محيطات الدوائر. الزاوية  $اب س$  عند مركز الدائرتين  $ا د ف$   $غ ح ك$  ويقابلها  
 القوس  $اس$  من الواحدة والقوس  $غ ح$  من الاخرى ونسبة  $اس$  الى محيط الدائرة  
 $ا د ف$  كنسبة  $اب س$  الى اربع زوايا قائمة ونسبة  $غ ح$  الى محيط الدائرة  $غ ح ك$   
 كنسبة  $اب س$  الى اربع زوايا قائمة

### حدود

١ اذا تقاطع خطان مستقيمان في مركز دائرة فالقوس الواقع بينهما هو قياس  
 الزاوية المحاذية بينهما. فالقوس  $اس$  هو قياس الزاوية  $اب س$   
 ٢ اذا انقسم محيط دائرة الى ٣٦٠ قسماً متساوياً فكل قسم يسمى درجة وإذا  
 انقسمت الدرجة الى ستين قسماً متساوياً فكل واحد يسمى دقيقة والدقيقة تُقسم الى  
 ستين قسماً متساوياً تسمى ثواني والثانية الى ستين قسماً متساوياً تسمى ثوانث وهكذا  
 الى ما لا نهاية له. والدرجات والدقائق والثواني الى اخره في قوس هي نفس  
 الدرجات والدقائق والثواني في الزاوية التي يقيسها ذلك القوس  
 فرع اول. نسبة قوس الى المحيط الذي هو قسم منه كنسبة درجاته واجزائه  
 درجاته الى ٣٦٠ ونسبة زاوية الى اربع زوايا قائمة كنسبة درجات قوسها واجزائه  
 درجاته الى ٣٦٠

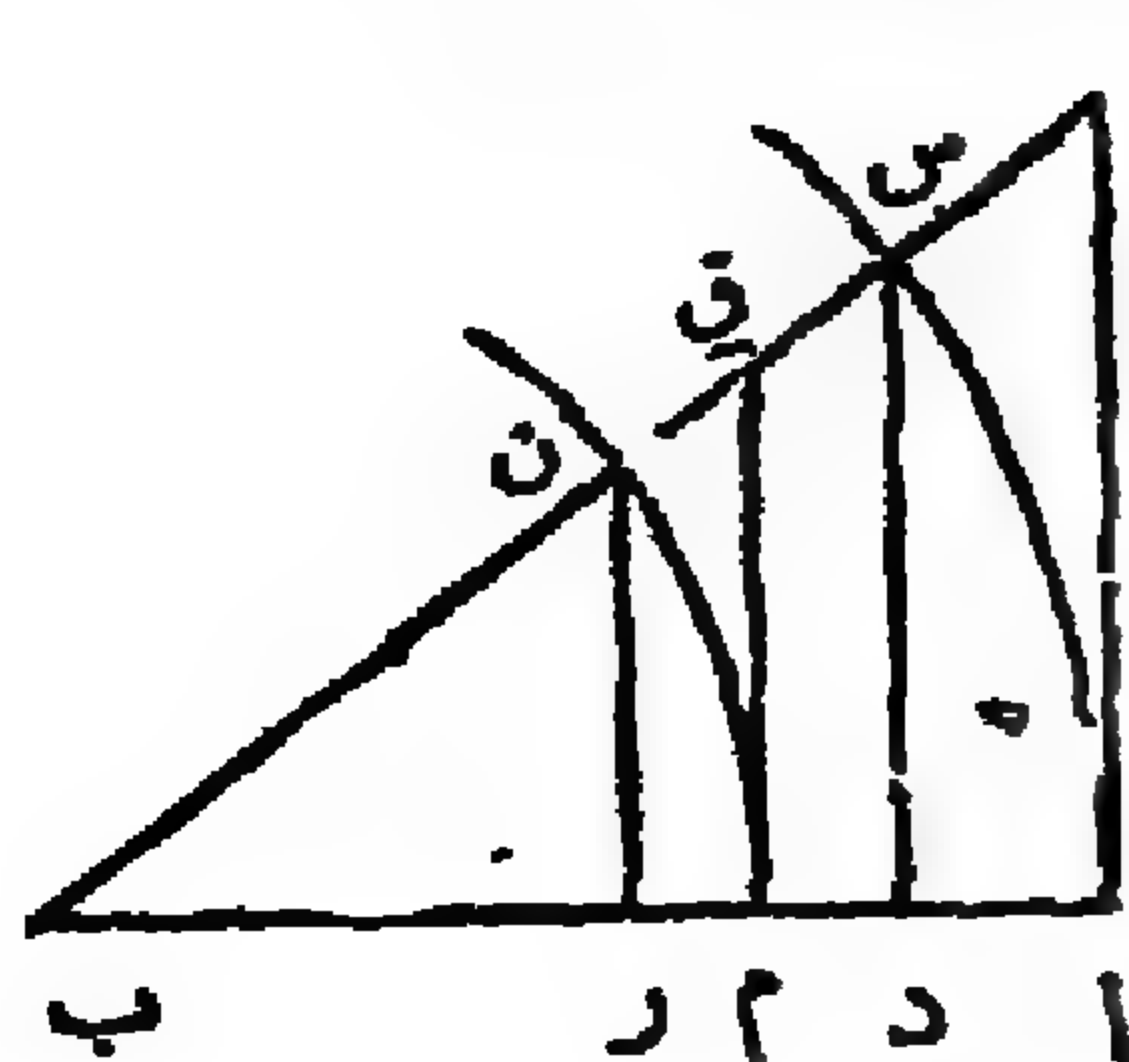
فرع ثان. الاقواس التي تقيس زاوية واحدة هي متائلة في عدة درجاتها واجزائها  
 درجاتها

الدرجات والدقائق والثواني الخ في قوس او زاوية تُكتب هكذا ٤٩° ٢٦'  
 ٤٢" الخ وتقرأ ٤٩ درجة و٢٦ دقيقة و٤٢ ثانية و٤٢ ثالثة الخ  
 ٣ اذا عدلت زاويتان معاً قائمتين فكل واحدة تسمى مُتَمِّمٌ الاخرى وهكذا في  
 قوسين عدلاً معاً نصف دائرة فكل واحد منها مُتَمِّمٌ الآخر

٤ الخط المستقيم المرسوم من طرف قوس مثل الخط  $ن د$  عموداً على القطر  
 المار بالطرف الآخر من القوس هو جيب القوس ان اوجب الزاوية  $اب ن$  التي



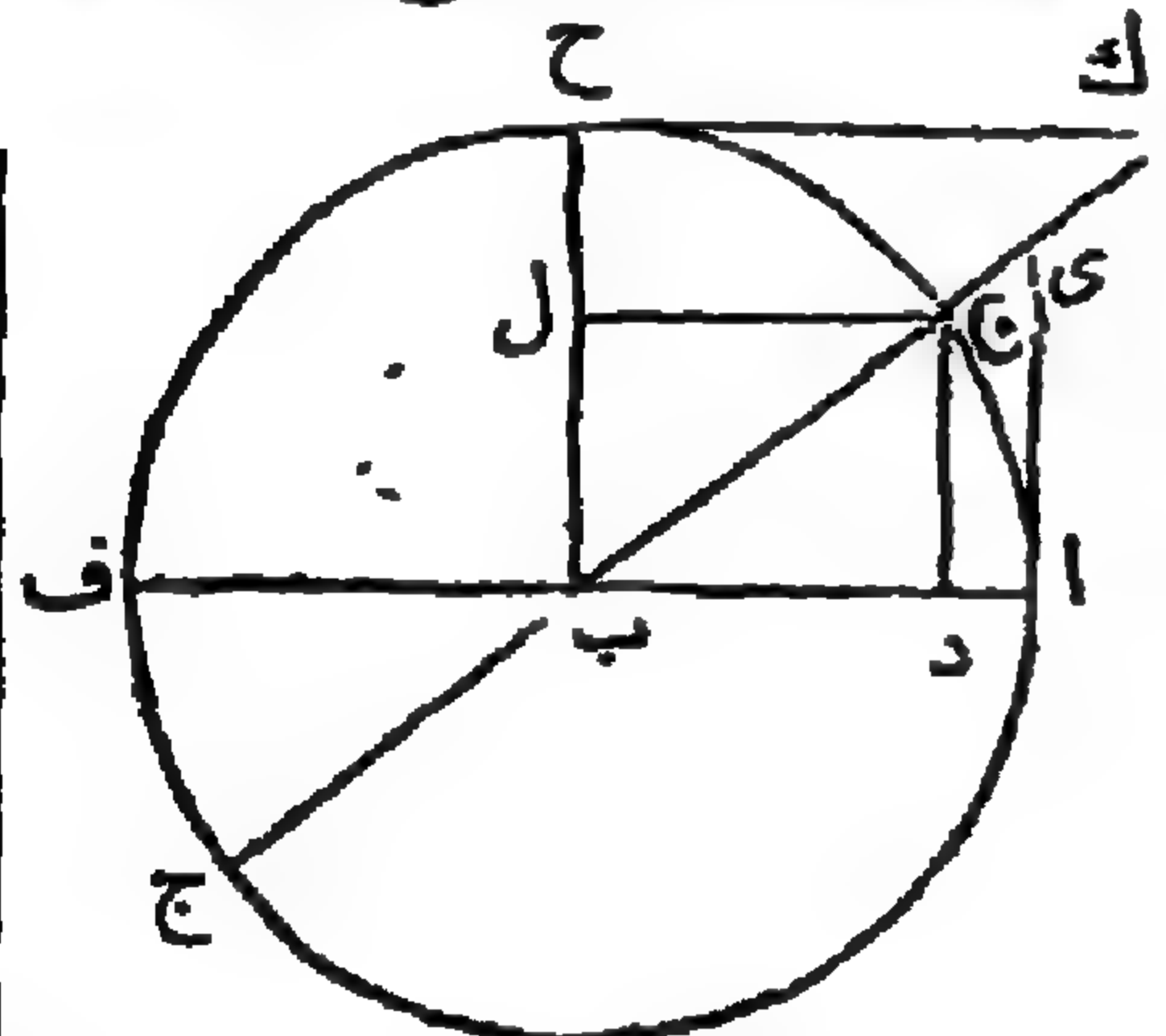




نصف القطر ن ب ونسبة اى : م ق :: نصف  
القطر ا ب : نصف القطر ب م وبى : ب ق ::  
ا ب : ب م ولان ب س : ب د :: ب ن : ب ر  
اوب ا : ب د :: ب م : ب ر فبالقلب والمبادلة  
ا د : م ر :: ا ب : ب م . فالفرع واضح . واذا

اصطنعت جداول دالة على نسبة الجيب وسهم الجيب والمماس والقاطع لزاوية ما الى  
نصف قطر مفروض فهي تدل ايضا على نسبة هذا الجيب وسهمه الى اخره من  
تلك الزاوية الى اى نصف قطر فرض . وقد جرت العادة في تلك الجداول ان  
يحسب نصف القطر واحداً او حلقة من السلسلة ١٠ ١٠٠ ١٠٠٠ الى اخره  
وسياتى ابضاح ذلك في موضعه

٨ فضلة زاوية ما وزاوية قائمة تسمى كمالها وفضلة قوس ما وربع دائرة يسمى



كالة . فاذا كان ب ح عموداً على ا ب تكون  
الزاوية ح ب ن كمال الزاوية ا ب ن  
والقوس ح ن كمال القوس ن ا والزاوية  
ح ب ن كمال الزاوية المنفرجة ف ب ن  
والقوس ح ن كمال القوس ف ح ن

٩ نظير الجيب ونظير المماس ونظير

القاطع لزاوية هي الجيب والمماس والقاطع لكمال تلك الزاوية . فاذا كان ن د جيب  
الزاوية ا ب ن وى امامها وبى قاطعها يكون ن ل نظير الجيب وك ح نظير  
المماس وب ك نظير القاطع لها

فرع اول . نصف القطر هو متناسب متوسط بين المماس ونظير المماس لزاوية  
ما فماس ا ب ن  $\times$  نظير ماس ا ب ن = مربع نصف القطر

لان ح ك وب ا متوازيان فالزاويتان ح ك ب ا ب ن متساويتان وك ح ب  
وب اى قائمتان فالمثلثان ب اى ب ح ك متشابهان واى : ا ب :: ب ح او  
ا ب : ح ك

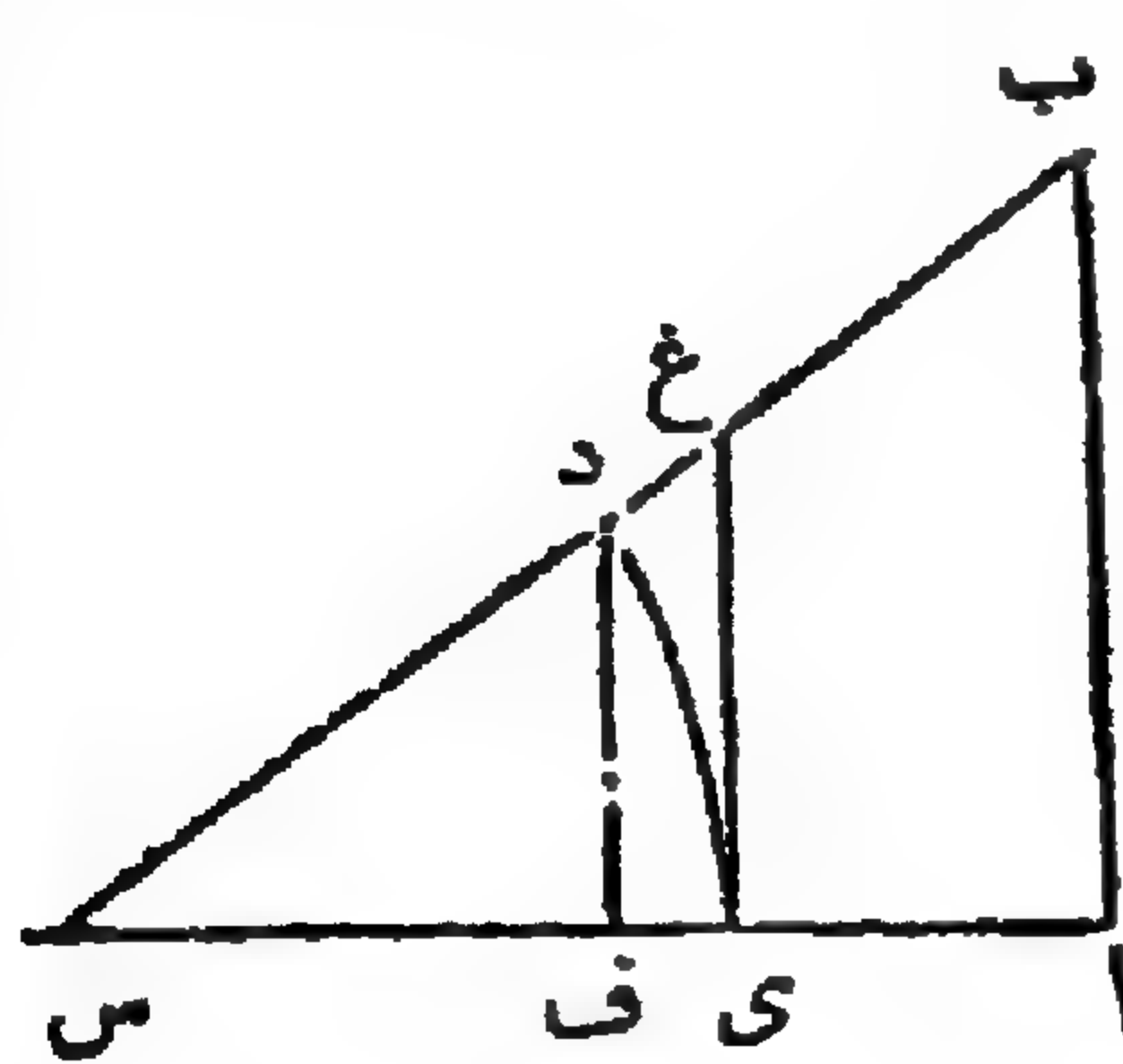
فرع ثان . نصف القطر متناسب متوسط بين نظير الجيب والقاطع لزاوية ما  
اي نظير جيب ا ب ن  $\times$  قاطع ا ب ن = مربع نصف القطر

لأن ن د يوازي ا ف نسبة ب د : ب ن او ب ا : ب ا : ب ا : ب ي  
 تنبيه . لاجل الاختصار يدل على نصف القطر هكذا  $\frac{1}{2}$  وعلى  
 الجيب هكذا ج وعلى المماس هكذا م وعلى القاطع هكذا ق وعلى سهم  
 الجيب هكذا سج وعلى نظير الجيب والمماس والقاطع هكذا نج تم تقا

### القضية الاولى . ن

في مثلث بسيط قائم الزاوية تكون نسبة الوتر الى احد الضلعين  
 كنصف القطر الى جيب الزاوية المقابلة ذلك الضلع . ونسبة ضلع  
 الى الضلع الاخر كنسبة نصف القطر الى مماس الزاوية المقابلة ذلك  
 الضلع

ليكن ا ب س مثلثا بسيطا قائم الزاوية وب س وتره . اجعل س مركزا وس د  
 مثلا نصف قطري وارسم القوس د ي . ارسم  
 د ف عمودا على س ي ومن ي ارسم المماس  
 ي غ الذي يلاقي س ب في غ فيكون د ف  
 جيبا و غ ي مماسا للقوس د ي او للزاوية  
 عند س



المثلثان د ف س ب ا س متساويا  
 الزوايا لأن د ف س وب ا س قائمتان والزاوية عند س مشتركة بين المثلثين .  
 فنسبة س ب : ب ا : س د : د ف وس د هو نصف القطر ود ف جيب الزاوية  
 عند س ( حد ٤ ) فنسبة س ب : ب ا : س د : د ف وس د هو نصف القطر ود ف جيب الزاوية

ولأن ي غ مماس الدائرة في ي فالزاوية غ ي س قائمة وتعدل ب ا س والزاوية  
 عند س مشتركة بين المثلثين غ ي س ب ا س فها متساويا الزوايا ونسبة س ا :  
 ا ب : س ي : ي غ وس ي نصف قطري و ي غ مماس الزاوية عند س فنسبة

س ا: ب :: ق: م س

فرع أول. نسبة نصف القطر الى قاطع الزاوية عند س كنسبة الضلع الذي يلي تلك الزاوية الى الوتر

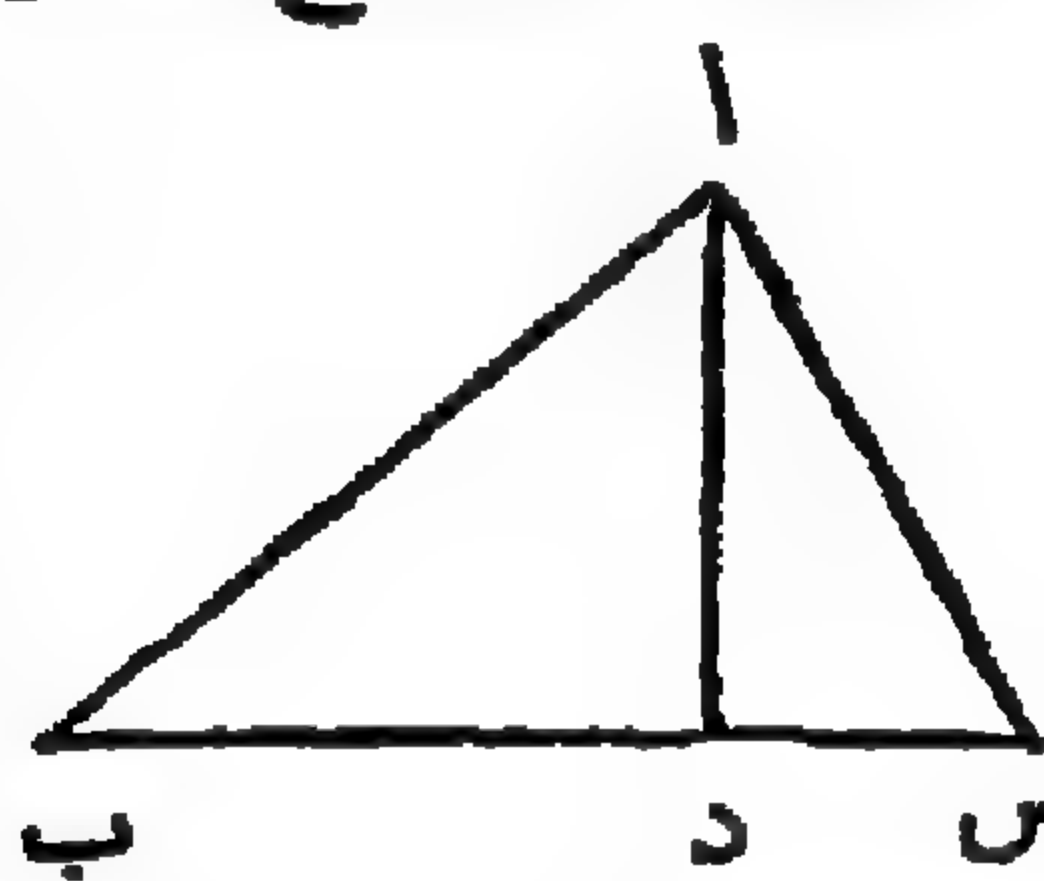
لان س غ قاطع الزاوية عند س (حد ٧) والمثلثان س غ ي س ب ا متساويا الزوايا فنسبة س ا: س ب :: س ي: س غ او س ا: س ب :: ق: م س

فرع ثان. حسب القضية السابقة وفرعها لو فرض نصف القطر واحداً كان  $\frac{جس}{س} = \frac{ب}{س} = \frac{م}{س} = \frac{ا}{س}$  وقاس  $\frac{ا}{س} = \frac{ب}{س}$  ولان جس = نجب

(لان الزاوية عند ب كمال الزاوية عند س) فلنا نجب =  $\frac{ا}{ب}$

ونجب س =  $\frac{ا}{ب}$

فرع ثالث. في كل مثلث اذا رسم عموداً من احدى زواياه الى الضلع المقابل تكون نسبة احد قسبي ذلك الضلع الى القسم الآخر منه كنسبة مماس احد الزوايا على جاب العمود الى مماس الاخرى



في المثلث ا ب س لرسم ا د عموداً من ا على ب س

ب س فكل من المثلثين ا د ب ا د س ذوقائمة ونسبة ا د: د س :: ق: م س

س ا د و ا د: د ب :: ق: م س و بالساواة د س: د ب :: م س ا د: م س ب ا د

تعليقة. يسهل علينا حفظ هذه القضية بملاحظة امرين اولهما انه في مثلث ذي قائمة اذا جعل الوتر نصف قطر يصير كل من الضلعين جيب الزاوية التي تقابلة.

والثاني انه اذا جعل احد الضلعين نصف قطر يصير الضلع الاخر مماساً للزاوية

التي تقابلة والوتر قاطعاً لها

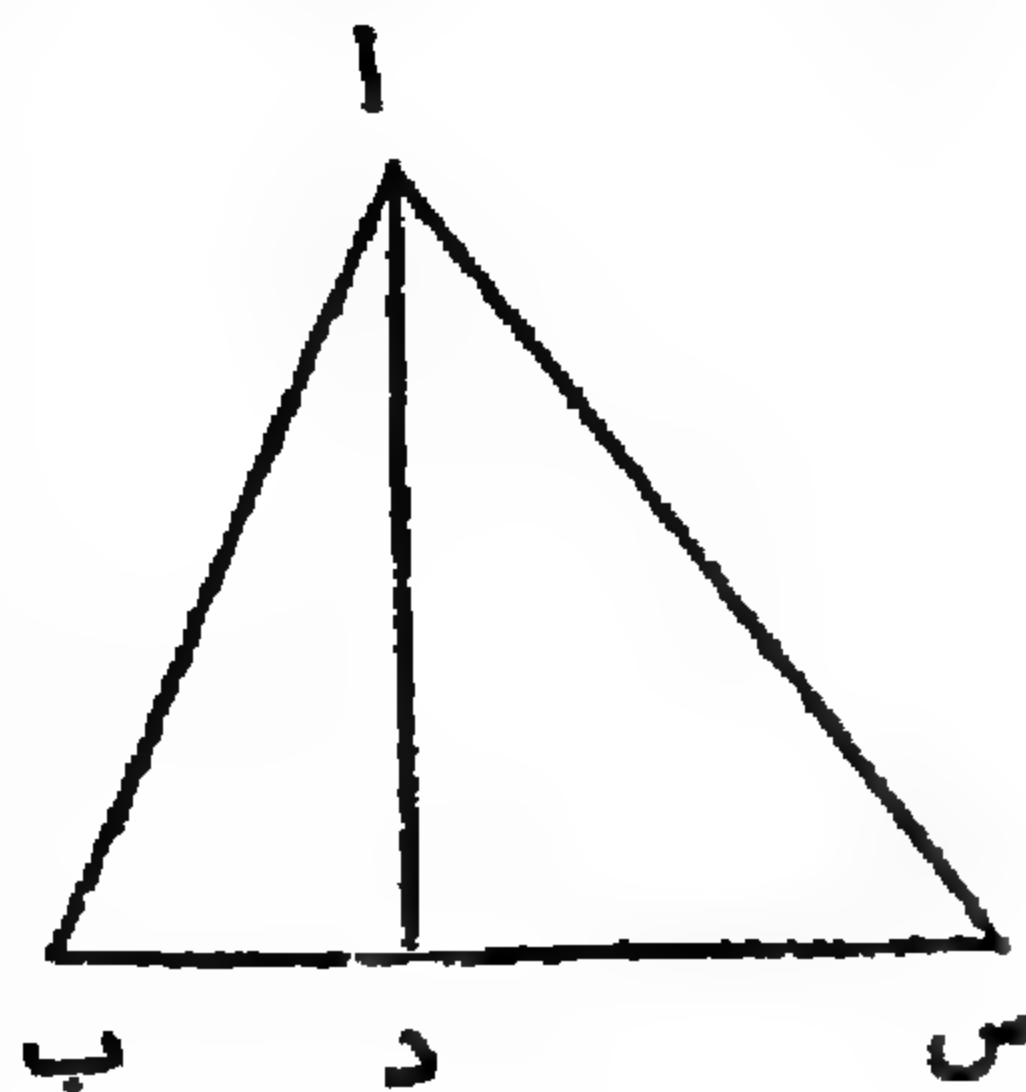
### القضية الثانية. ن

نسبة اضلاع مثلث بسيط بعضها الى بعض كنسبة جيوب الزوايا التي

تقابل تلك الاضلاع بعضها الى بعض



ليكن  $اب$  س مثلثا ومن الزاوية  $ا$  ارسم  $اد$  و  $د$  على  $ب$  س. فالمثلث  $اب$  د



له قائمة عند  $د$  ونسبة  $اب : اد :: ق : ج$  ب

ولهذا السبب ايضا  $اس : اد :: ق : ج$  س

وبالقلب  $اد : اس :: ج : س$  وبالقلب

والمساواة  $اب : اس :: ج : س$  وهكذا

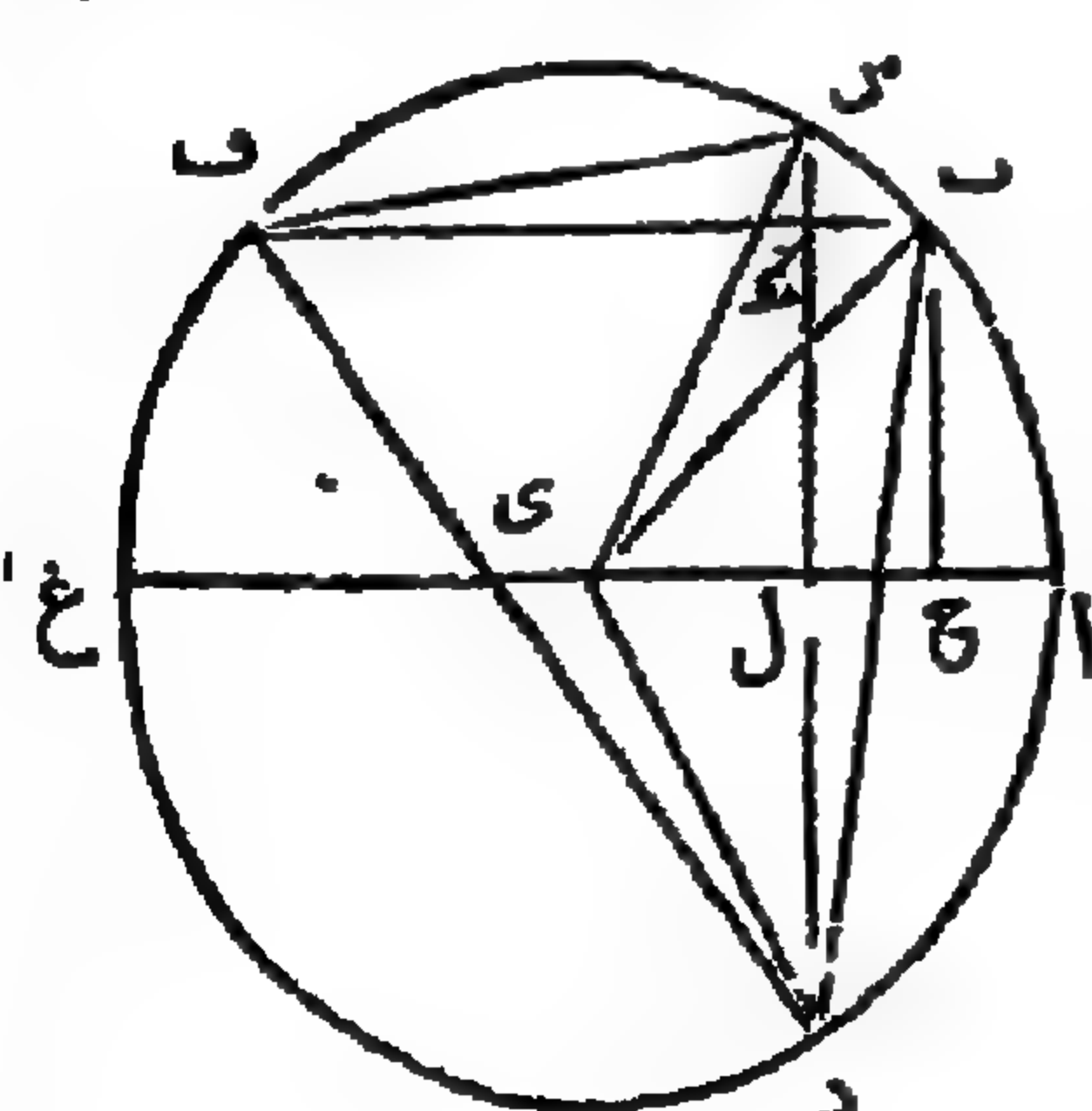
يبرهن ان  $اب : ب : س :: ج : س : جا$

### القضية الثالثة. ن

اذا فرض قوسان من دائرة تكون نسبة مجتمعي جيبهما الى فضلة جيبهما

كنسبة مماس نصف مجتمعيها الى مماس نصف فضلتهما

ليكن  $اب$  واس قوسين من الدائرة  $اب$  س  $د$  والنطة  $ي$  مركزها و  $اي$  غ



قطرها فنسبة  $جا : اس + جا : اب :: جا : س$

$- جا : اب :: مم : (اس - اب) :: مم : م$

$(اس - اب)$  ارسم  $ب$  ف حتى يوازي  $اي$  غ

ويلاقي المحيط في  $ف$  وارسم  $ب$  ح و  $س$  ل

عمودين على  $اي$ . فهما جيبا القوسين  $اب$

واس. اخرج  $س$  ل حتى يلاقي المحيط في  $د$

وارسم  $د$  ف  $دي$   $د$  ب  $ف$  س  $ي$  ب  $ي$  ز

لكون  $ي$  ل قدرسيم من المركز عمودا على  $س$  د فهو ينصف  $س$  د في النطة  $ل$

والقوس  $س$  ا د في  $ا$  و  $د$  ل  $=$  ل  $س$  الذي هو جيب القوس  $اس$ . وب  $ح$  اول  $ك$

جيب القوس  $اب$  فالخط  $د$  ك مجتمع جيب القوسين المفروضين و  $س$  ك فضلتها

و  $د$  ا ب مجتمع القوسين و  $ب$  س فضلتها. وفي المثلث  $د$  ف  $س$  لكون  $ف$  ك عمودا

على  $د$  س تكون نسبة  $د$  ك : ك س :: مم د ف ك : مم س ف ك (فرع ثالث  $ق$  ا)

ولكن مماس  $د$  ف ك  $=$  مم ا قوس  $ب$  د لان  $د$  ف ك نصف  $دي$  ب (ق ٢٠ ك ٢)

فقياسها نصف ب د . ولهذا السبب ايضا م س ف ك = م ا ب س . فنسبة د ك :  
 ك س :: م ا ب د : م ا ب س . ولكن د ك مجتمع جيب القوسين ا ب و س  
 وك س فضلتهما . وب د مجتمع القوسين ا ب و س وب س فضلتهما . فنسبة ج ا س  
 + ج ا ب : ج ا س - ج ا ب :: م ا ( ا ب + ا ب ) : م ا ( ا س - ا ب )  
 فرع اول . لكون ي ل نظير جيب ا س و ي ح نظير جيب ا ب يكون ف ك  
 مجتمعها وك ب فضلتهما . لان ف ك = ا ف ب + ي ل = ي ح + ي ل وك ب =  
 ل ح = ي ح - ي ل ونسبة ف ك : ك ب :: م ف د ك : م ب د ك ومما س د ف ك =  
 م ب د ك لان د ف ك كمال ف د ك فتكون نسبة ف ك : ك ب :: م د ف ك :  
 م ب د ك او ف ك : ك ب :: م ا القوس د ب : م ا القوس ب س . اية نسبة  
 مجتمع نظير الجيبين لقوسين الى فضلا نظير الجيبين كنسبة نظير المماس لنصف مجتمع  
 القوسين الى مماس نصف فضلتهما

فرع ثان . في المثلث القائم الزاوية ف ك د نسبة ف ك : ك د :: ق : م د ف ك  
 ولكن ف ك = نج ا ب + نج ا س وك د = ج ا ب + ج ا س وم د ف ك =  
 م ا ( ا ب + ا س ) فنسبة نج ا ب + نج ا س : ج ا ب + ج ا س :: ق :  
 م ا ( ا ب + ا س )

وهكذا بواسطة المثلث ف ك س يبرهن ان نج ا ب + نج ا س : ج ا س -  
 ج ا ب :: ق : م ا ( ا ب - ا س )

فرع ثالث . اذا كان مجتمع القوسين ا ب و س ٩٠ فمماس نصف فضلتهما اي  
 مماس ٤٥ يماثل نصف القطر . والقوس ب س لكونه فضلا د س ود ب او فضلا  
 د ب و ٩٠ فنصف القوس ب س يماثل فضلا نصف د س ونصف د ب او فضلا  
 ا س و ٤٥ . فاذا كان مجتمع قوسين ٩٠ تكون نسبة مجتمع جيب القوسين الى  
 فضلتهما كنسبة نصف القطر الى مماس فضلا احدها و ٤٥

## القضية الرابعة. ن

نسبة مجموع ضلعي مثلث الى فضلتها كماس نصف مجموع الزاويتين  
المقابلتين للضلعين الى ماس نصف فضلتها

ليكن  $AB$  م مثلثا بسيطا فنسبة  $س + ا + ب : س - ا - ب :: م : م$  (ب + م)

$م : م$  (ب - م)

لان (ق ٢)  $س : ا + ب :: ب : ج م$  ولذلك

(ق ٥ ك)  $س : ا + ب :: م : م$  (ب - م)  $س : ا - ب :: ب : ج م$

$ج ب - ج م$  وحسب القضية السابقة  $ج ب + ج م$

$ج ب - ج م :: م : م$  (ب + م)  $م : م$  (ب - م)

فاذا (ق ١ ك)  $س : ا + ب :: م : م$  (ب - م)  $س : ا - ب :: م : م$  (ب)

$س + م : م$  (ب - م)



## القضية الخامسة. ن

اذا رسم عمود من زاوية مثلث على القاعدة فنسبة مجموع قسبي القاعدة  
الى مجموع الضلعين الاخرين كنسبة فضلة الضلعين الى فضلة قسبي  
القاعدة

لأنه حسب (ق ١ ك ٦) القائم الزوايا مسطح مجموع القسمين في فضلها يعدل  
القائم الزوايا مسطح مجموع الضلعين في فضلها فحسب (ق ١ ك ٦) نسبة مجموع  
القسمين الى مجموع الضلعين كنسبة فضلة الضلعين الى فضلة القسمين

## القضية السادسة. ن

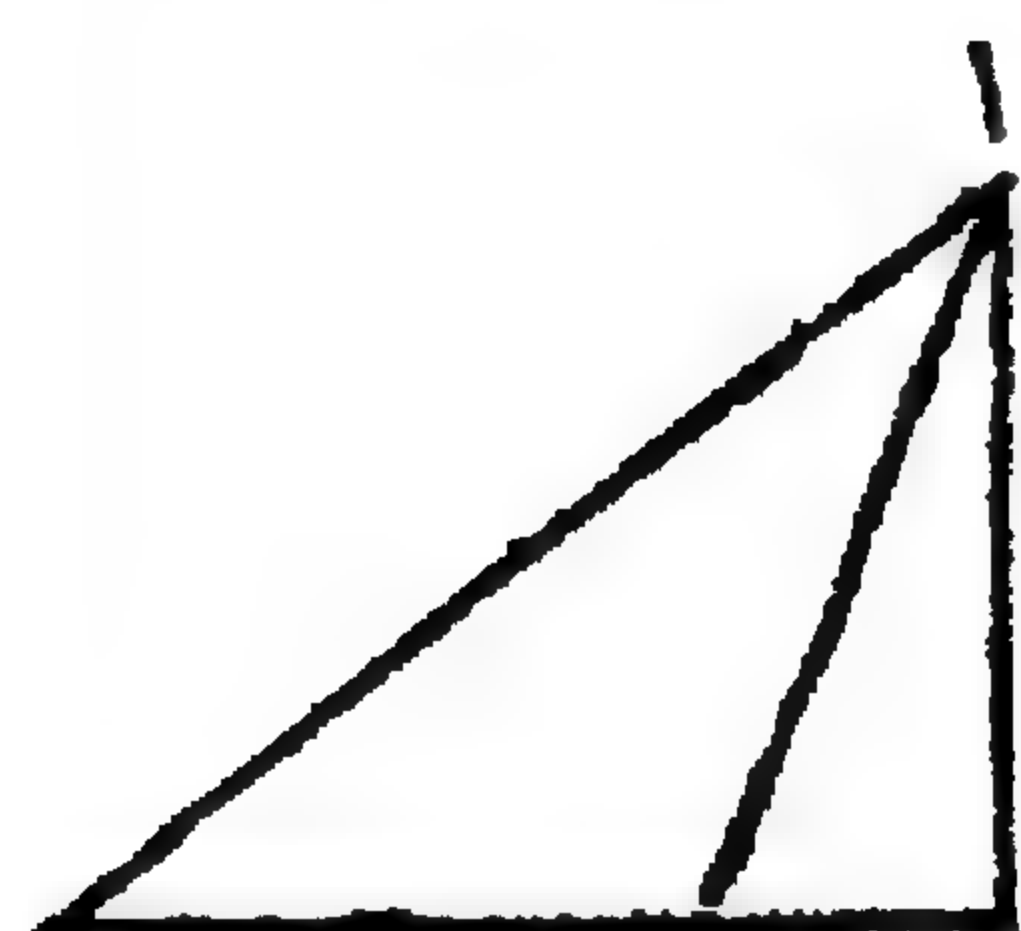
في كل مثلث نسبة مضاعف القائم الزوايا مسطح ضلعين من اضلاعه  
الى فضلة مجموع مربعيها ومربع القاعدة كنسبة نصف القطر الى نظير  
جيب الزاوية الواقعة بين الضلعين



ليكن  $اب س$  مثلثا فنسبة القائم الزوايا  $٢ اب \times ب س : (اب' + ب س')$  -  
 $اس' :: ق : نج ب$



من ا رسم ا د عمودا على ب س. فنضلة المربعين  
 على اب وب س والمربع على اس يعدل  $٢ ب س \times$   
 $ب د (ق ١٢ و ١٢ ك ٢)$  ولكن  $ب س \times با' : س$   
 $ب س \times ب د :: با' : ب د :: ق : نج ب$ . فاذا  $٢ اب س \times با' :$   
 $٢ اب س \times ب د :: ق : نج ب$  و  $٢ اب س \times ب د$  هو فضلة  $اب' + ب س'$   
 و  $اس'$  فاذا  $٢ اب \times ب س : (اب' + ب س') - اس' :: ق : نج ب$



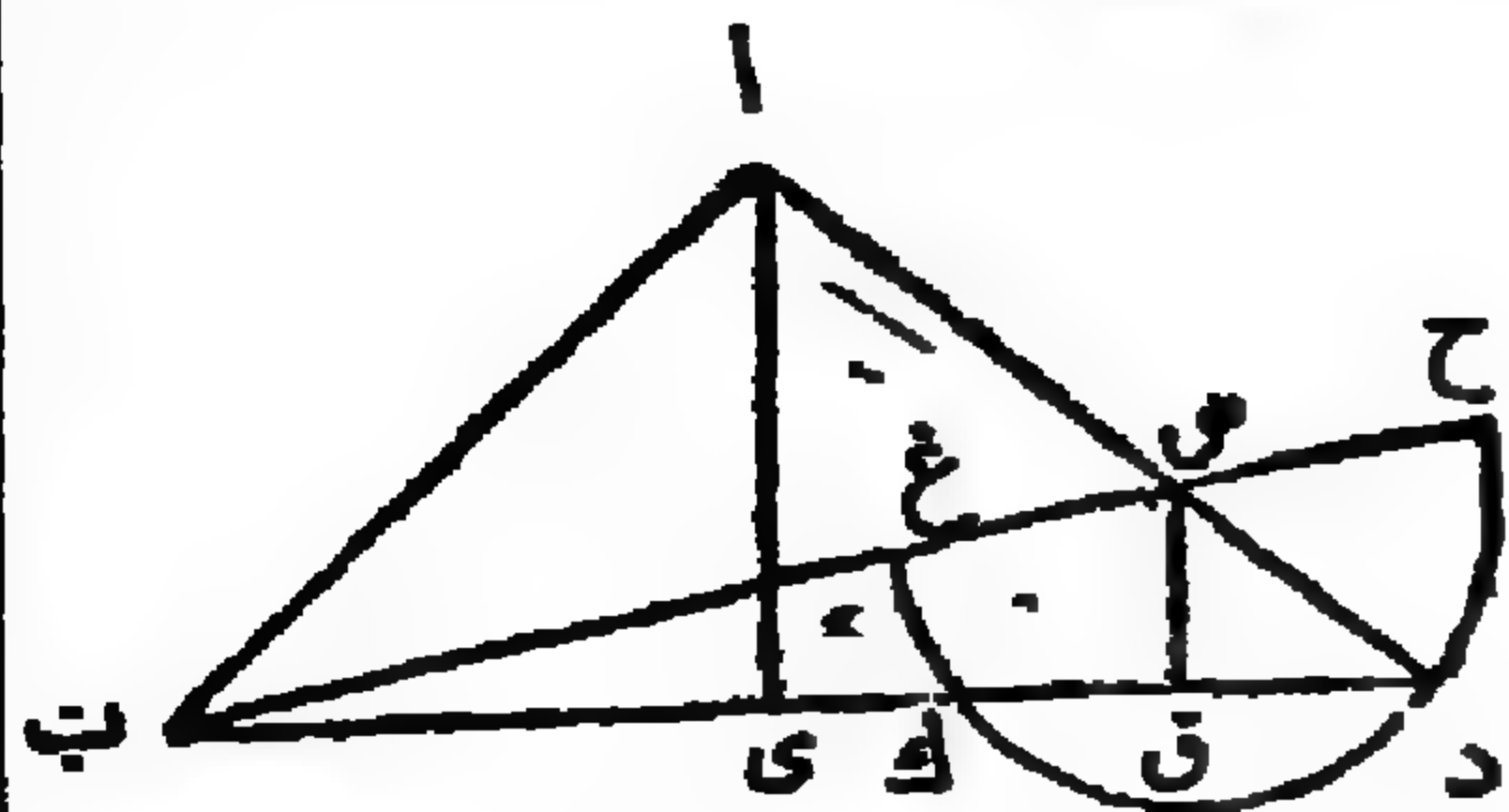
فرع. اذا فرض  $ق = ا فلنا ب د =$   
 $ب ا \times نج ب (ق ا)$  و  $٢ اب س \times ب ا \times نج ب$   
 $ب = ٢ اب س \times ب د$  فاذا كانت ب حادة لنا  
 $٢ اب س \times ب ا \times نج ب = ب س' + با' -$   
 $اس'$  واذا اضيف  $اس'$  الى الجانبين نصير  $اس' +$   
 $٢ نج ب \times ب س \times ب ا = ب س' + با'$  و طرح  $٢ نج ب \times ب س \times با'$  من  
 الجانبين نصير  $اس' = ب س' - ٢ نج ب \times ب س \times با' + با'$  فاذا  $اس' =$   
 $٢ (ب س' - ٢ نج ب \times ب س \times با' + با')$   
 واذا كانت ب منفرجة يبرهن على هذا الاسلوب ان  $اس' = ٢ (ب س' + ٢ نج ب$   
 $ب \times ب س \times با' + با')$



### القضية السابعة. ن

نسبة اربعة امثال القائم الزوايا مسطح ضلعي مثلث الى القائم الزوايا  
 مسطح الضلع الاخر مع فضلة الضلعين في ذلك الضلع الأفضلة  
 الضلعين كنسبة مربع نصف القطر الى مربع جيب نصف الزاوية  
 الواقعة بين الضلعين

ليكن اب س مثلثا قاعدة ب س واب اطول ضلعيه فنسبة ٤ اب ٥ اس :



$$(ب س + (اب - اس)) \times$$

$$(ب س - (اب - اس)) ::$$

$$\frac{ق}{٣} : (ج \frac{١}{٢} ب اس)'$$

اخرج اس الى د حتى ان اد = اب . ارس ب د وارسم اي وس ق عمودين على ب د . واجعل س مركزا وس د نصف قطري وارسم نصف الدائرة غ د ح الذي ينقطع ب د في ك وب س في غ ويلقي ب س بعد اخراجه في ح

الامر واضح ان س د هو فضلة الضلعين وب ح هو القاعدة مع فضلة الضلعين وب غ القاعدة الا فضلة الضلعين . ولكون المثلث ب ا د متساوي الساقين يكون د ي نصف ب د ود ق نصف د ك و د ي = د ق = نصف ب د - د ك (ق ٦ ك ٥) او ي ق =  $\frac{١}{٢}$  ب ك . ولكون اي يوازي س ق تكون نسبة اس : اد :: ي ق : ي د (ق ٦ ك ٦) والاشكال القائمة الزوايا اذا كانت على قطر واحد هي كنسبة قواعدھا بعضها الى بعض فنسبة اس ٥ اد : اد ٥ اد :: ي ق ٥ ي د : ي د ٥ ي د (ق ٦ ك ٦) و ٤ اس ٥ اد : اد ٥ اد :: ٤ ي ق ٥ ي د : ي د ٥ ي د وبالمبادلة ٤ اس ٥ اد : ٤ ي ق ٥ ي د :: ي د ٥ اد : ي د ٥ ي د

ولكون ٤ ي ق = ٢ ب ك و ٤ ي ق ٥ ي د = ٢ ب ك ٥ ي د = ٢ ي د ٥ ي د ٥ ب ك = د ب ٥ ب ك = ح ب ٥ ب ٥ غ فنسبة ٤ اس ٥ اد : د ب ٥ ب ك :: اد ٥ ي د : ي د . ولكن اد : ي د :: ق : ج ي اس = ج  $\frac{١}{٢}$  ب اس (ق ١) و اد ٥ ي د ٥ ق :: ق : (ج  $\frac{١}{٢}$  ب اس) فاذا (ق ١ ك ٥) ٤ اس ٥ اد : ح ب ٥ ب ٥ غ :: ق : (ج  $\frac{١}{٢}$  ب اس) او (لان اب = اد) ٤ اس ٥ اب : ح ب ٥ ب ٥ غ :: ق : (ج  $\frac{١}{٢}$  ب اس) و ٤ اس ٥ اب هو اربعة امثال القائم الزوايا مسطح ضلعي المثلث وح ب ٥ ب ٥ غ هو القائم الزوايا ب س + (اب - اس) ٥ ب س - (اب - اس)

فرع . اذا ٤ اس ٥ اد : ح ب ٥ ب ٥ غ :: ق : ج  $\frac{١}{٢}$  ب اس

### القضية الثامنة. ن

نسبة اربعة امثال القائم الزوايا مسطح ضلعي مثلث الى القائم الزوايا مسطح مجتمع الضلعين مع القاعدة في مجتمع الضلعين الا القاعدة كنسبة مربع نصف القطر الى مربع نظير جيب نصف الزاوية الواقعة بين الضلعين

ليكن ا ب س مثلثا قاعدة ب س واب اطول الضلعين الآخرين فنسبة

$$٤ \text{ ا ب } \times \text{ ا س } : (\text{ا ب } + \text{ ا س } +$$

$$\text{ ب س }) \times (\text{ ب س } - \text{ ا س } - \text{ ب س }) ::$$

$$\frac{\text{ق}^2}{٢} : (\text{ن} \times \frac{١}{٢} \text{ ب ا س})$$

اجعل س مركزا وس ب نصف

قطر ودرسم الدائرة ب ل م محيطها

يلتقي س ا بعد اخراج في ل وم.

اخرج ال الى ن حتى ان ان = ا ب

واجعل ا د = ا ب ثم ارسم اي عمودا

على ب د. ارسم ب ن وليلاق المحيط

ايضا في ف وليكن س وعمودا على

ب ن وليلاق اي في ق

الامر واضح ان م ن = ا ب + ا س + ب س ول ن = ا ب + ا س - ب س.

ولان ب د قد تنصف في ي ود ن قد تنصف في ا فالخط ب ن يوازي اي فهو

عمود على ب د والمثلثان د ا ي د ن ب متساويا الزوايا ود ن = ا د وب ن =

$$\text{ ا ي } \text{ وب ف } = \text{ ا ب } \text{ و } = \text{ ا ق ي } \text{ و ف ن } = \text{ ا ق}$$

ولكون ا ق س اي د متساويي الزوايا تكون نسبة ا س : ا د :: ا ق : ا ي

والاشكال القائمة الزوايا بعضها الى بعض اذا كانت على علو واحد هي كتواعدها

بعضها الى بعض (ق ا ك ٦) فنسبة ا س : ا د :: ا ق : ا ي : ا ي



وبالمبادلة اس × اد : اق × اى :: اد : اى و ٤ اس × اد : ٤ اق × اى ::  
 اد : اى . ولكن ٤ اق × اى = ٢ اق × ٢ اى = ن ف × ن ب = م ن × ن ل  
 فاذا ٤ اس × اد : م ن × ن ل :: اد : اى ولكن اد : اى :: ق : نج د اى =  
 نج د ب اى (ق ا) . فاذا ٤ اس × اد : م ن × ن ل :: ق : نج د ب اى  
 و ٤ اس × اد هو اربعة امثال القائم الزوايا سطح اس × اب (لان اد = اب)  
 وم ن × ن ل هو القائم الزوايا سطح الضلعين مع القاعدة في الضلعين الا القاعدة  
 فرع اول . اذا ٢ اس × اب : م ن × ن ل :: ق : نج د ب اى  
 فرع ثان . حسب القضية السابقة ٤ اس × اب : (ب س + (اب - اس)) ×  
 (ب س - (اب - اس)) :: ق : (نج د ب اى) وقد تبين في هذه القضية  
 ان ٤ اس × اب : (اب + اس + ب س) × (اب + اس - ب س) ::  
 ق : (نج د ب اى) فبالمساواة (اب + اس + ب س) × (اب + اس - ب س) ::  
 (ب س + (اب - اس)) × (ب س - (اب - اس)) :: (نج د ب اى)  
 (نج د ب اى) ولكن نسبة نظير جيب قوس الى جيب القوس كنسبة نصف  
 القطر الى جاس ذلك القوس فاذا (اب + اس + ب س) × (اب +  
 اس - ب س) : (ب س + (اب - اس)) × (ب س - (اب - اس)) ::  
 ق : (م د ب اى) و ٢ (اب + اس + ب س) × (اب + اس - ب س) ::  
 ٢ (ب س + (اب - اس)) × (ب س - (اب - اس)) :: ق : م د ب اى

### سابقة ثانية

اذا فرض مقداران غير متساويين فنصف مجتمعهما مع نصف فضلتهما  
 يعدل اكبرهما ونصف مجتمعهما الا نصف فضلتهما يعدل اصغرهما

ليكن اب وب س مقدارين وليكن س ب د ي  
 اب اكبرهما . نصف اس في د واجل اى يعدل ب س . فالامر واضح ان اس

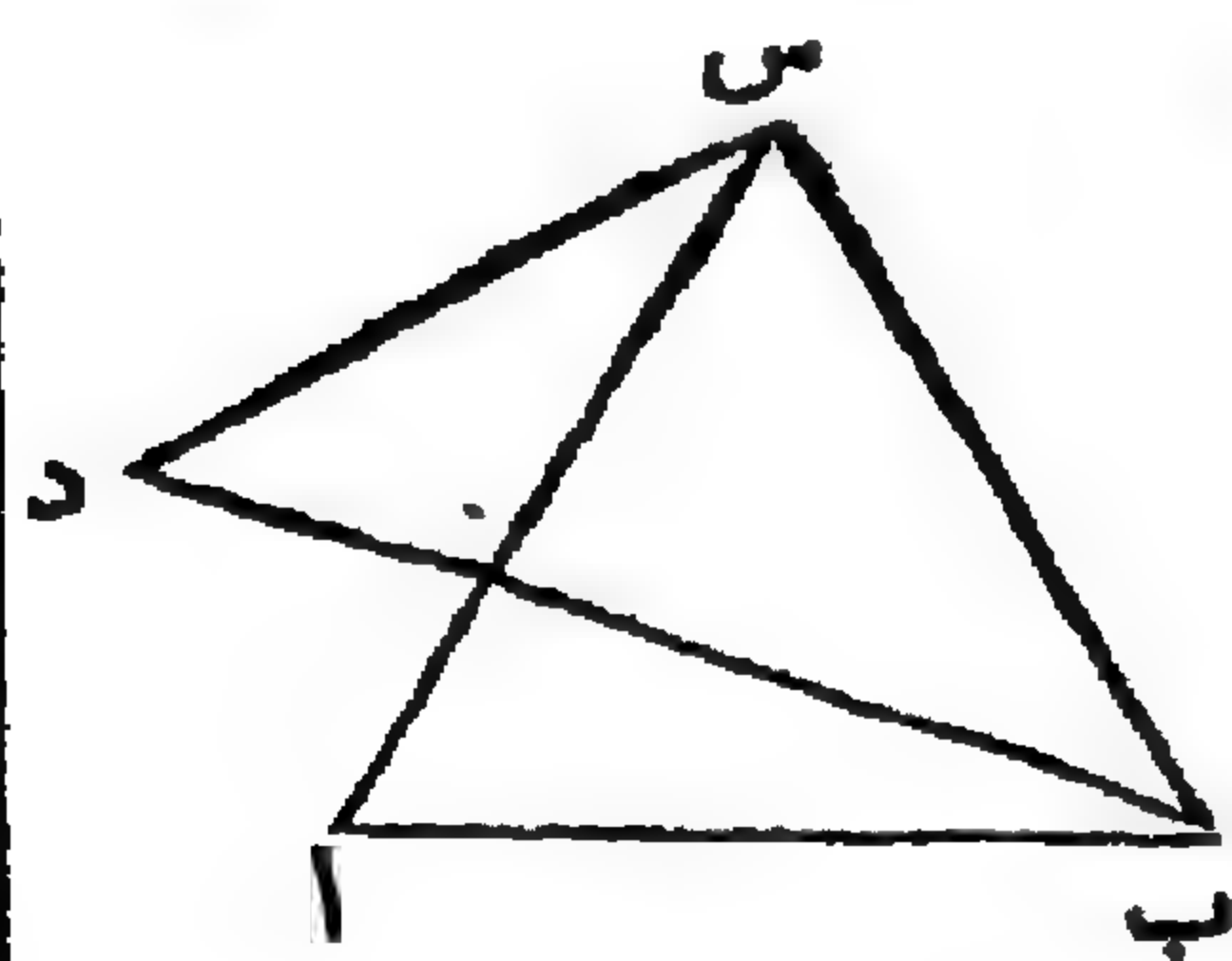
هو مجتمع المقدارين وى ب فضلتهما. ولكون اس قد تنصف في د ا د = د س  
واى = ب س فاذا دى = د ب ودى او د ب نصف فضلة المقدارين. ولكن  
ا ب = ب د ودا اى نصف المجتمع مع نصف الفضلة وب س = نصف المجتمع د س  
الا نصف الفضلة ب د

فرع. اذا فرض مجتمع مقدارين وفضلتهما يمكن استعمال المقدارين لان نصف  
المجتمع مع نصف الفضلة هو الاكبر ونصف المجتمع الا نصف الفضلة هو الاصغر  
(انظر الجبر والمقابلة وجه ١٢٤)

### القضية التاسعة. ن

اذا كانت نسبة اطول ضلعي مثلث الى اقصرهما كنصف القطر الى  
ماس زاوية ما تكون نسبة نصف القطر الى ماس فضلة تلك الزاوية  
ونصف قائمة كماس نصف مجتمع الزاويتين عند قاعدة المثلث الى ماس  
نصف فضلتهما

ليكن ا ب س مثلثا و ب س وس اضلعين من اضلاعه و ا ب قاعدته وليكن  
ب س اطول من س ا. ارسم س د عمودا على  
ب س وليعدل س ا. ارسم د ب. فالمثلث  
ب س د قائم الزاوية ونسبة ب س : س د ::  
ق ا : م س ب د (ق ا) فالزاوية س ب د  
هي الزاوية التي تكون نسبة ماسها الى نصف



القطر كالضلع س د او س ا الى ب س او كنسبة اقصر الضلعين الى اطولها  
ولكن ب س + س د : ب س - س د :: م ا : (س د ب + س ب د) :  
م ا : (س د ب - س ب د) (ق ٥) وايضا ب س + س ا : ب س - س ا :: م ا :  
(س ا ب + س ب ا) : م ا : (س ا ب - س ب ا) فبالمساواة (لان س د = س ا)  
م ا : (س د ب + س ب د) : م ا : (س د ب - س ب د) :: م ا : (س ا ب + س ب ا) :  
م ا : (س ا ب - س ب ا) ولكن الزاويتان س د ب + س ب د = ٩٠° فنسبة م ا

(س دب + س ب د) : مم  $\frac{1}{4}$  (س دب - س ب د) :: ق  $\frac{1}{4}$  : مم (٤٥° - س ب د)  
(ق ٢ فرع ٢)

فنسبة  $\frac{ق}{ا} : م (٤٥^\circ - ش ب د) :: م \frac{ا}{ا} : (س اب + س با) : م \frac{ا}{ا}$   
 (س اب - ش با) وقد تبرهن ان ب س : س ا ::  $\frac{ق}{ا} : م س س ب د$   
 فرع. اذا قُرض ب س وس ا والزاوية عند س فلكي نجد الزاويتين عند ا  
 وب استعلم زاوية وسهاى مثلاً حتى تكون نسبة ب س : س ا ::  $\frac{ا}{ق} : م س ي$   
 فتكون نسبة  $\frac{ق}{ا} : م (٤٥^\circ - ي) :: م \frac{ا}{ا} : (ا + ب) : م \frac{ا}{ا} (ا - ب)$  فتجد  
 ا وب حسب السابقة الثانية

## القسم الثاني

## قواعد حل العليات

قواعد قياس المثلثات مخنونة في عملية واحدة وهي هذه، في مثلث بسيط ذي  
سنة اشياء اي ثلاثة اضلاع وثلاث زوايا مفروض منها ثلاثة اشياء واحد منها ضلع  
مطلوب واحد من الثلاثة الأخر او كلها

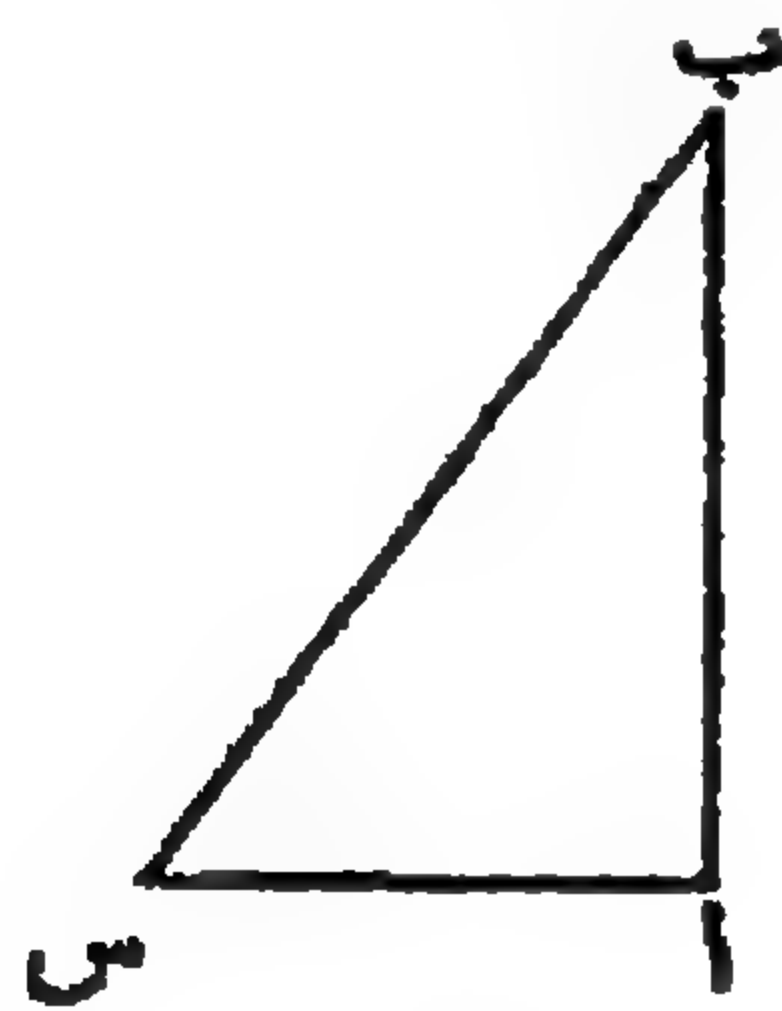
## العملية الأولى

في مثلث بسيط قائم الزاوية مفروض ثلاثة اشياء واحد منها ضلع  
مطلوب الثلاثة الاخر

في مثلث قائم الزاوية اذا فرضت احدى الحادتين تعرف الاخرى لانها كمال  
الاولى وجيب احدى الحادتين هو نظير جيب الاخرى وقد جمعت قواعد الحل  
حسب اختلاف الاشياء المفروضة في هذا الجدوال. فالعمود الاول منه يدل على  
المفروض والثاني على المطلوب والثالث على النسبة التي بها تحل العملية



المفروض	المطلوب	الحل
س ب وب	اس	١ ق: ق: ب: ب: س: اس
اي الوتر وزاوية	اب	٢ ق: ق: ب: ب: س: اب
اس وس	ب س	٣ ق: ق: ب: ب: س: ب س
اي ضلع واحد الحادتين	اب	٤ ق: ق: م: م: س: اس: اب
س ب وب ا	س	٥ س: ب: ب: ا: ق: ق: ب: س
اي الوتر وضع	اس	٦ ق: ق: ب: ب: س: س: ب: اس
اس واب	س	٧ اس: اب: ق: ق: م: م: س
اي الضلعان	س ب	٨ ق: ق: ب: ب: س: س: ب



تنبيهات، اذا فرض اس وس نجد الوتر ب س بواسطة القاطع ايضا لان  
 س ا: س ب: ق: ق: قاطع س فلنا ق: ق: قاطع س: اس: س ب  
 واذا فرض ب س واب نجد اس كما في الجدول او بواسطة (ق ٤٧ ك ١) لان  
 اس = ب س - ب ا واس = ب س - ب ا وايضا حسب (ق ٥  
 ك ٢ فرع) ب س - ب ا = (ب س + ب ا) × (ب س - ب ا) فاذا اس =  
 (ب س + ب ا) × (ب س - ب ا) وهذه الاخيرة اسهل اذا قصد حل  
 العملية بالانساب

إذا فرض  $اس$  و  $اب$  يوجد  $ب$   $س$  حسب (ق ٤٧ ك ١) لأن  
 $ب س = ب ا + ا س$  وإذا قصد حل العملية بالانساب فالاسهل  
 ان يطلب أولاً  $اس$   $س$  هكذا  $اس : اب :: ق : م$   $س$  ثم  $نجس : ق ::$   
 $اس : س ب$

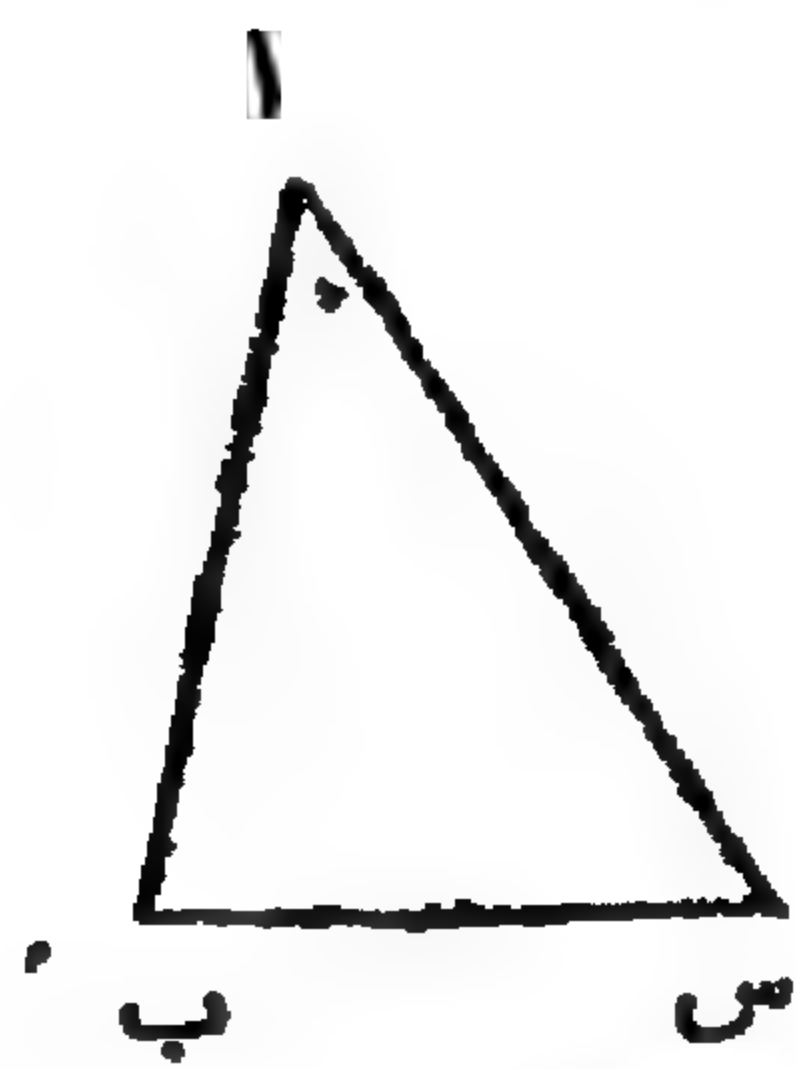
### العملية الثانية

في مثلث حاد الزوايا مفروض ثلاثة اشياء واحد منها ضلع مطلوب  
 الثلاثة الأخر

لهذه العملية ثلاث حالات

#### الحالة الاولى

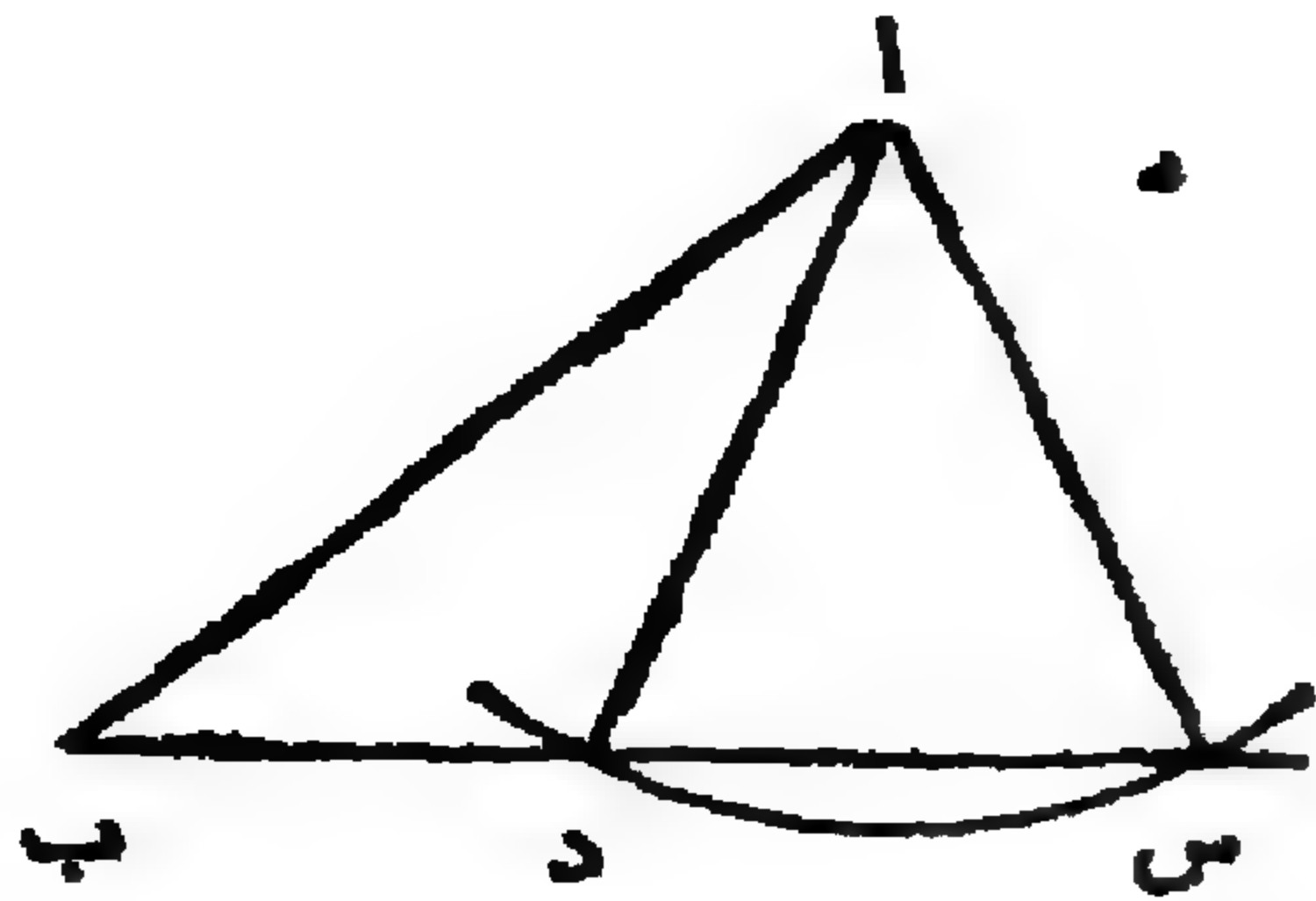
مفروض زاويتان  $ا$  و  $ب$  والضلع  $اب$ . مطلوب الضلعان الاخران  
 من  $ا$  و  $ب$  نستعلم  $س$  لانها متم  $ا + ب$  ولما (ق ٢)  $جس : جا :: اب :$   
 $ب س وجس : جب :: اب : اس$



#### الحالة الثانية

مفروض الضلعان  $اب$  و  $اس$  والزاوية  $ب$  التي تقابل احدهما. مطلوب  $ا$  و  $س$   
 والضلع الاخر  $ب س$   
 لكي نستعلم  $س$  لما  $اس : اب :: جب : جس$  وايضاً  $= 180^\circ - ب -$   
 $س$  ثم  $ج ب : جا :: اس : س$  حسب الحالة الاولى  
 في هذه الحالة حيث يستعلم جيب  $س$  فالجيب المذكور في الجداول قد يكون  
 لحادة او لمنفرجة متم الحادة فتكون  $س$  حادة او منفرجة لانه اذا كانت  $اس$  اقصر

من ا ب يوجد مثلثان لها الضلعان ا ب ا س والزاوية عند ب متساوية ويكونان غير متساويين لان الزاوية التي تقابل ا ب في الواحد هي متم التي تقابلة في الاخر كما يتضح من هذا الشكل



اجعل ا مركزا واس نصف قطر  
وارسم قوسا يقطع ب س في د وارسم ا د  
فالامر واضح ان المثلثين ا ب س ا ب د  
لها الزاوية عند ب والضلع ا ب مشتركان  
بينها والضلعان ا س ا د متساويان

ولكن ب د لا يعدل ب س والزاوية ب س ا لا تعدل ب د ا وب د ا د لا تعدل  
ب ا س لان ا س ب ا د ب كل واحدة منها متم الاخرى لان ا د س متساوي  
الساقين واس د = ا د س وبالقاعدة المذكورة سابقا توجد ا س ب ا و ا د ب  
ومن هاتين توجد ب ا س وب ا د لان ب ا س متم ا ب س + ا س ب  
(ق ٢٢ ك ١) فحيث هو جيب ا ب س + ا س ب. ولكن ب ا د هي فضلة ا س ب  
و ا ب س لانها فضلة ا د س و ا ب س لان ا د س او ا س د = ا ب س + ب ا د  
(ق ٢٢ ك ١) فلكي يستعلم ب س بعد استعلام س لنا ج س : ج د (س + ب) ::  
ا ب : ب س وايضا ج س : ج د (س - ب) :: ا ب : ب د  
فاذا كان ا ب اطول من ا س تكون القضية ملتبسة والا فغير ملتبسة

### الحالة الثالثة

مفروض ضلعان ا ب واس والزاوية بينهما المطلوب الاخران ب وس  
والضلع الاخر ب س

اولا ا ب + ا س : ا ب - ا س :: م ا (س + ب) : م ا (س - ب)  
وب = ا (س + ب) + ا (س - ب) و س = ا (س + ب) - ا (س - ب)  
حسب السابقة الثانية

ولكي نجد ب س بعد استعلام ب لنا ج ب : ج ا :: ا س : ب س  
ويستعلم ب س ايضا بدون استعلام ب وس هكذا حسب (ق ٦) ب س =

$$ا ب - ٢ ن ج ا \times ا ب \times ا س + ا س^2$$

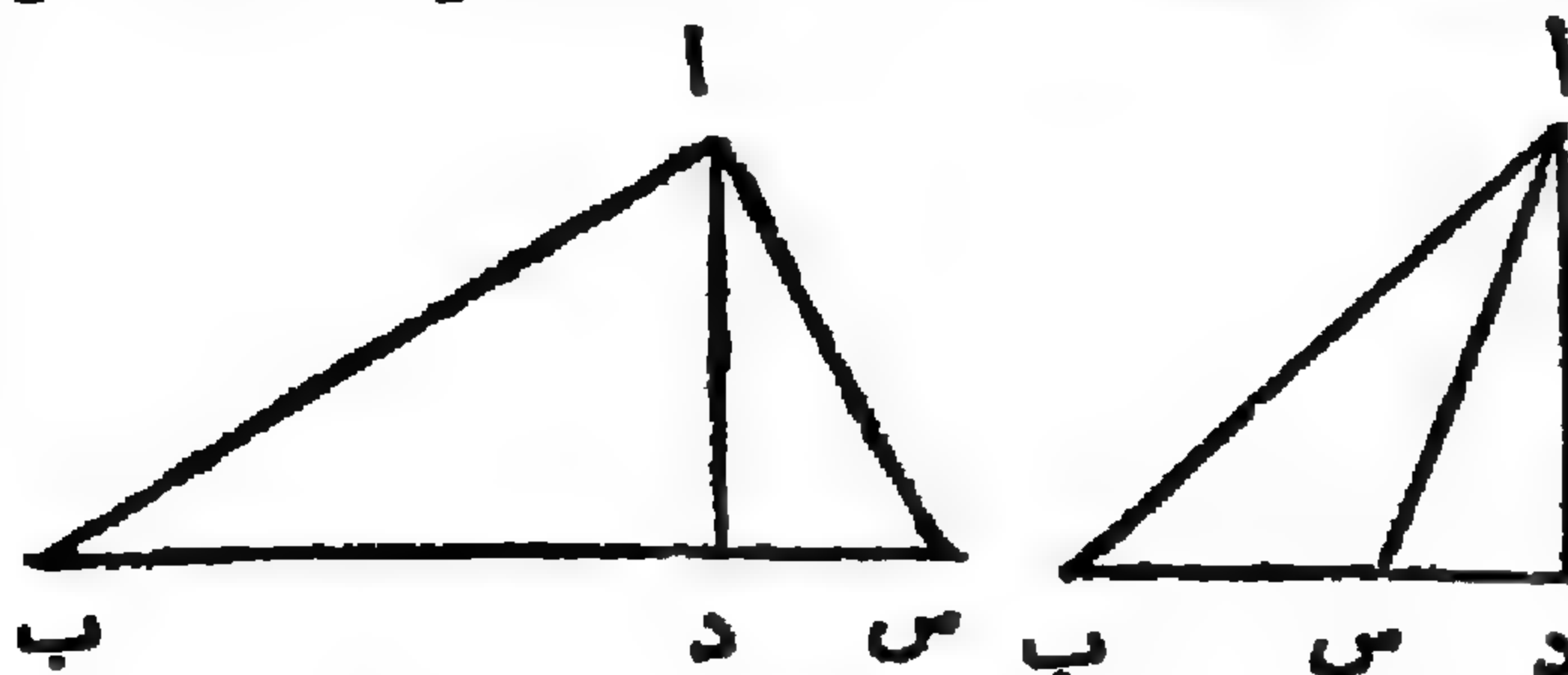


### الحالة الرابعة

مفروض الاضلاع الثلاثة اب ب س اس مطلوب الزوايا الثلاث

#### حل اول

استعلم كمية ما وسطها ف متى تكون نسبة ب س : ب ا + ا س :: ب ا - ا س :  
ف فتكون ف مجتمع  
قسي القاعدة ب د  
د س او فضلها (ق ٥)  
فان كانت ف اكبر من



ب س فهي مجتمع ب د و د س وب س فضلها وان كانت ف اصغر من ب س  
فيكون ب س مجتمع التسمين وف فضلها وعلى كلتا الحالتين يُعلم مجتمع ب د و د س  
وفضلها فيعلم ب د و د س (سابقة ثابتة)

ثم (ق ١) س ا : س د :: ق : نجس وب ا : ب د :: ق : ج ب فتعلم  
س وب ومنها تستعلم ا

#### حل ثان

ليكن د فضلة ا ب و ا س ثم (ق ٧ فرع ١)  $\frac{ا ب \times ا س}{(ب س + د) \times (ب س - د)} :: ق : ج ا$  ب ا س

#### حل ثالث

ليكن ص مجتمع الضلعين ب ا و ا س ثم (ق ٨ فرع ١)  $\frac{ا ب \times ا س}{(ب س + ص) \times (ب س - ص)} :: ق : نج ا$  ب ا س

#### حل رابع

ليكن د و ص كما تقدم ثم (ق ٨ فرع ٢)  $\frac{ا ب \times ا س}{(ب س + د) \times (ب س - د)} :: ق : م ا$  ب ا س



اس ق =  $\frac{1}{2}$  (ق ٩ ك ١ مضافات) فلنا حسباً تقدم نجد ب د اونج ٣٠ =

$\frac{1}{2} (1 + \frac{1}{2}) = \frac{3}{4} = \frac{15}{20}$  وعلى هذا الاسلوب نجد ١٥ =  $\frac{1}{2} (1 + \frac{1}{2})$  (ونج ٣٠)

ونجد ٣٠ =  $\frac{1}{2} (1 + \frac{1}{2})$  الى اخره وعلى هذا الاسلوب نجد نظير

جيب ٣ ٤٥ ١ ٥٢ ٣٠ حتى يتنصف القوس ١٢ مرة فيكون لنا جيب

٥٢ ٤٤ ٣ ٤٥ ومن نظير جيب قوس يستعمل الجيب لانه اذا طرح مربع

نظير الجيب من مربع نصف القطر اى من واحد يبقى مربع الجيب وبالنجد يعرف

الجيب فيعرف جيب ٥٢ ٤٤ ٣ ٤٥

٣ ثم ان نسبة جيوب الاقواس الصغيرة جداً بعضها الى بعض هي كسبة

الاقواس بعضها الى بعض تقريباً لانه كلما تعددت اضلاع شكل في دائرة قل الفرق

بين الضلع والقوس الذي يقابله ومتى كان القوس صغيراً جداً يكون الفرق بينه

وبين جيبه قليلاً جداً اى نسبة جيب قوس صغير جداً الى القوس نسبة متساوية اى

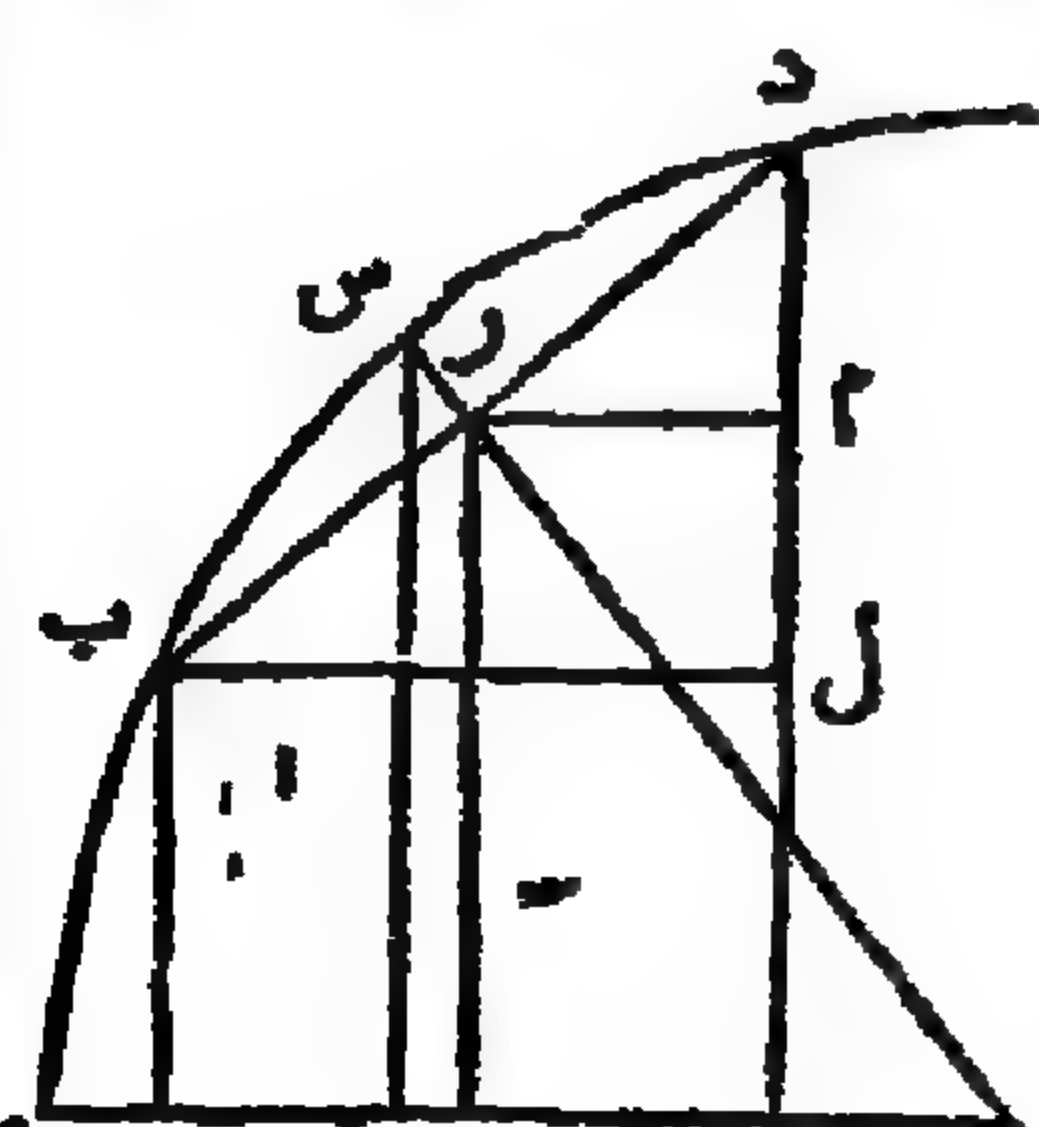
نسبة قوس الى قوس كجيب الاول الى جيب الثاني فمن جيب ٥٢ ٥٤ ٣

٤٥ يستعمل جيب ١ = ٠.٠٠٠٢٩٠٨٨٨٢

٤ بعد استعمال جيب ١ يستعمل جيب ٢ ٣ الخ بهذه النظرية

### نظرية

ليكن اب اس اد ثلاثة اقواس وليكن ب س فضلة الاول والثاني ولبعدل



س د فضلة الثاني والثالث فنسبة نصف القطر الى

نظير جيب الفضلة المشتركة ب س كجيب القوس

اس الى نصف مجموع جيبى اب واد

ارسم س ي الى المركز ليكن ب ف س ع

دح عموديات على اى فهي جيوب الاقواس اب

اس اد ارسم ب د وليلاق س ي في ر ارسم رك ي ح كع فا

عموداً على اى وب ل رم عمودين على دح فلكون القوس ب د قد تنصف في

س يكون س ي س عموداً على ب د وينصفه في ر وب ر جيب ب س او س د وى ر

نظير جيبه ولان ب د قد تنصف في ر ورم يوازي ب ل (ق ٢ ك ٦) فقد تنصف



ل د في م. ولكن ب ف = ح ل وب ف + د ح = د ح + ح ل = د ل + ل ح =  
 ل م + ل ح = م ح او ل ك راي رك =  $\frac{1}{2}$  (ب ف + د ح). ولكون  
 المثلثين س غ ي رك ي متساويي الزوايا تكون نسبة س ي : ر ي :: س غ : رك  
 وقد تبرهن ان ي ر = نج ب س ورك =  $\frac{1}{2}$  (ب ف + د ح) فنسبة  $\frac{ق}{2}$  :  
 نج ب س :: ج ا س :  $\frac{1}{2}$  (ج ا ب + ج ا د)

فرع. اذا وقعت النقطة ب على النقطة ا لنا  $\frac{ق}{2}$  : نج ب س :: ج  
 ب س :  $\frac{1}{2}$  ج ب د اي نسبة نصف القطر الى نظير جيب قوس كنسبة جيب القوس  
 الى نصف جيب مضاعف القوس فاذا فرض قوس = ا لنا  $\frac{1}{2}$  ج ا = ل ج ا ×  
 نج ا او جيب ل = ل ج ا × نج ا و ج ا = ل ج ا × نج ا فن جيب ا  
 ونظير جيبها يوجد جيب ل

ثم  $\frac{ق}{2}$  : نج ا :: ج ا :  $\frac{1}{2}$  (ج ا + ل ج ا) او ج ا : ل ج ا + ل ج ا = ل نج ا  
 ا + ل ج ا و بطرح ج ا من الجاهلين نصير ج ا = ل نج ا × ل ج ا - ل ج ا  
 وهكذا ج ا = ل نج ا × ل ج ا - ل ج ا  
 و ج ا = ل نج ا × ل ج ا - ل ج ا

ج ا = ل نج ا × ل ج ا - ل ج ا  
 وهكذا لاستعلام جيوب الاقواس التي فضلتها اكثر من ا. ليكن ا + ب + ا  
 ل ب ثلاثة اقواس فضلتها اكثر من ا فحسب النظرية السابقة  $\frac{ق}{2}$  : نج ب ::  
 ج ا (ا + ب) :  $\frac{1}{2}$  (ج ا + ج ا (ا + ل ب)) فاذا كان نصف القطر واحدا لما ج ا +  
 ج ا (ا + ل ب) = ل نج ب × ج ا (ا + ب) او ج ا (ا + ل ب) = ل نج ب ×  
 ج ا (ا + ب) - ج ا

وعلى هذا الاسلوب يصطنع جدول جيوب ونظير جيوب لاي قوس فرض من صفر  
 الى ٩٠°. و جدول المماسات يصطنع باقسام جيب قوس على نظير جيبه لان م ا =  
 نج ا. وبعد استعلام المماسات الى حد ٤٥° تستعلم البقية الى حد ٩٠°  
 بقاعدة اخرى اسهل. لان مماس قوس اكبر من ٤٥° يعدل نظير المماس لقوس  
 تحت ٤٥° مثل ما كان الاول فوق ٤٥° اي ماس ٥٠° = نظير ماس ٤٠° ونصف

القطر متناسب متوسط بين الماس ونظير الماس. فاذا فرضت قوس ما  
 $\text{و } 40^\circ = \text{د لنا م } (40^\circ - \text{د}) : 1 :: 1 : \text{م } (40^\circ + \text{د}) \text{ وم } (40^\circ + \text{د}) =$

$$\frac{1}{4(40^\circ - \text{د})}$$

القطاع نستعلم حسب (حد ١ فرع ٢) حيث يبرهن أن نصف القطر متناسب

متوسط بين نظير جيب قوس وقاطع أي قاطع  $\frac{1}{\text{بجأ}}$

سم الجيب يوجد بطرح نظير الجيب من نصف القطر

ه يستخرج من النظرية السابقة بعض العبارات السهلة الاستعمال في حل

العمليات

أولاً. اذا فرض القوس  $\text{اس} = \text{ا}$  و  $\text{ب} = \text{س}$  ونصف القطر  $\text{س} = \text{ر}$

فحينئذ  $\text{ا} = \text{ا} + \text{ب} = \text{ا} + \text{ب} = \text{ا} - \text{ب}$  ولنا ما تقدم برهانه

$\text{ا} : \text{نجوب} :: \text{جا} : \text{إج} (ا + \text{ب}) + \text{إج} (ا - \text{ب})$  أي

$\text{جا} \times \text{نجوب} = \text{إج} (ا + \text{ب}) + \text{إج} (ا - \text{ب})$

ثانياً. لأن  $\text{ب}$  ف  $\text{رك}$  دح متوازية والمخاطرات  $\text{ب}$  د ف ح قطعاً متناسباً

فالخط  $\text{ف ح}$  الذي هو فضلة  $\text{ف ي ح}$  قد تنصف في  $\text{ك}$  وكما نبرهن في النظرية

$\text{ك ي}$  هو نصف مجموع  $\text{ف ي و ح ي}$  أي نظير الجيبين للقوسين  $\text{اب}$  و  $\text{اد}$  وبمشابهة

المثلثين  $\text{ي غ س ي ك}$  نسبة  $\text{ي س} : \text{ي ر} :: \text{ي غ} : \text{ي ك}$ . و  $\text{ي غ}$  هو نظير جيب

$\text{اس}$  فاذا  $\frac{\text{ق}}{\text{س}} : \text{نجوب س} :: \text{نجاب س} : \frac{\text{ا}}{\text{س}} + \frac{\text{ا}}{\text{س}} \text{نجاب اب او}$

$\text{ا} : \text{نجوب} :: \text{نجاب} : \text{إج} (ا + \text{ب}) + \text{إج} (ا - \text{ب})$  فاذا

$\text{نجاب} \times \text{نجوب} = \text{إج} (ا + \text{ب}) + \text{إج} (ا - \text{ب})$

ثالثاً. المثلثان  $\text{ردم س ي غ}$  متشابهان. لأن  $\text{ك ر م}$  قائمة و  $\text{ي ر د}$  قائمة فاذا

طرحت الزاوية  $\text{ي ر م}$  فالزاوية  $\text{درم} = \text{ي رك او ي س غ}$  والزاويتان  $\text{درم ر}$

$\text{س غ ي}$  متساويتان لانها قائمتان ففي المثلثين  $\text{ردم س غ ي}$  الاضلاع التي تلي

الزوايا المتساوية هي متناسبة و  $\text{ي س} : \text{س غ} :: \text{درم} : \text{ورم}$  هو نصف فضلة

نظير الجيبين  $\text{ف ي ي ح}$  فلنا

$\frac{\text{ق}}{\text{س}} : \text{جا س} :: \text{جب س} : \frac{\text{ا}}{\text{س}} - \frac{\text{ا}}{\text{س}} \text{نجاب اد او}$

١: جا: جب:  $\frac{1}{2}$  نج (ا-ب) -  $\frac{1}{2}$  نج (ا+ب) وايضا

جا  $\times$  جب =  $\frac{1}{2}$  نج (ا-ب) -  $\frac{1}{2}$  نج (ا+ب)

رابعاً. في المثلثين ي س غ درم نسبة ي س: ي غ: رد: دم ودم هو نصف فضلة الجيبين دح وب ي فاذا

ق:  $\frac{1}{2}$  نج اس: جب س:  $\frac{1}{2}$  جاد -  $\frac{1}{2}$  جاب او

١: نج ا: جب:  $\frac{1}{2}$  ج (ا+ب) -  $\frac{1}{2}$  ج (ا-ب) فاذا

نجا  $\times$  جب =  $\frac{1}{2}$  ج (ا+ب) -  $\frac{1}{2}$  ج (ا-ب)

خامساً. اذا كان ا وب قوسين وكان نصف القطر واحداً فلنا

(١) جا  $\times$  نج ب =  $\frac{1}{2}$  ج (ا+ب) +  $\frac{1}{2}$  ج (ا-ب)

(٢) نجا  $\times$  نج ب =  $\frac{1}{2}$  نج (ا-ب) +  $\frac{1}{2}$  نج (ا+ب)

(٣) جا  $\times$  جب =  $\frac{1}{2}$  نج (ا-ب) -  $\frac{1}{2}$  نج (ا+ب)

(٤) نجا  $\times$  جب =  $\frac{1}{2}$  ج (ا+ب) -  $\frac{1}{2}$  ج (ا-ب)

ومن هذه الاربع يُستخرج اربع آخر

بجمع الاولى والرابعة جا  $\times$  نج ب + نجا  $\times$  جب = ج (ا+ب)

بطرح الرابعة من الاولى جا  $\times$  نج ب - نجا  $\times$  جب = ج (ا-ب)

بجمع الثانية والثالثة نجا  $\times$  نج ب + جا  $\times$  جب = نج (ا-ب)

بطرح الثالثة من الثانية نجا  $\times$  نج ب - جا  $\times$  جب = نج (ا+ب)

سادساً. اذا فرض ا+ب=ص و ا-ب=د فحسب الاولى من العبارات

السابقة وحسب السابقة الثانية  $\frac{ص+د}{2} = 1$  وب  $\frac{ص-د}{2}$

فجيب  $\frac{ص+د}{2}$  > نج  $\frac{ص-د}{2}$  =  $\frac{1}{2}$  ج ص +  $\frac{1}{2}$  ج د. ولكن ص ود

دالآن على اي قوسين كانا فيمكن ان يسمى ا وب كما في العبارات السابقة. فلنا

ج  $\frac{ا+ب}{2} \times \frac{ا-ب}{2}$  =  $\frac{1}{2}$  ج ا +  $\frac{1}{2}$  ج ب

او  $\frac{ا+ب}{2} \times \frac{ا-ب}{2}$  = ج ا + جب. ومن العبارة الثانية

السابقة لنا  $\frac{ا+ب}{2} \times \frac{ا-ب}{2}$  = نج ب + نجا ومن الثالثة لنا



$$٢ \text{ ج } \frac{ا+ب}{٣} \times \text{ ج } \frac{ا-ب}{٣} = \text{ نج } ب - \text{ نج } ا \text{ ومن الرابعة لنا}$$

$$\text{ نج } ا = \frac{ا+ب}{٣} \times \text{ ج } \frac{ا-ب}{٣} = \text{ ج } ا - \text{ ج } ب$$

وفي هذه العبارات حسب القوس ب اقصر من القوس ا  
سابعاً. وعلى هذا الاسلوب نستخرج عبارات دالة على مماثلات اقواس لان  
مماثل قوس يعدل الجيب مقسوماً على نظير الجيب

$$\text{ م } (ا+ب) = \frac{\text{ ج } (ا+ب)}{\text{ نج } (ا+ب)} \text{ وقد تبرهن ان}$$

$$\text{ ج } (ا+ب) = \text{ ج } ا \times \text{ نج } ب + \text{ نج } ا \times \text{ ج } ب \text{ وايضاً ان}$$

$$\text{ نج } (ا+ب) = \text{ نج } ا \times \text{ نج } ب - \text{ ج } ا \times \text{ ج } ب \text{ فاذا}$$

$$\text{ م } (ا+ب) = \frac{\text{ ج } ا \times \text{ نج } ب + \text{ نج } ا \times \text{ ج } ب}{\text{ نج } ا \times \text{ نج } ب - \text{ ج } ا \times \text{ ج } ب} \text{ ثم بقسمة الصورة}$$

والمخرج على نج ا  $\times$  نج ب لنا

$$\text{ م } (ا+ب) = \frac{\text{ ج } ا + \text{ ج } ب}{\text{ نج } ا \times \text{ نج } ب + ١}$$

$$\text{ وهكذا } \text{ م } (ا-ب) = \frac{\text{ ج } ا - \text{ ج } ب}{\text{ نج } ا \times \text{ نج } ب + ١}$$

(٨) اذا تحولت الثالثة من العبارات السابقة (٦) على هذا المتوال فلنا

$$\frac{\text{ ج } ا + \text{ ج } ب}{\text{ ج } ا - \text{ ج } ب} = \frac{\text{ نج } ا + \text{ نج } ب}{\text{ نج } ا - \text{ نج } ب} \text{ وحسب (ق ٢ فرع ١)}$$

$$\text{ وبالفرع الثاني } \frac{\text{ نج } ا + \text{ نج } ب}{\text{ نج } ا - \text{ نج } ب} = \frac{\text{ م } (ا+ب)}{\text{ م } (ا-ب)}$$

$$\frac{\text{ ج } ا + \text{ ج } ب}{\text{ ج } ا - \text{ ج } ب} = \frac{\text{ م } (ا+ب)}{\text{ م } (ا-ب)} \text{ اولاً } \frac{\text{ ق }}{٣} = ١$$

$$\frac{\text{ ج } ا + \text{ ج } ب}{\text{ ج } ا - \text{ ج } ب} = \frac{\text{ م } (ا+ب)}{\text{ م } (ا-ب)}$$

نتبيه. اذا تحولت هذه المعادلات الى نسب فلا بد من اعادة

الواحد اي  $\frac{\text{ ق }}{٣}$  الذي قد ترك للاختصار لكونه واحداً فلا يعتد به عند

الضرب ولكن يعتبر في النسب

# اصول قياس المثلثات الكروية

## القضية الاولى

اذا قُطِعَتْ كُرَّةٌ بِسَطْحٍ مَارٍ بِمَرْكَزِهَا فَالْقَطْعُ دَائِرَةٌ مَرْكَزُهَا مَرْكَزُ الْكُرَّةِ  
وهي تعدل الدائرة التي بدورانها رُسِمَتِ الْكُرَّةُ

لأن كل المخطوط المستقيمة المرسومة من مركز الكرة الى سطحها تعدل نصف  
قطر نصف الدائرة المجددة الكرة (حد ٧ ك ٢ مضافات) فوضع تقاطع سطح بسيط  
وسطح الكرة خطاً في سطح واحد وكل نقطة منه على بعد واحد من مركز الكرة فهو  
محيط دائرة (حد ١١ ك ١) مركزها مركز الكرة ونصف قطرها نصف قطر الكرة او  
نصف قطر نصف الدائرة التي بدورانها أُحْدِثَتِ الْكُرَّةُ فتعدل الدائرة التي كان  
نصف الدائرة المجددة نصفها

## حدود

١ كل دائرة حادثة من قطع كرة بسطح بسيط مَارٍ بِمَرْكَزِهَا نَسْبِيٌّ دَائِرَةٌ عَظِيمَةٌ  
فرع. كل الدوائر العظيمة لكرة واحدة متساوية وتنصف بعضها بعضاً لأن  
انصاف اقطارها متساوية كما تقدم برهاناً وخطاً تقاطعها قطر لكل واحدة منها  
٢ قطب دائرة عظيمة هو نقطة في سطح الكرة وجميع المخطوط المستقيمة المرسومة  
منها الى محيط الدائرة متساوية

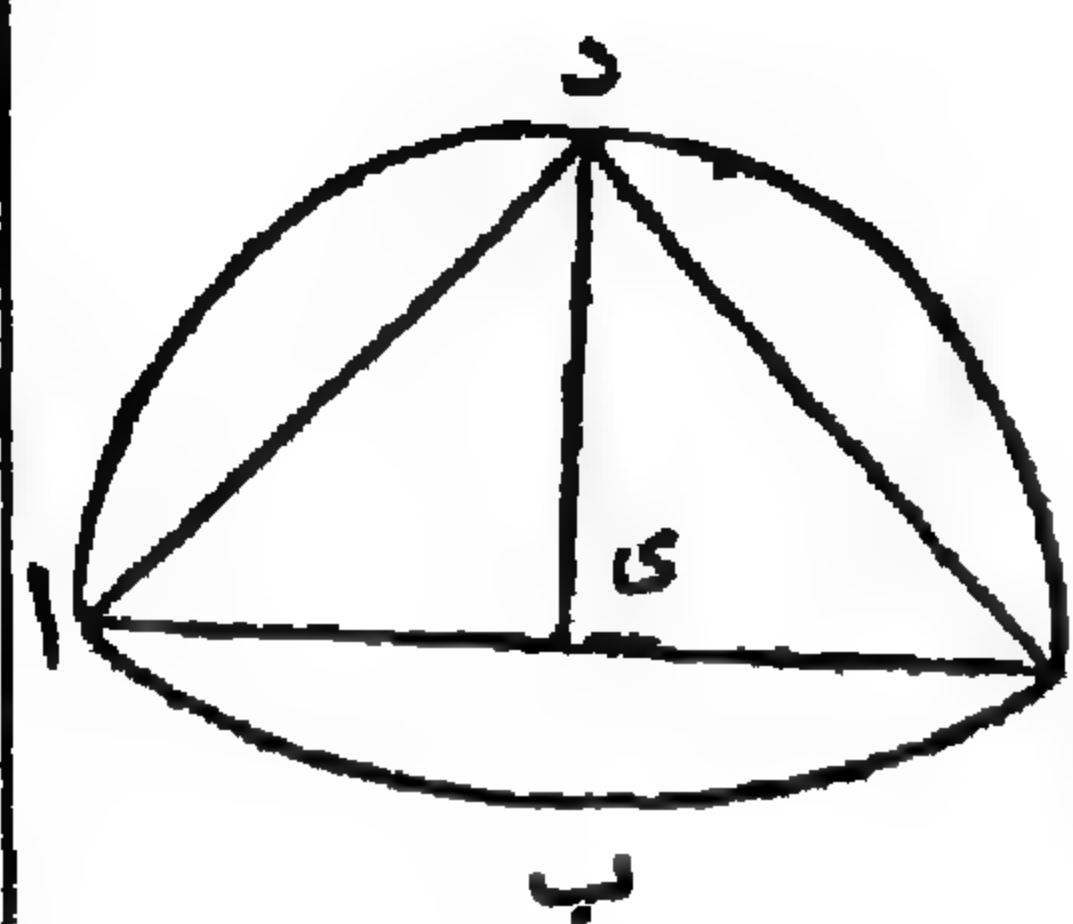
٣ الزاوية الكروية هي زاوية على سطح كرة واقعة بين قوسين من دائرتين  
عظيمتين تتقاطعان وهي تعدل ميل سطحَي هَاتَيْنِ الدائرتين احدهما على الآخر

٤ المثلث الكروي هو شكل على سطح كرة واقع بين ثلاثة اقواس من ثلاث  
دوائر عظيمة كل واحد منها اقل من نصف دائرة

## القضية الثانية

قوس دائرة عظيمة واقع بين قطب دائرة اخرى عظيمة ومحيطها هو  
مربع دائرة

لكن اب س دائرة عظيمة ود قطبها فاذا مرّ س د قوس دائرة عظيمة في د  
 ولاقي اب س في س فالقوس د س ربع دائرة  
 الدائرة التي س د قوس منها لتلاقي اب س  
 ايضاً في ا وليكن اس موضع تقاطع هاتين  
 الدائرتين العظيمتين فهو مَرَّ في ي مركز الكرة.  
 ارسم دا د س. الخط ا د = د س (حدّ ٢)



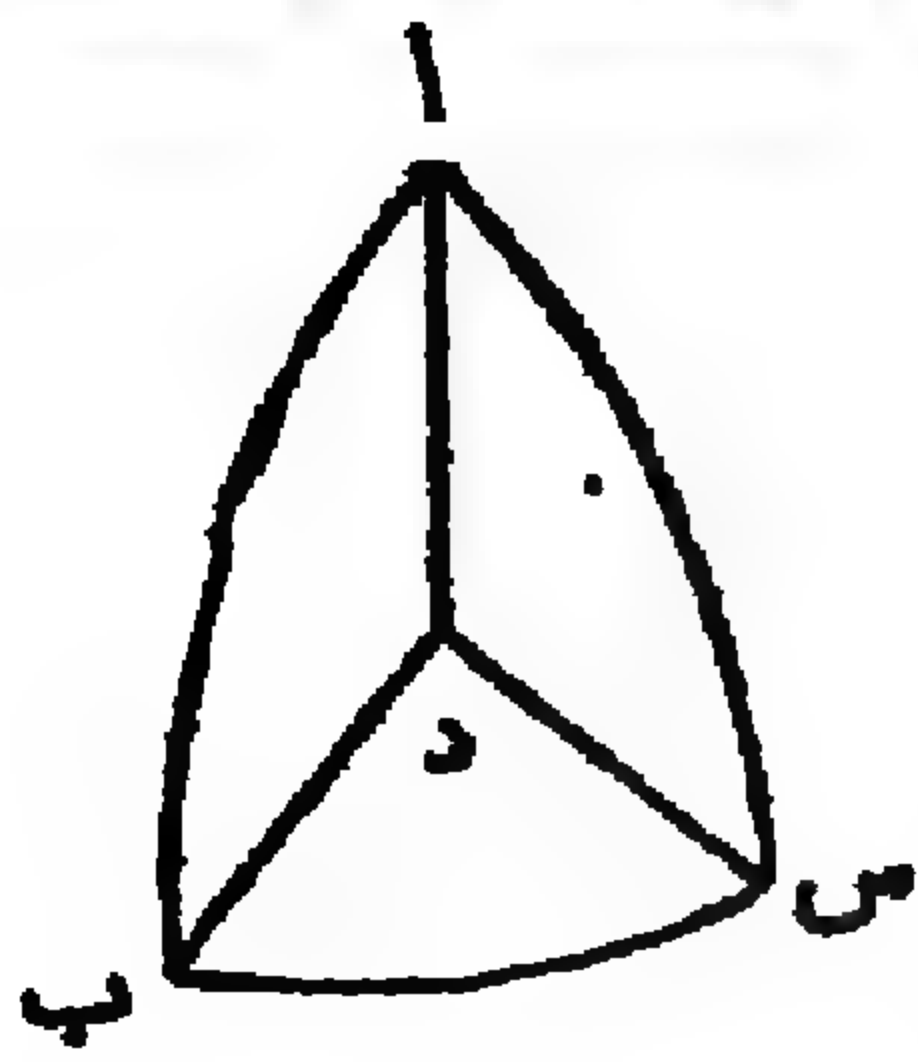
فرع أول. اذا رسم دى فالزاوية دى قائمة ودى عمودي على كل خط يلاقيه في سطح الدائرة اب م فهو عمود على ذلك السطح (ق ٤ ك ٢ مضافات)  
فالخط المستقيم المرسوم من قطب دائرة عظيمة الى مركز الكرة هو عمود على سطح تلك الدائرة. وبالفعل كل خط من مركز كرة عموداً على سطح دائرة عظيمة يلاقى سطح الكرة في قطب تلك الدائرة

فرع ثانٍ. الدائرة  $ab$   $s$  لها قطبان واحد على الجانب الواحد والاخر على  
 الجانب الاخر من سطحها وهما نهايتا قطر الكرة العمودي على سطح  $ab$   $s$ . ولا يمكن  
 ان تكون نقطتان اخريان قطبي الدائرة  $ab$   $s$

## القضية الثالثة

إذا كان قطب دائرة عظيمة في نقطة تقاطع دائرتين أخريين عظيمتين  
فالقوس من الدائرة الأولى الواقع بين الأخرين هو قياس الزاوية  
الكروية الحادثة بينها رأسها عند القطب الذي هو نقطة التقاطع  
ليكن مركزا ب و ب ١ س ١ دائرتين عظيمتين تتقاطعان في أ وليكن ب س





قوس دائرة اخرى عظيمة قطبها ا. فالقوس ب س هو

قياس الزاوية الكروية ب ا س

ارسم ا د ب د س. لان ا قطب ب س فالقوس

ا ب ربع دائرة واس كذلك (ق ٢) و ا د ب ا د س

قائمتان. فالزاوية س د ب هي ميل سطح دائرة القوس

ا ب على دائرة القوس اس (حد ٢) و (حد ٤ ك ٢ م) وتعديل الزاوية الكروية ب ا س

والقوس ب س تقس الزاوية ب د س فهو يقس الزاوية الكروية ب ا س ايضا

فرع. اذا كان كل واحد من القوسين ا ب ا س المتقاطعتين في اربع دائرة

تكون ا قطب الدائرة العظيمة المارة في ب وس نهايتي القوسين. لان ا ب ا س

ربعا دائرة فالزاويتان ا د ب ا د س قائمتان فالخط ا د عمود على السطح ب د س

اي على سطح الدائرة العظيمة المارة في ب وس فالنقطة ا في قطب الدائرة العظيمة

المارة في ب وس (ق ١ فرع ٢)

### القضية الرابعة

اذا كان سطح دائرة عظيمة عموديا على سطح دائرة اخرى عظيمة فمحيط

كل واحدة منها يمر بقطبي الاخرى. وبالقلب اذا مر محيط دائرة

عظيمة في قطبي دائرة اخرى عظيمة فسطح الواحدة عمودي على سطح

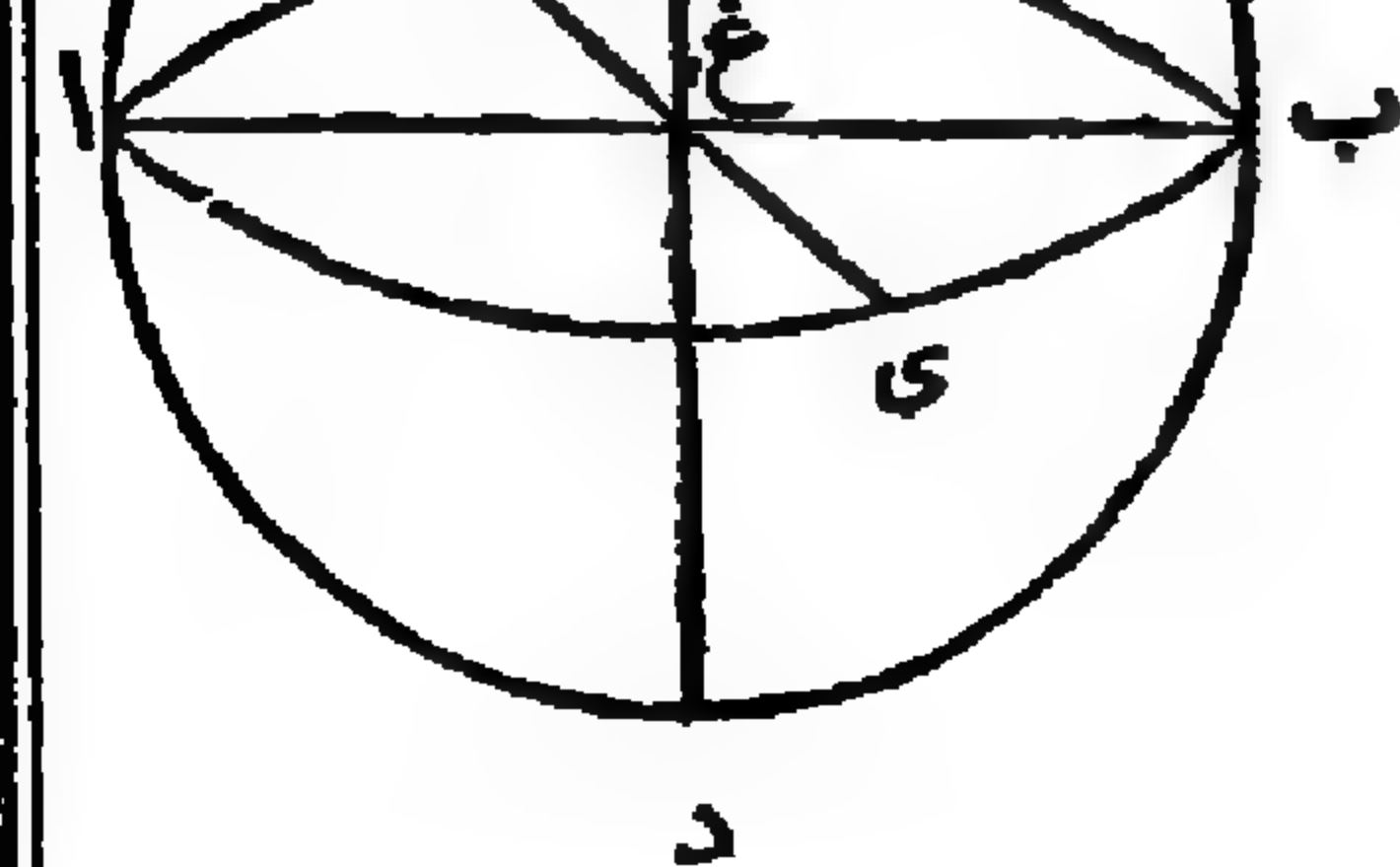
الاخرى

لكن اس ب د اى ب ق دائرتين عظيمتين سطح الواحدة عمودي على

سطح الاخرى فقطبا اس ب د هما في محيط

اى ب ق وقطبا اى ب ق في محيط

اس ب د



من غ مركز الكرة ارسم الخط ع س في

سطح اس ب د عمودا على ا ب. فلان غ س

في سطح اس ب د العمودي على اى ب ق ولانه

عمود على موضع تقاطع السطحين فهو عمود

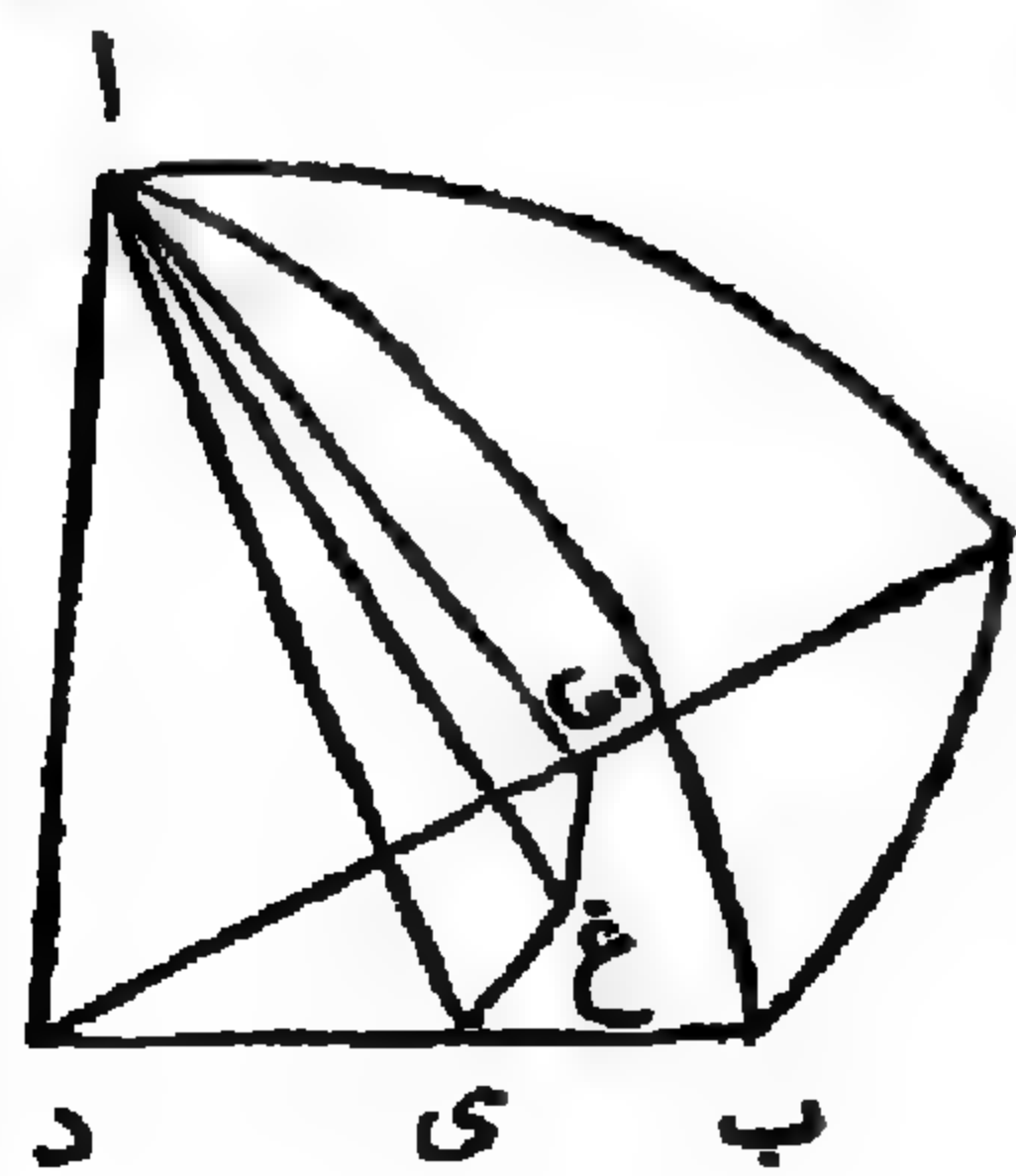
على سطح اى ب ق (حد ٢ ك ٢ م) فالنقطة س هي قطب الدائرة اى ب ق (ق ٢  
 فرع اول) واذا اخرج س غ الى تكون د قطب اى ب ق الآخر  
 وهكذا اذا رسم ع ي في سطح اى ب ق عموداً على اب واخرج الى ق يبرهن  
 ان ي وق قطبا الدائرة اس ب د وب القلب اذا كانت س قطباً للدائرة اى ب ق  
 فالدائرة العظيمة المارة في س هي عمودية على اى ب ق. لانه اذا رسم س غ من  
 القطب الى مركز الدائرة اى ب ق يكون عموداً على سطحها (ق ٢ فرع اول) فكل  
 سطح ماز في س غ (ق ١٧ ك ٢ م) هو عمودي على سطح اى ب ق و سطح اس ب د  
 هو ماز في س غ فهو عمود على اى ب ق .

فرع اول. في دائرتين عظيمتين اذا مرّت اولاهما في قطبي الثانية فالثانية  
 تمرّ بقطبي الاولى  
 فرع ثان. كل الدوائر العظيمة التي لها قطر مشترك تكون اقطابها في دائرة  
 عظيمة سطحها عمودي على ذلك القطر

### القضية الخامسة

في مثلث كروي متساوي الساقين تكون الزاويتان عند القاعدة  
 متساويتين

ليكن اب س مثلثاً كروياً. والضلع اب منه فليعدل الضلع اس منه فالزاوية  
 الكروية اب س تعدل الكروية اس ب



ليكن د مركز الكرة. ارم دب دس دا.  
 ومن ارم اق عموداً على دس واى عموداً على س  
 دب وفي السطح دب س ارم ق ع عموداً على  
 دس وي غ عموداً على دب وليتقيان في غ. ارم اغ  
 لان دى عمود على اى وي غ فهو عمود

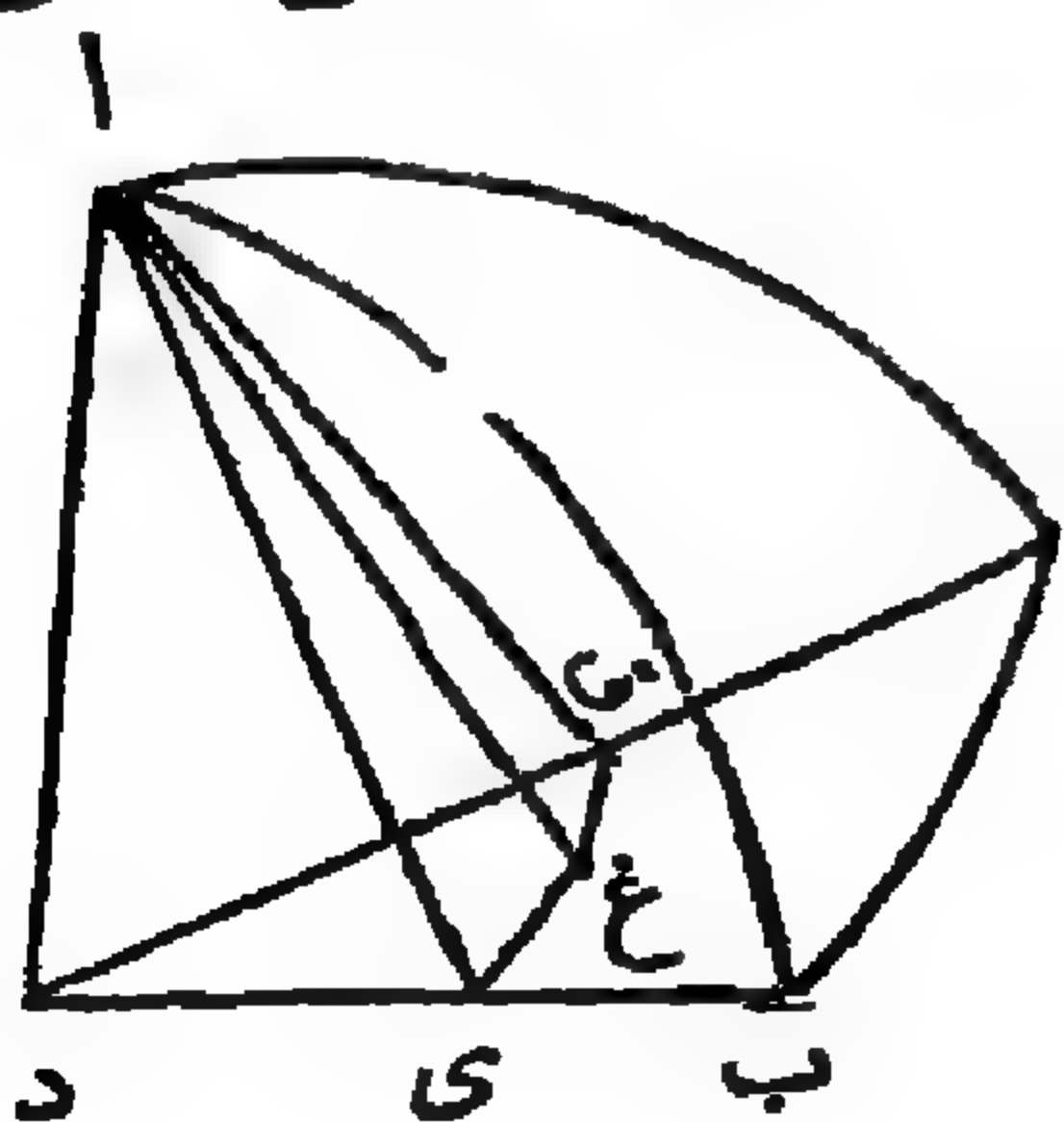
على السطح الماز بها (ق ٤ ك ٢ م) فكل سطح ماز في دى هو عمودي على سطح اى غ  
 (ق ١٧ ك ٢ م) فالسطح دب س عمودي على سطح اى غ. ولهذا السبب هو عمودي  
 على سطح اق غ ايضاً فالخط اغ الذي هو موضع تقاطع السطحين اق غ اى ع هو

عمود على سطح دب س (ق ١٨ ك ٢ م) والزوايتان اغى اغى ق قائمتان  
ولكن القوس اب يعدل القوس اس فالزاوية ادب = ادس. فالمثلثان  
ادى ادق لهما الزاويتان ادق ادى متساويتان وايضا اى د ا ق د لانهما  
قائمتان والصلع اد مشترك بينهما فالصلع اى يعدل الصلع اق (ق ٢٦ ك ١)  
ودى = دق ولان اغى اغى ق قائمتان فالمرتعان على اغى وغى يعدلان المربع  
على اى وكذلك اغ<sup>٢</sup> + غ<sup>٢</sup> ق<sup>٢</sup> = اق<sup>٢</sup> واى<sup>٢</sup> = اق<sup>٢</sup> فاذا اغ<sup>٢</sup> + غ<sup>٢</sup> ق<sup>٢</sup> = اغ<sup>٢</sup> + غ<sup>٢</sup> ق<sup>٢</sup>  
وغى<sup>٢</sup> ق<sup>٢</sup> = غى<sup>٢</sup> ق<sup>٢</sup> فالزاوية اق غ = اى غ (ق ١٨ ك ١) واق غ هي  
الحادثة بين سطح ادس و سطح دب س (حد ٤ ك ٢ م) لان اق وق غ عمودان  
على دس موضع تقاطع السطحين فالزاوية اق غ = الزاوية الكروية اس ب (حد ٣)  
ولهذا السبب ايضا اى غ = الزاوية الكروية اب س واى غ = اق غ فاذا اب س  
= اس ب

### القضية السادسة

في مثلث كروي اذا كانت الزاويتان عند القاعدة متساويتين فالمثلث  
متساوي الساقين

يبرهن كما في القضية السابقة ان اع ق اغى ق قائمتان وان اق ع اى غ  
تعدلان الحادثتين بين السطحين داس داب  
والسطح دب س وان اق ع = اى ع ولان  
اق = اى تم دق + ق ا = دا ودى + اى = س  
دا واق = اى فاذا دق = دى ودق =  
دى فالزاوية داق = داي فالقوس اب =  
القوس اس

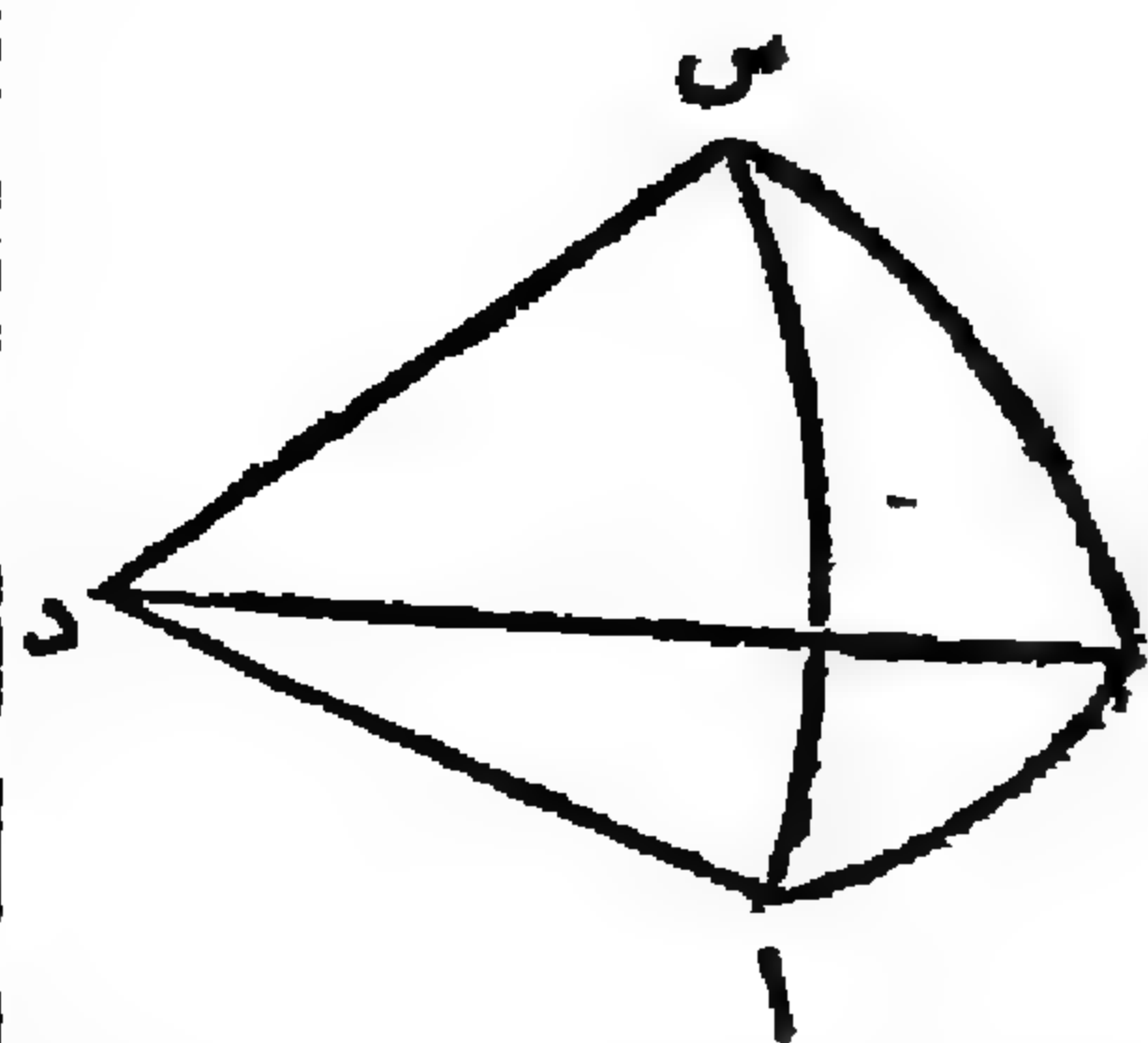


### القضية السابعة

كل ضلعين من مثلث كروي هما معاً أطول من ضلعه الثالث



ليكن  $اب س$  مثلثاً كروياً فكل ضلعين منه  $اب$  و  $ب س$  هما معاً أطول من الضلع الثالث  $ا س$



ليكن  $د$  مركز الكرة. ارسم  $د س$  و  $د ب$   
 دا. فالزاوية المجتمعة عند  $د$  يحيط بها المثلث  
 زوايا البسيطة  $ا د ب$  و  $ا د س$  و  $ب د س$  وكل  
 اثنتين منها معاً  $ا د ب$  و  $ب د س$  اكبر من  
 الثالثة  $ا د س$  (ق ٢٠ ك ٢ م) فكل اثنتين

من الاقواس  $ا ب$  و  $ا س$  و  $ب س$  التي تقيس هذه الزوايا هما معاً أطول من الثالث

### القضية الثامنة

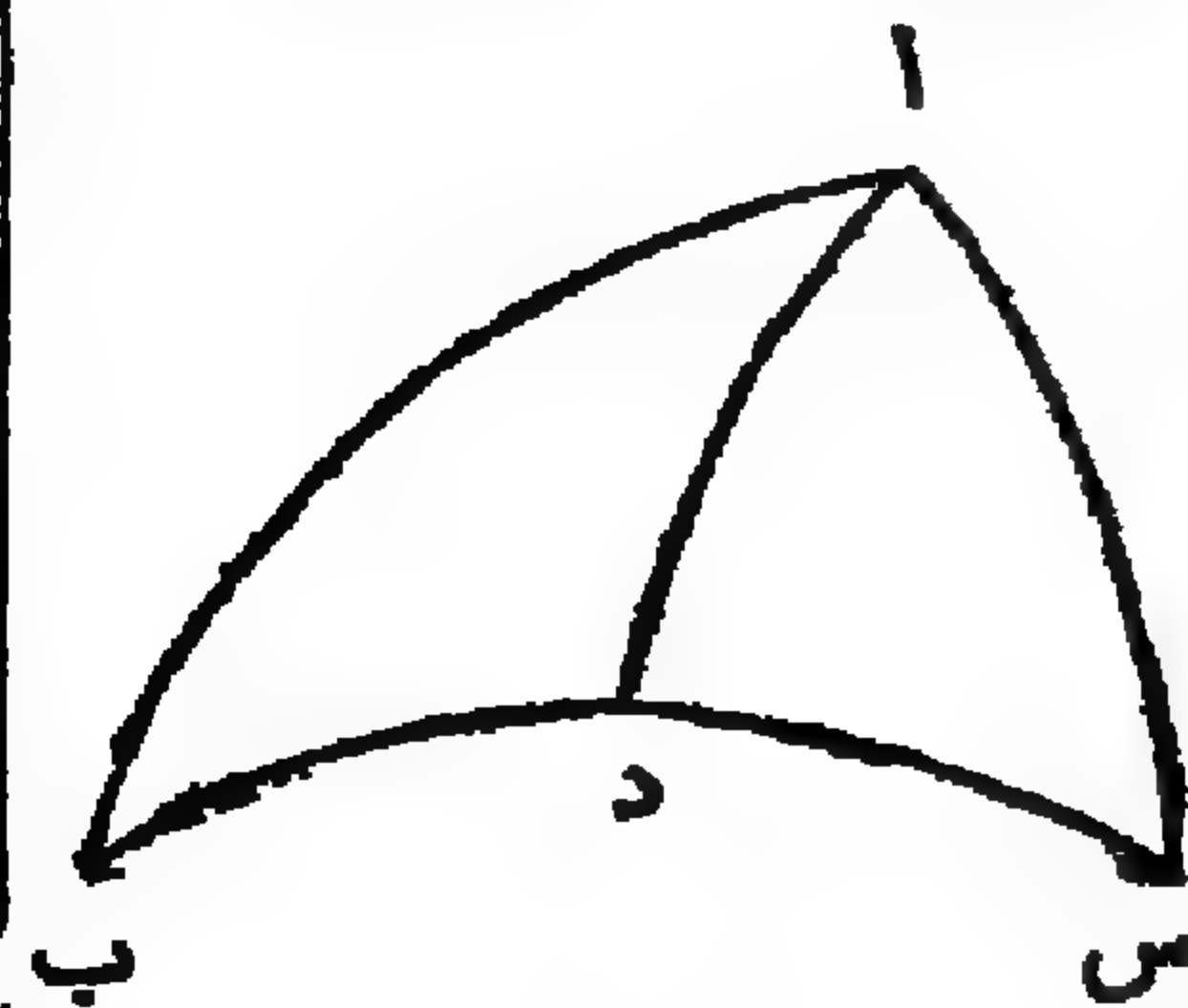
اضلاع مثلث كروي الثلاثة هي معاً اقل من محيط دائرة عظيمة

في رسم القضية السابقة ليكن  $اب س$  مثلثاً كروياً فاضلاعة الثلاثة  $ا ب$  و  $ا س$  و  $ب س$  هي معاً اقل من محيط دائرة عظيمة

ليكن  $د$  مركز الكرة فالزوايا البسيطة التي تحيط بالزاوية المجتمعة عند  $د$  هي معاً  
 اقل من اربع زوايا قائمة (ق ٢١ ك ٢ م) فالاقواس التي تقيسها هي معاً اقل من  
 اربعة ارباع دائرة او اقل من محيط الدائرة التي مركزها  $د$  ونصف قطرها  $ا د$

### القضية التاسعة

في مثلث كروي الزاوية الكبرى تقابل الضلع الاطول وبالعكس



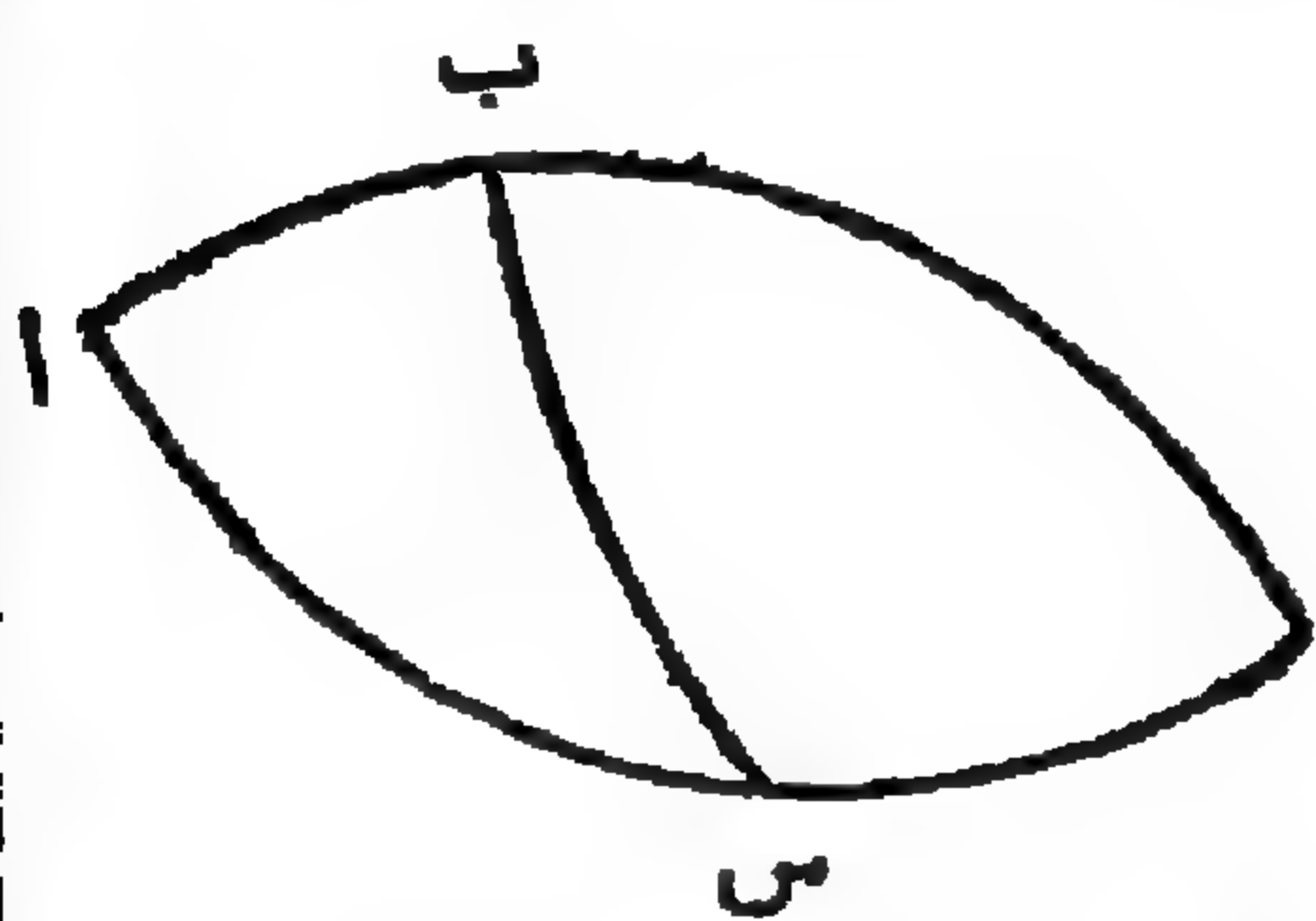
ليكن  $اب س$  مثلثاً كروياً فالزاوية الكبرى  
 ا تقابل الضلع الاطول  $ب س$ . اجعل الزاوية  
 $ب ا د$  تعدل الزاوية عند  $ب$  فالضلع  $ب د = ا د$   
 (ق ٦) و  $ا د + د س = ب س$  ولكن  $ا د + د س$   
 (د س)  $< ا س$  (ق ٧) فاذا  $ا ب س < ا س$

و  $ب س$  يقيس الزاوية عند  $ا$ . واما قلب هذه القضية فقد سبق برهانه في ق ١٩ ك ١

القضية العاشرة

إذا كان مجتمع ضلعي مثلث كروي أكثر من نصف دائرة تكون كل واحدة من الزاويتين الداخليتين عند القاعدة أكبر من الخارجة المقابلة عند القاعدة. وإذا عدل مجتمعها نصف دائرة فكل واحدة من الداخليتين تعدل الخارجة. وإذا كان مجتمعها أقل من نصف دائرة فكل واحدة من الداخليتين أصغر من الخارجة. وإيضاً مجتمع الداخليتين عند القاعدة أكبر من قائمتين أو يعدل قائمتين أو أصغر من قائمتين حسبما كان مجتمع الضلعين أكثر من نصف دائرة أو يعدله أو أصغر منه.

ليكن  $ab$   $s$  مثلثاً كروياً ضلعاؤه  $ab$  و  $b$   $s$  وقاعدته  $a$   $s$ . أخرج احد



الضلعين  $ab$  والقاعدة  $a$   $s$  حتى يلتقيا  
إيضاً في  $d$ . فالقوس  $ab$  نصف دائرة  
والزاوية الكروية عند  $a$  تعدل الكروية  
عند  $d$  لأن كل واحدة منهما هي ميل  
الدائرة  $ab$  على الدائرة  $a$   $s$   $d$

(١) إذا كان  $ab + b$   $s$  = نصف دائرة أو اد فحينئذ  $b$   $s$  =  $b$   $d$   
والزاوية عند  $d$  (ق ٥) أو عند  $a$  =  $b$   $s$   $d$  أي الداخلة عند القاعدة تعدل الخارجة  
المقابلة

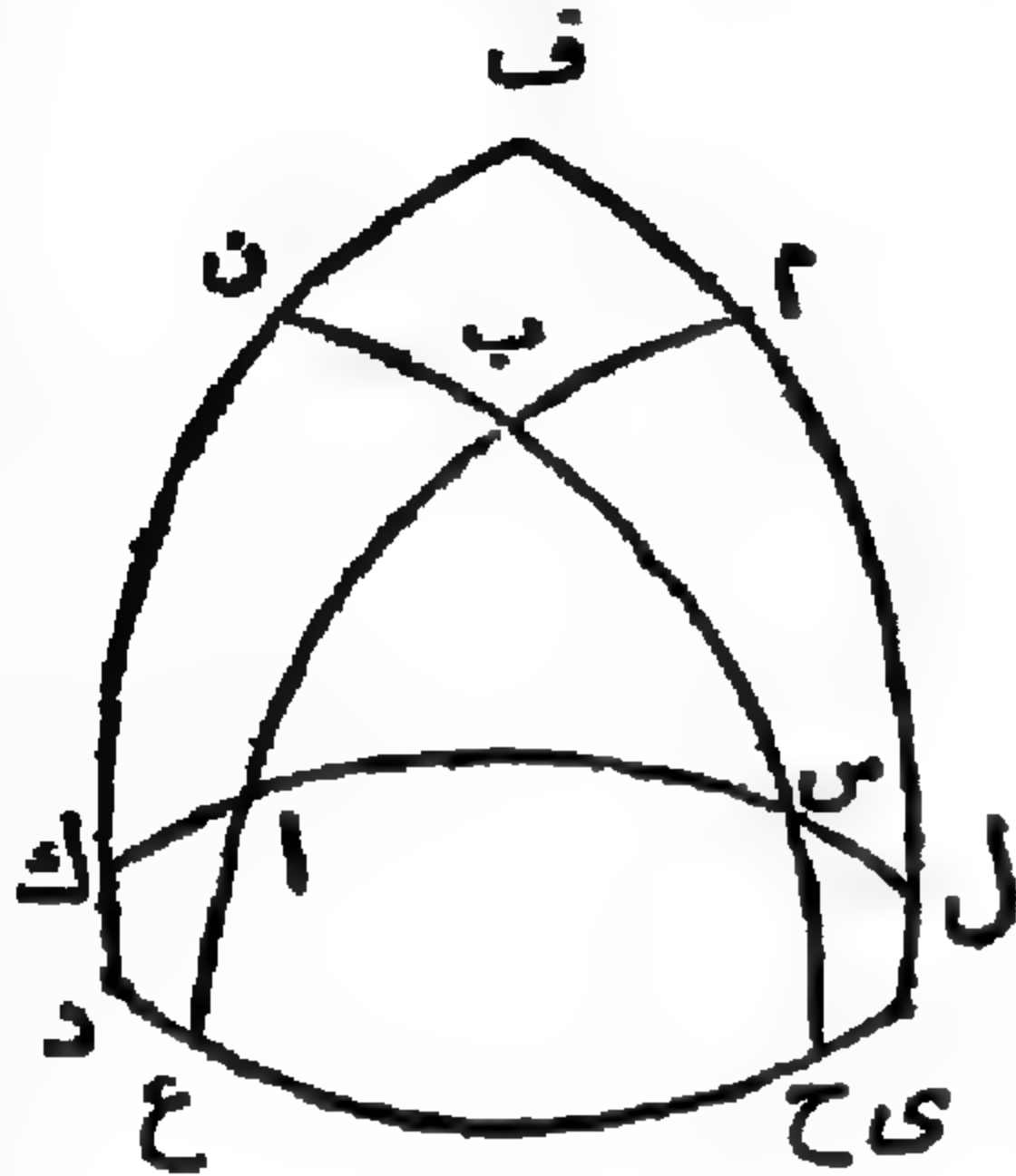
(٢) إذا كان  $ab + b$   $s$  أكبر من نصف دائرة أو من  $ab$   $d$  فحينئذ  $b$   $s$   
أكبر من  $b$   $d$  والزاوية عند  $d$  أو الأكبر من  $b$   $s$   $d$  (ق ٩)

(٣) وهكذا إذا كان  $ab + b$   $s$  أقل من نصف دائرة أو من  $ab$   $d$  تكون  
 $d$  أو أصغر من  $b$   $s$   $d$ . ثم  $b$   $s$   $d$   $b$   $s$   $a$  تعدلان قائمتين، فإذا كانت  $a$   
أكبر من  $b$   $s$   $d$  يكون  $a + s$   $b$  أكبر من قائمتين، وإذا كان  $a$  =  $b$   $s$   $d$   
يكون  $a + s$   $b$  = قائمتين وإذا كان  $a$  أصغر من  $b$   $s$   $d$  يكون  $a + s$   $b$   
أقل من قائمتين

## القضية الحادية عشرة

اذا جعلت زوايا مثلث كروي اقطاب ثلاث دوائر عظيمة فهذه الدوائر  
الثلث بتقاطعا تحدث مثلثا يسمى متم الاول. واضلاع احدها  
متمات للاقواس التي تقيس زوايا الآخر

ليكن ا ب س مثلثا كرويا وليكن ا و ب وس اقطابا للدوائر العظام ف ي



ي د ف التي تتقاطع في ف و د. فاضلاع

المثلث ف ي د هي متمات لاقبسة الزوايا ا و ب

وس اي ف ي ف ي متم ب ا س و د ي متم ا ب س

و د ف متم ا س ب. وايضا ا س متم الزاوية د ف ي

و ا ب متم الزاوية ف ي د و ب س متم الزاوية

ي د ف. اخرج ب س الى ن و ح و ا ب الى م

و غ و ا س الى ك و ل

لان اقطب ف ي والدائرة ا س تمر في ا ف والدائرة ف ي تمر بقطب ا س

(ق ٤ فرع ١) ولان س قطب ف د ف والدائرة ف د تمر بقطب ا س فقطب ا س

هو ف عند تقاطع القوسين ي ف د ف. وهكذا يبرهن ان د قطب ب س و ي

قطب ا ب

ولان ف قطب ا ل و ي قطب ا م فالقوس ف ل ربع دائرة و ي م كذلك

(ق ٢) و ف ل م ي معا و ف ي م ل معا يعدلان نصف دائرة و م ل قياس

ب ا س (ق ٢) فاذا ف ي متم قياس ب ا س وهكذا في البقية

ولان س ن ربع دائرة و ب ح ربع دائرة فالقوسان س ب ب ح معا و ن ح

ب س معا يعدلان نصف دائرة و ن ح قياس ف د ي فقياس ف د ي متم ب س

وهكذا في البقية



## القضية الثانية عشرة

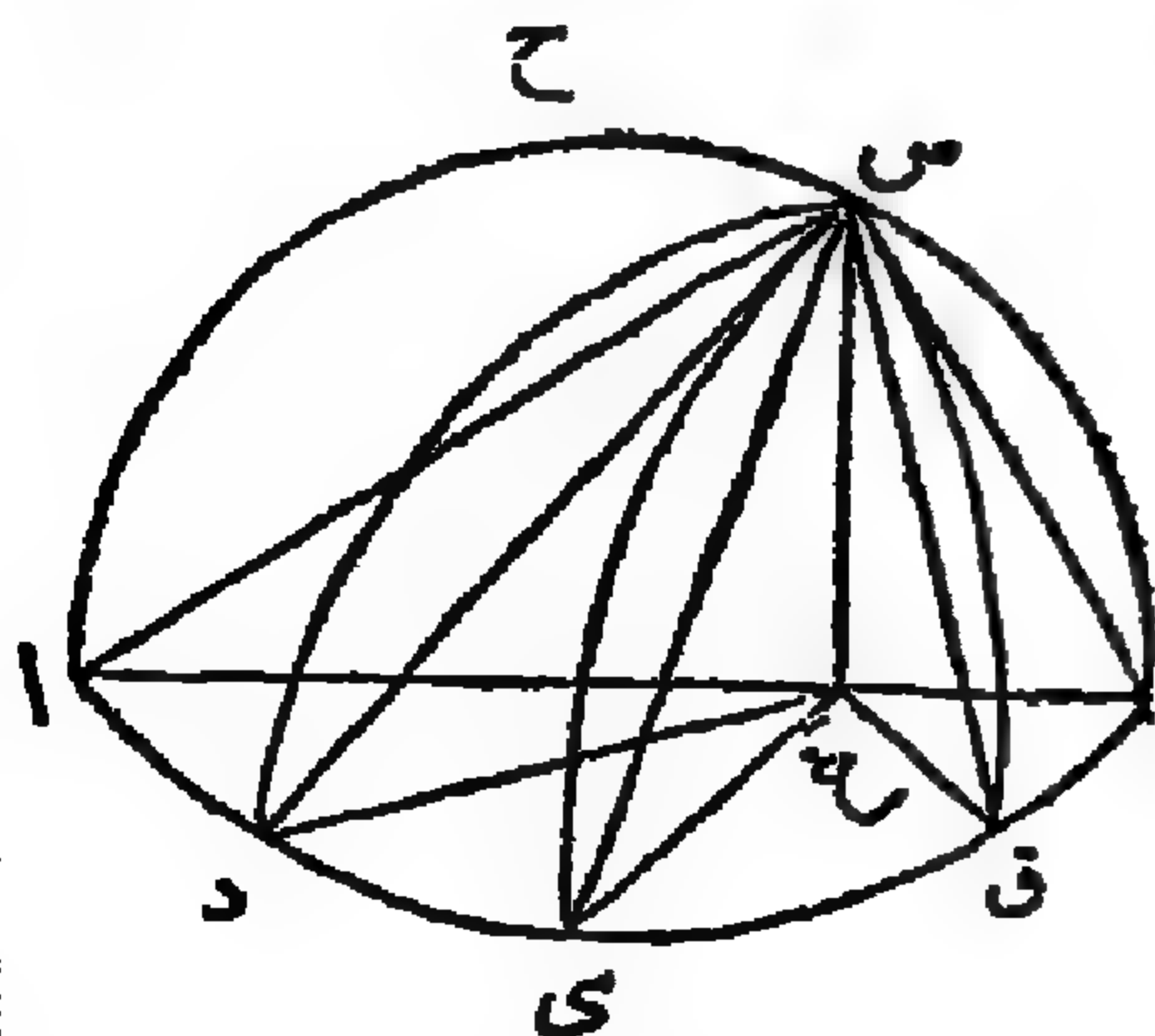
الزوايا الثلاث من مثلث كروي هي معاً أكبر من قائمتين واصغر من  
ست زوايا قائمة

في رسم القضية السابقة اقيس الزوايا الثلاث ا ب س في المثلث ا ب س مع  
اضلاع المثلث المتمدى ف تعدل ثلاثة انصاف دائرة (ق ١١) ولكن اضلاع  
ف دى الثلاثة معاً اقل من نصفى دائرة (ق ٨) فاقيسة ا وب وس أكبر من  
نصف دائرة فالزوايا الثلاث ا وب وس أكبر من قائمتين  
ولأن الزوايا الداخلة من كل مثلث مع الخارجة تعدل ست زوايا قائمة فالداخلة  
وحدها اقل من ست زوايا قائمة

## القضية الثالثة عشرة

إذا رُسِمَتْ اقواس دوائر عظيمة على محيط دائرة عظيمة من نقطة في  
محيط الكرة ليست هي قطب تلك الدائرة فاطول هذه الاقواس هو  
المار بقطب تلك الدائرة وثمره هو الاقصر ومن البقية فالاقرب الى  
الاطول اطول من الابعده

ليكن ا د ب محيط دائرة عظيمة قطبها ح وتكن س نقطة اخرى ومن س  
ليرسم اقواس على ا د ب فالاطول هو س ح ا المار بالقطب والاقصر هو س ب  
متم س ح ا ومن البقية فالاقرب الى س ح ا  
اي س د هو اطول من س ي الابعده منه.  
من س ا رسم س غ عموداً على ا ب فهو عمود  
على سطح ا د ب. ا رسم غ د غ ي غ ق ب  
س ا س د س ي س ق س ب  
لان ا ب قطر الدائرة ا د ب وغ نقطة

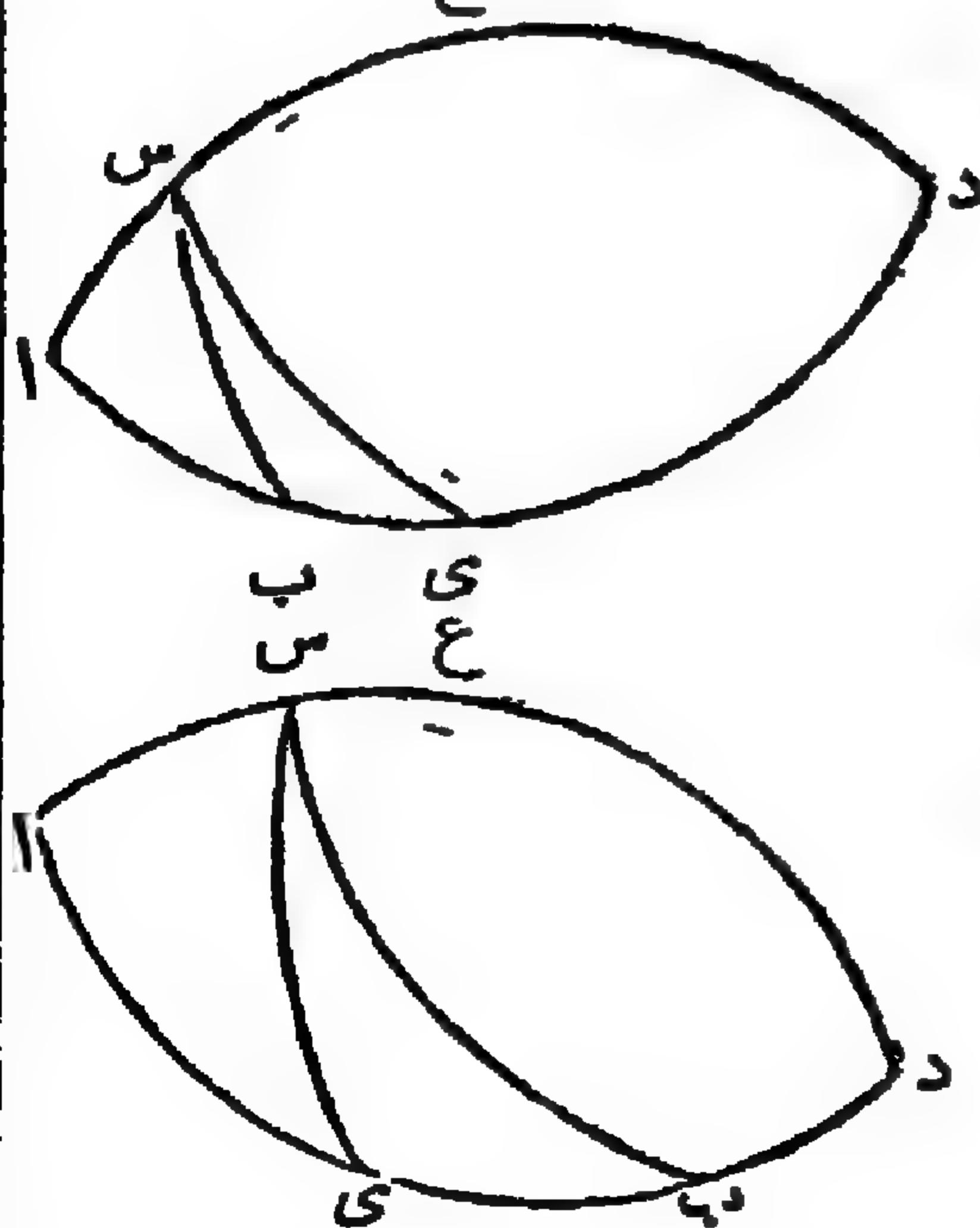


فيه غير المركز فالقسم  $اغ$  الذي فيه المركز هو اطول المخطوط (ق ٧ ك ٣) التي  
نرسم من  $غ$  الى المحيط و  $غ$  ب اقصرها و  $غ$  د الاقرب الى  $اغ$  اطول من  $غ$  ي الذي  
هو ابعد. ولكن المثلثان  $س غ ا$  و  $س غ د$  لهما قائمة عند  $غ$  و  $اس = اغ + غس$   
و  $دس = دغ + غس$  ولكن  $اغ > دغ$  و  $اس > دس$  لان  $اغ < دغ$  فاذا  
 $اس < دس$  و  $اس < دس$  و لكن الوتر  $اس$  اطول من الوتر  $دس$  فالقوس  
 $اس$  اطول من القوس  $دس$ . وهكذا في البقية

### القضية الرابعة عشرة

في مثلث كروي قائم الزاوية الضلعان المحيطان بالقائمة والزاويتان  
المقابلتان لهما من جنس واحد. اي اذا كان الضلع اكبر من ربع دائرة  
تكون الزاوية المقابلة اكبر من قائمة واذا كانت اقل من ربع تكون  
الزاوية المقابلة اصغر من قائمة

ليكن  $اب س$  مثلثا كرويا قائمة عند  $ا$  فالضلع  $اب$  جنس كجس الزاوية  
المقابلة  $اس ب$



أخرج القوسين حتى تلتقيا ايضا  
في  $د$  وتصف  $اد$  في  $ي$ . فيكون  $اس د$   
نصف دائرة و  $اب د$  نصف دائرة  
و اي قوس  $٩٠^\circ$  وقد فرضت  $س اب$   
قائمة فسطح الدائرة  $اب د$  عمودي على  
سطح الدائرة  $اس د$  فقطب  $اس$  دائما هو  
في  $اب د$  (ق ٤ فرع اول) وهو في  $ي$ .  
ليكن  $ي س$  قوس دائرة عظيمة مارة في  
 $ي$  و  $س$

فلكون  $ي$  قطب الدائرة  $اس د$  يكون  $ي س$  ربع دائرة (ق ٢) و سطح  $ي س$   
عمودي على سطح الدائرة  $اس د$  (ق ٤) فالزاوية الكروية  $اس ي$  قائمة فاذا كانت

ا ب اقصر من اى تكون ا س ب اصغر من قائمة واذا كان ا ب اطول من اى  
تكون ا س ب اكبر من ا س ي واكبر من قائمة وهكذا يبرهن قلب هذه القضية

### القضية الخامسة مخشرة

في مثلث كروي ذي قائمة اذا كان الضلعان المحيطان بالقائمة من  
جنس واحد يكون الوتر اقل من ربع دائرة واذا كانا مختلفي الجنس  
يكون الوتر اكثر من ربع دائرة

في رسم القضية السابقة نصِّف ا د في غ فيكون ا غ قوس  $90^\circ$  و غ قطب  
ا ب د

(١) ليكن ا ب ا س اقل من  $90^\circ$  فلكون س نقطة في سطح الكرة غير قطب  
ا ب د تكون القوس س غ د المارة بالقطب غ اطول من س ي وس ي اطول من  
س ب (ق ١٢) وس ي ربع دائرة فيكون س ب اقل من ربع دائرة. وهكذا  
يبرهن في المثلث س د ب ذب القائمة عند د الذي ضلعا س د و د ب اكبر من  
ربع دائرة فالوتر س ب اقل من ربع دائرة

(٢) ليكن ا س اقل من  $90^\circ$  و ا ب اكبر من  $90^\circ$  فلان س ب واقع بين  
س غ د وس ي فهو اطول من س ي (ق ١٢) اي اطول من ربع دائرة  
فرغ اول. وبالقلب في مثلث كروي قائم الزاوية اذا كان الوتر اكثر من ربع  
دائرة يكون الضلعان مختلفي الجنس والا فمن جنس واحد

فرغ ثان. في مثلث كروي قائم الزاوية الزاويتان الاخرتان من جنس الضلعين  
المقابلين لهما فاذا كان الوتر اكبر من نصف دائرة فالزاويتان الاخرتان مختلفتا  
الجنس والا فمن جنس واحد

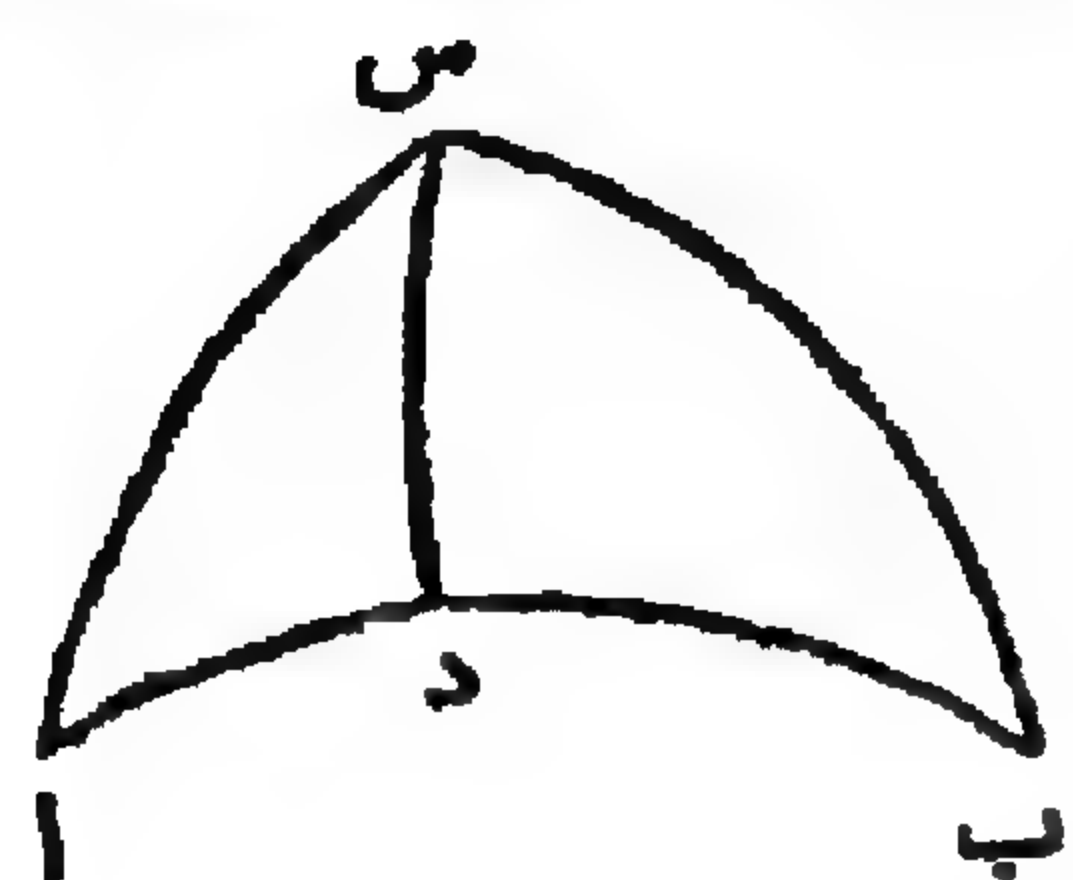
فرغ ثالث. الضلعان من جنس الزاويتين المقابلتين فاذا كانت زاوية والضلع  
الذي يليها من جنس واحد فالوتر اقل من نصف دائرة وبالقلب



### القضية السادسة عشرة

في مثلث كروي اذا رُسم عمود على القاعدة من الزاوية المقابلة ووقع العمود داخل المثلث فالزاويتان عند القاعدة من جنس واحد واذا وقع خارج المثلث فهما مختلفتا الجنس

ليكن ا ب س مثلثا كرويا ويرسم القوس س د من س عمودا على القاعدة ا ب  
(١) ليقع س د داخل المثلث. فالزاويتان  
ا د س ب د س قائمتان فالزاويتان عند ا وب هما  
من جنس س د (ق ١٤)



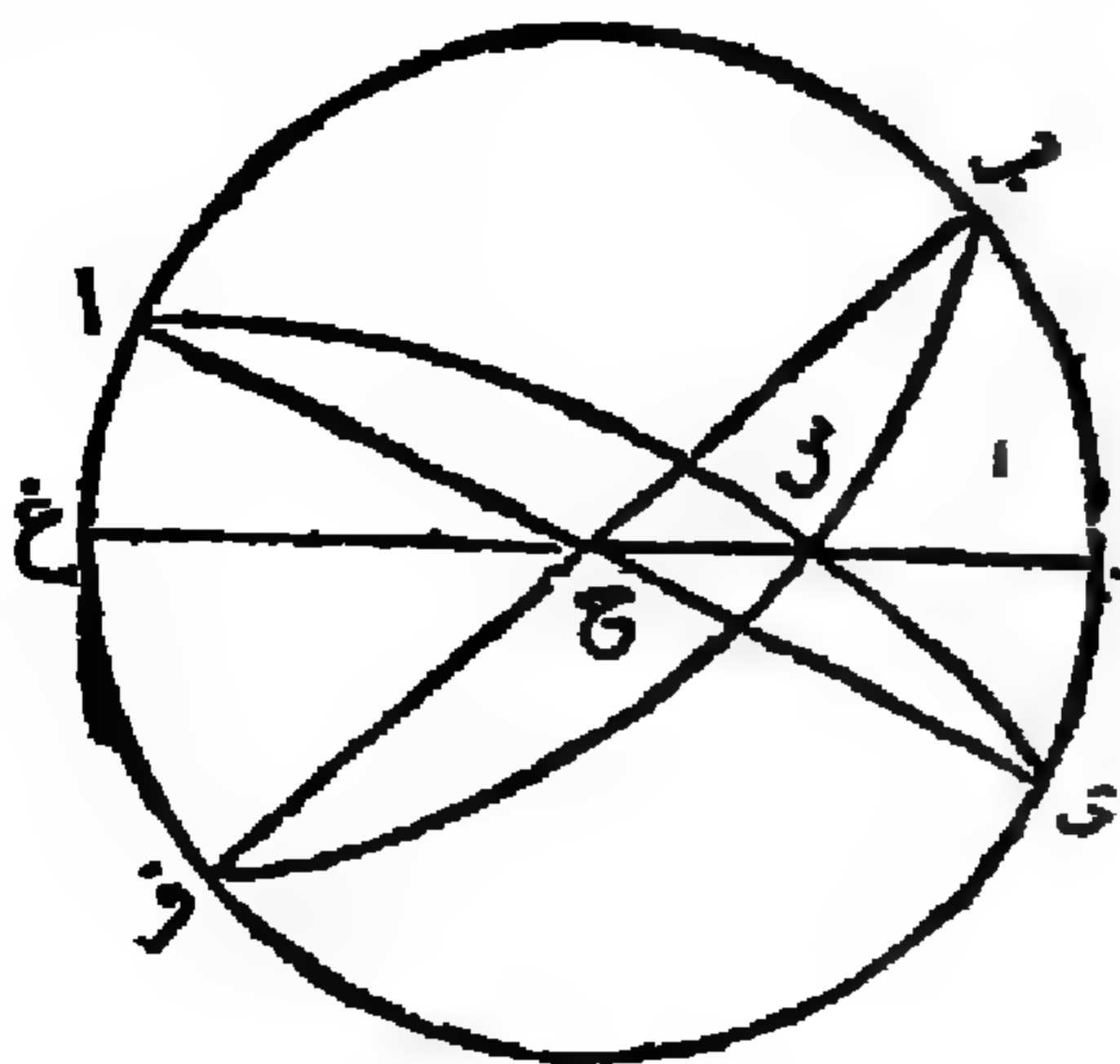
(٢) ليقع س د خارج المثلث فالزاوية عند ب  
هي من جنس س د (ق ١٤) وس ا د من  
جنس س د فالزاويتان ب وس ا د من  
جنس واحد وب وس ا ب مختلفتا الجنس  
فرع. اذا كان ا وب من جنس واحد  
يقع العمود داخل المثلث والا فخارجه



### القضية السابعة عشرة

اذا رُسم عمودي على قاعدة مثلث كروي من الزاوية المقابلة ووقع داخل المثلث او كان اقرب الاثنين الواقعين خارجة فاصغر قسمي القاعدة يلي اقصر ضلعي المثلث اذا كان مجتمع الضلعين اقل من نصف دائرة وبلي اطول الضلعين اذا كان مجتمعها اكثر من نصف دائرة

ليكن ا ب ي ف دائرة عظيمة من كرة وح قطبها و غ ح د دائرة مارة ب ف ح



وعمودية على ا ب ي ف. ولكن ي وب  
نقطتين في الدائرة ا ب ي ف على جانبي  
د ولكن د اقرب الى ي. ولكن س نقطة  
في الدائرة غ ح د ي ن ح ود. ا رسم القوسين  
ي س ا ب س ف فكل واحدة منها  
نصف دائرة وي س ب ي س ف

ف س ا س ب اربع مثلثات كروية بين اقواس دائرتين ولها العمودان س د  
وس غ

(١) لأن س ا اقرب من س ب الى القوس س ح غ فالقوس س ا اطول من  
القوس س ب وس ا + س ي < س ب + س ي فيكون س ب + س ي اقل  
من نصف دائرة وي د بالمفروض اقصر من د ب فيكون ي س اقصر من س ب  
(ق ١٢) فاذا وقع العمود داخل المثلث وكان مجتمع الضلعين اقل من نصف دائرة  
فالقسم الاقصر من القاعدة يلي الضلع الاقصر

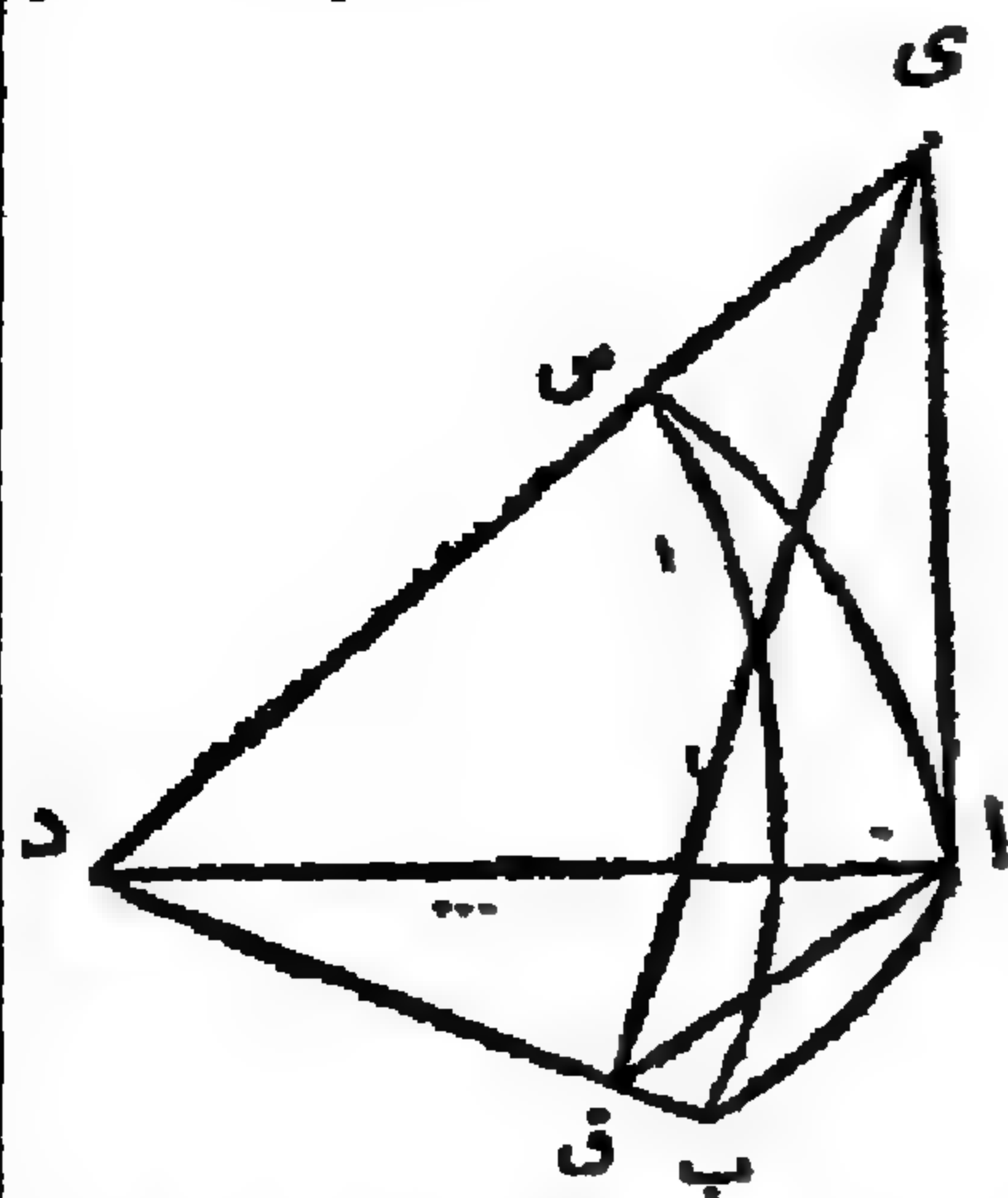
(٢) في المثلث ف س ي الضلعان ف س س ي اقل من نصف دائرة  
وي س اقصر من س ف لانه ابعد عن س ح غ. فاذا وقع العمود خارج المثلث  
وكان مجتمع الضلعين اقل من نصف دائرة فالقسم الاقصر يلي الضلع الاقصر  
(٣) ولكن في المثلث ف س ا الضلعان ف س س ا اطول من نصف دائرة  
واس اطول من س ف لأن ي س اقصر من س ب فيكون ا س اقرب الى  
س ح غ فيكون ا غ اقصر قسما القاعدة وهو يلي الضلع الاطول

(٤) وفي المثلث ا س ب ا س وس ب معا اطول من نصف دائرة واس  
اطول من ب س فاقصر قسما القاعدة ا غ يلي الضلع الاطول

### القضية الثامنة عشرة

في مثلث كروي قائم الزاوية تكون نسبة جيب احد الضلعين المحيطين  
بالقائمة الى نصف قطر الكرة كنسبة جاس الضلع الآخر الى جاس  
الزاوية القائمة

ليكن  $اب س$  مثلثاً كروياً ذا قائمة عند  $ا$  فنسبة  $ج ا ب : ق = م ا س : م$



$اب س$ . لتكن  $د$  مركز الكرة. ارسم  $دا د ب$   
 $د س$ . وارسم  $اق$  عموداً على  $ب د$  فهو جيب  
 $ا ب$  ومن  $ق$  ارسم الخط المستقيم  $ق ي$  عموداً  
 على  $ب د$  في سطح  $ب د س$  وليلاق  $د س$  في  
 $ي$ . ارسم  $اي$

لكون الخط المستقيم  $د ق$  عموداً على  
 $ق ا$  و  $ق ي$  يكون عموداً ايضاً على سطح  $ق ي ا$

(ق ٤ ك ٢ م) فالسطح  $ا ب د$  المار في  $د ق$  هو عمودي على السطح  $ا ي ق$  (ق ١٧  
 ك ٢ م) والسطح  $ا ي ق$  عمودي على  $ا ب د$ . ولكن السطح  $ا س د$  او  $ا ي د$  ايضاً  
 عمودي على  $ا ب د$  لان الزاوية الكروية  $ب ا س$  قائمة. فيكون الخط  $ا ي$  موضع  
 تقاطع السطحين  $ا ي د$  و  $ا ي ق$  عمودياً على السطح  $ا ب د$  (ق ١٨ ك ٢ م) و  $ا ي ا ق$   
 $ا د$  قائمتين. فيكون  $ا ي$  مماس القوس  $ا س$ . وفي المثلث البسيط  $ا ي ق$  ذي  
 القائمة عند  $ا$  تكون نسبة  $ا ق : ق = ا ي : ماس الزاوية ا ق ي$  (مثلثات  
 مستوية ق ١) ولكن  $ا ق$  هو جيب القوس  $ا ب$  و  $ا ي$  ماس القوس  $ا س$  والزاوية  
 $ا ق ي$  هي ميل السطح  $س ب د$  على السطح  $ا ب د$  (جد ٤ ك ٢ م) وتعديل الزاوية  
 الكروية  $ا ب س$  فنسبة جيب القوس  $ا ب$  الى نصف القطر كنسبة ماس القوس  
 $ا س$  الى ماس الزاوية المقابلة  $ا ب س$

فرع. لانه بموجب هذه القضية  $ج ا ب : ق = م ا س : م$   $ا ب س$   
 ولان  $ق : م ا ب س : م ا ب س : ق$  (فرع اول حد ٩ مثلثات مستوية)  
 فبالمساواة  $ج ا ب : م ا ب س : م ا س : ق$

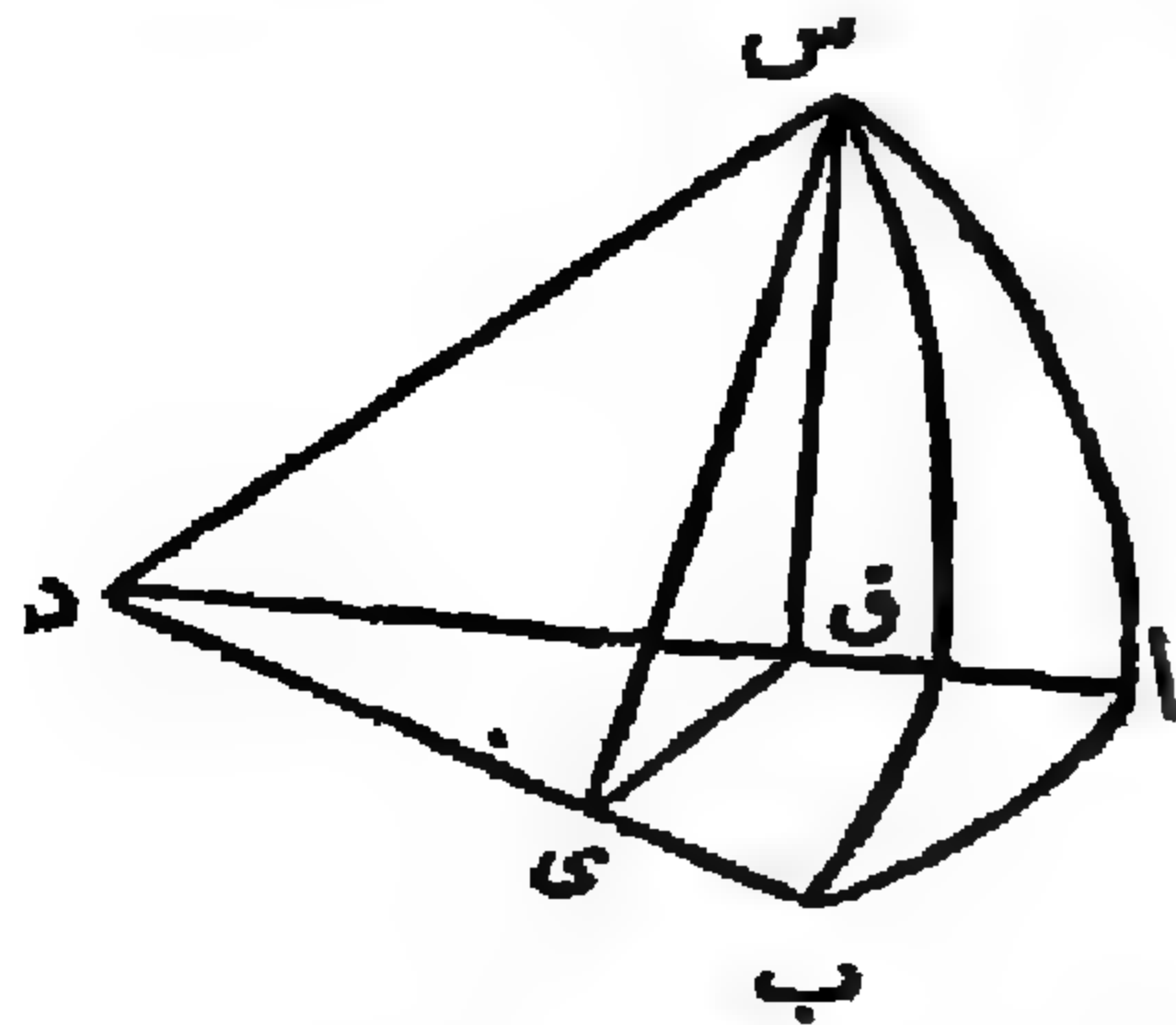
### القضية التاسعة عشرة

في مثلث كروي قائم الزاوية تكون نسبة جيب الوتر الى نصف القطر  
 كجيب احد الضلعين الى جيب الزاوية التي تقابل ذلك الضلع



ليكن  $ا ب س$  مثلثا كرويا ذا قائمة عند ا فنسبة جيب الوتر  $ب س$  الى نصف

القطر كنسبة جيب القوس  $ا س$  الى جيب الزاوية  $ا ب س$



ليكن  $د$  مركز الكرة وليرسم  $س ي$  عمودا على  $د ب$  فهو جيب القوس  $س ب$  ومن  $ي$  ليرسم الخط المستقيم  $ي ق$  في السطح  $ا ب د$

عمودا على  $ب د$  وارسم  $س ق$  فيكون  $س ق$  عمودا على السطح  $ا ب د$  كما تقدم في القضية السابقة فتكون  $س ق د س ق ي$  قائمتين ومن ق جيب القوس  $ا س$  وفي المثلث البسيط  $س ق ي$  ذي القائمة  $س ق ي$  تكون نسبة  $س ي : ق : س ق$  :  $ج س ي ق$  (ق ا مثلثات مستوية) ولان  $س ي$  و  $ق ي$  عمودان على  $د ي ب$  الذي هو موضع تقاطع السطحين  $س ب د ا ب د$  فالزاوية  $س ي ق$  هي ميل هذين السطحين احدهما على الآخر (حد ٤ ك ٢ م) وهي تعدل الزاوية الكروية  $ا ب س$  فنسبة جيب الوتر  $ب س : ق : ج القوس ا س : ج الزاوية$  المقابلة  $ا ب س$

### القضية العشرون

في مثلث كروي قائم الزاوية تكون نسبة نظير جيب الوتر الى نصف

القطر كنظير جاس احدي الزاويتين الى جاس الزاوية الاخرى

ليكن  $ا ب س$  مثلثا كرويا ذا قائمة عند ا فنسبة نظير جيب الوتر  $ب س$  الى

نصف القطر كنسبة نظير جاس الزاوية

$ا ب س$  الى جاس الزاوية  $ا س ب$

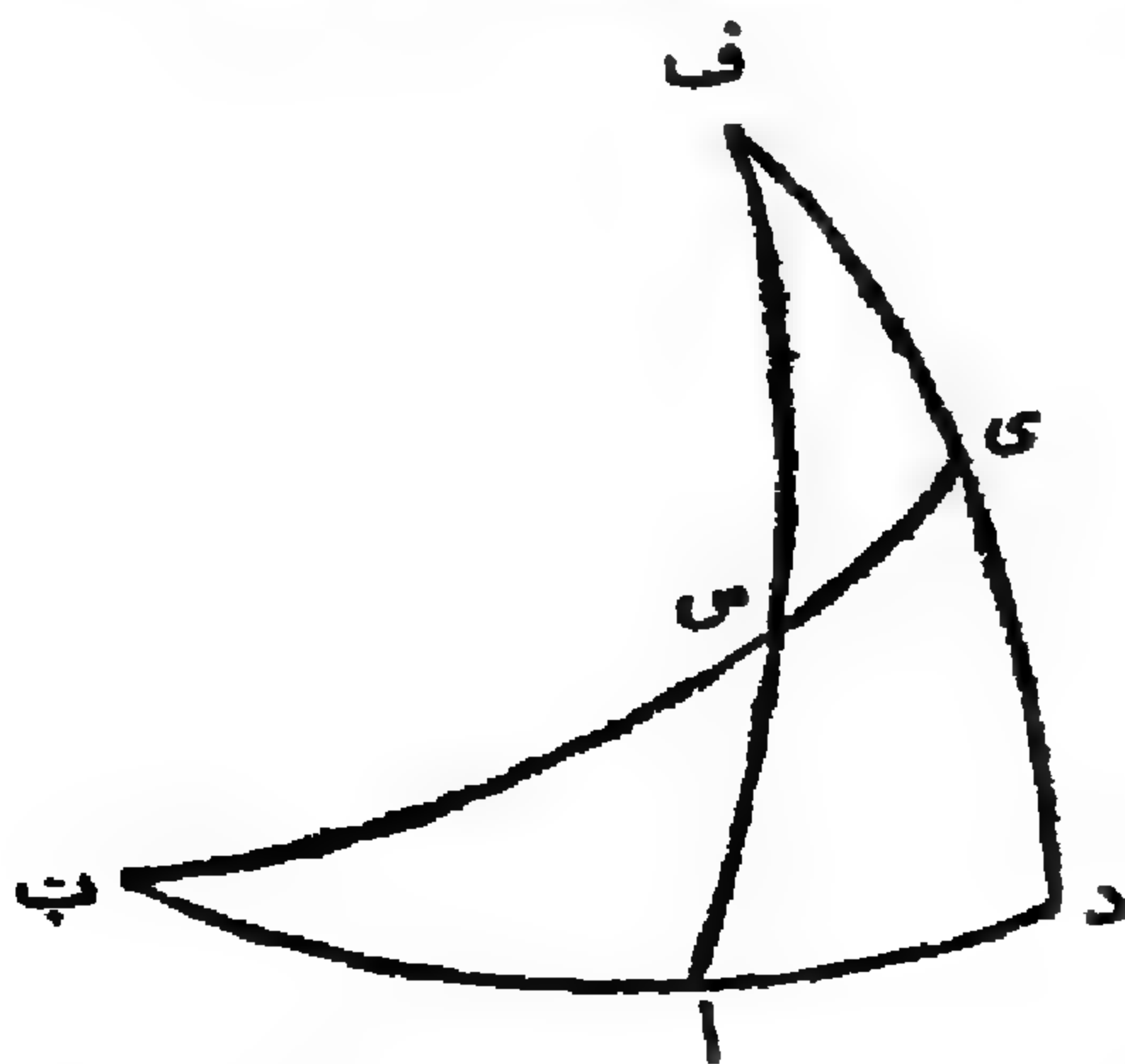
ارسم القوس  $د ي$  وليكن  $ب$

قطبة وليلاق  $ا س$  في  $ف$  وب  $س$  في

$ي$ . فلان القوس  $ب د$  تمر في النقطة

$ب$  وهي قطب القوس  $د ف$  فالقوس

$د ف$  تمر بقطب  $ب د$  (ق ٤) ولان





و (ق ١٥) نجاب س : ق : تم اب : تم ب س  
 فرع اول . يتضح من هذه القضية ان مماسي قوسين مثل اب وب س هما  
 بالتكافؤ كنظيري مماسيها

فرع ثانٍ . لان نجاب س : ق : تم اب : تم ب س وايضاً ق : نج  
 ب س : تم ب س : ق : ف بالمساواة نجاب س : تم ب س : تم اب : ق اي  
 نسبة نظير جيب احدى الزاويتين غير القائمة الى نظير مماس الوتر كنسبة مماس  
 الضلع الذي يلي تلك الزاوية الى نصف القطر

### القضية الثانية والعشرون

في مثلث كروي ذي قائمة تكون نسبة نظير جيب احد الضلعين الى  
 نصف القطر كنسبة نظير جيب الوتر الى نظير جيب الضلع الاخر  
 ليرسم كما تقدم ثم في المثلث س ي ف ج س ف : ق : ج س ي :  
 ج س ف ي (ق ١٩) ولكن ج س ف = نج س ا وج س ي = نج ب س وج  
 س ف ي = نج اب فنسبة نج س ا : ق : نج ب س : نج اب

### القضية الثالثة والعشرون

في مثلث كروي ذي قائمة تكون نسبة نظير جيب احد الضلعين الى  
 نصف القطر كنسبة نظير جيب الزاوية المقابلة ذلك الضلع الى جيب  
 الزاوية الاخرى

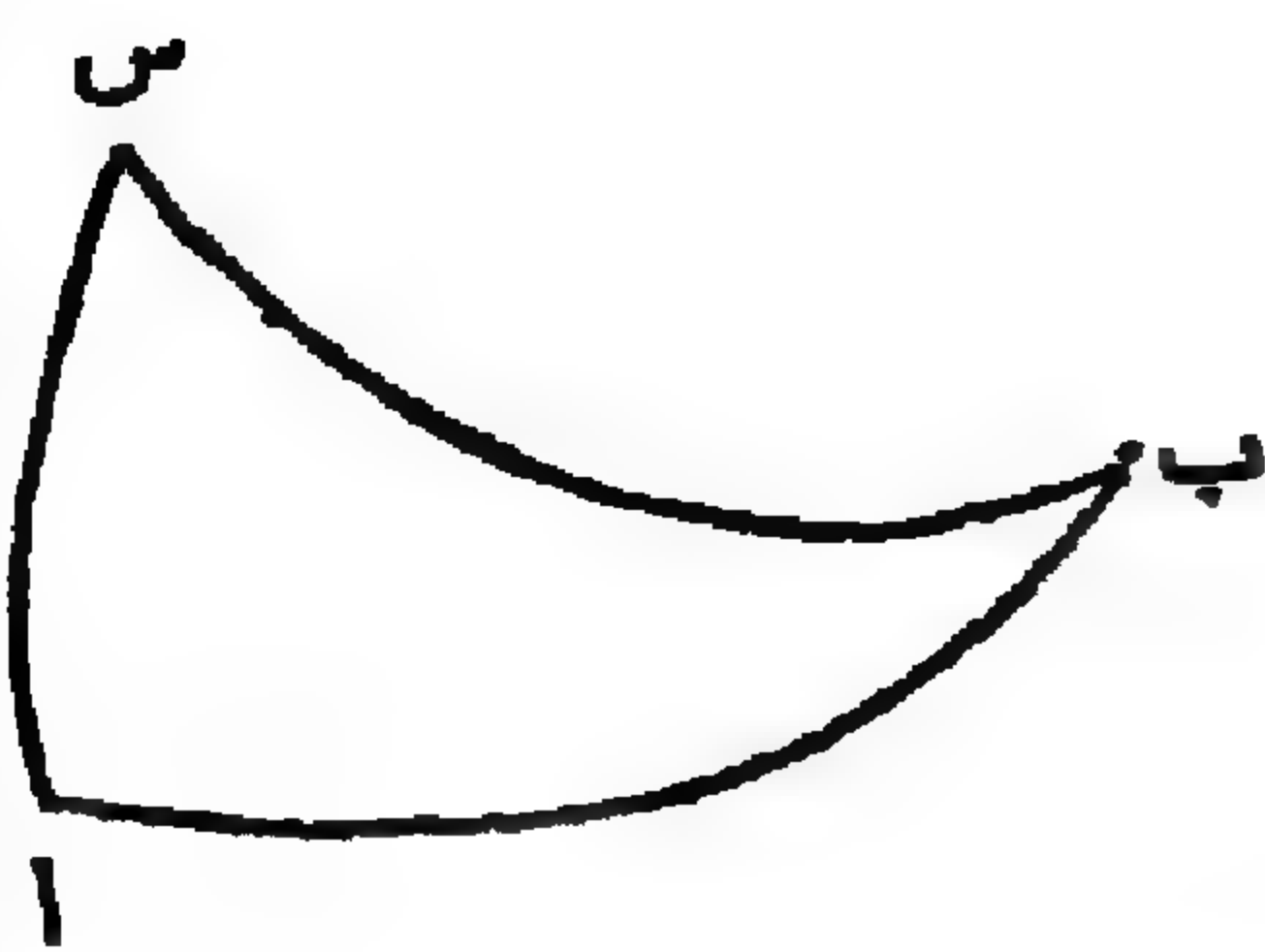
ليرسم كما تقدم ثم في المثلث س ي ف ج س ف : ق : ج ي ف : ج  
 ي س ف (ق ١٩) ولكن ج س ف = نج س ا وج ي ف = نج اب س وج  
 ي س ف = ج ب س ا فاذا نج س ا : ق : نج اب س : ج ب س ا



### القضية الرابعة والعشرون

في مثلثات كروية ذات قوائم وغيرها تكون جيوب الاضلاع مناسبة  
لجيوب الزوايا التي تقابلها

اولاً. ليكن  $ab$   $s$  زاوية عند  $a$  بحسب (ق ١٩) نسبة جيب الزو  $b$   $s$



الى نصف القطر او الى جيب القائمة عند  $a$

كجيب الضلع  $as$  الى جيب الزاوية عند  $b$

وايضاً نسبة جيب  $b$   $s$  الى جيب الزاوية

عند  $a$  كجيب  $ab$  الى جيب الزاوية عند  $s$

و (ق ١١ ك هـ) جيب الضلع  $as$  الى جيب

الزاوية عند  $b$  كجيب  $ab$  الى جيب الزاوية عند  $s$



ثانياً. ليكن  $ab$   $s$  مثلثاً كروياً غير ذي

قائمة فتكون نسبة جيب احد اضلاعه مثل

$b$   $s$  الى جيب الآخرين  $as$  كنسبة

جيب الزاوية عند  $a$  الى جيب الزاوية عند

$b$ . من  $s$  ارسم قوس دائرة عظيمة  $s$   $d$

عمودية على  $ab$ . ففي المثلث ذي القائمة

$b$   $s$   $d$  تكون نسبة  $ج ب س : ا ب ق ::$

$ج س د : ج ب (ق ١٩)$  وفي المثلث

$ا د س$  جيب  $اس : ا ب ق ::$  جيب  $س د :$

جيب  $ا ف$  بالمساواة بالقلب  $ج ب س : ج ا س :: ج ا : ج ب$  وهكذا يبرهن

ايضاً ان  $ج ب س : ج ا ب :: ج ا : ج س$

### القضية الخامسة والعشرون

في مثلث كروي غير ذي قائمة اذا رسمت قوس عمودية من احدى الزوايا

الى الضلع المقابل لها تكون نسبة نظير جيب احد الزاويتين عند

القاعدة الى نظير جيب الاخرى كنسبة جيب احد قسي الزاوية التي

انقسمت بالعمودية الى جيب قسميها الآخر

ليُرسَم كما في القضية السابقة ولتكن  $س د$  عمودية على القاعدة  $ا ب$  فنسبة نظير

جيب  $ب$  : نج  $ا$  :: جيب  $س د$  : ج  $ا س د$

لان (ق ٢٢) نج  $س د$  :  $ا ق$  :: نج  $ب$  : ج  $د س ب$  وفي المثلث ذي القائمة

$ا س د$  نج  $س د$  :  $ا ق$  :: نج  $ا$  : ج  $ا س د و$  (ق ١١ ك هـ) نج  $ب$  : ج  $د س ب$  ::

نج  $ا$  : ج  $ا س د$  وبالمبادلة نج  $ب$  : نج  $ا$  :: جيب  $س د$  : ج  $ا س د$

### القضية السادسة والعشرون

ليُفرض كما تقدم فنسبة نظير جيب  $ب س$  الى نظير جيب  $س ا$  كنسبة

نظير جيب  $ب د$  الى نظير جيب  $د ا$

لانه في المثلث  $ب س د$  (ق ٢٢) نج  $ب س$  : نج  $ب د$  ::  $د س$  :  $ا ق$  وفي

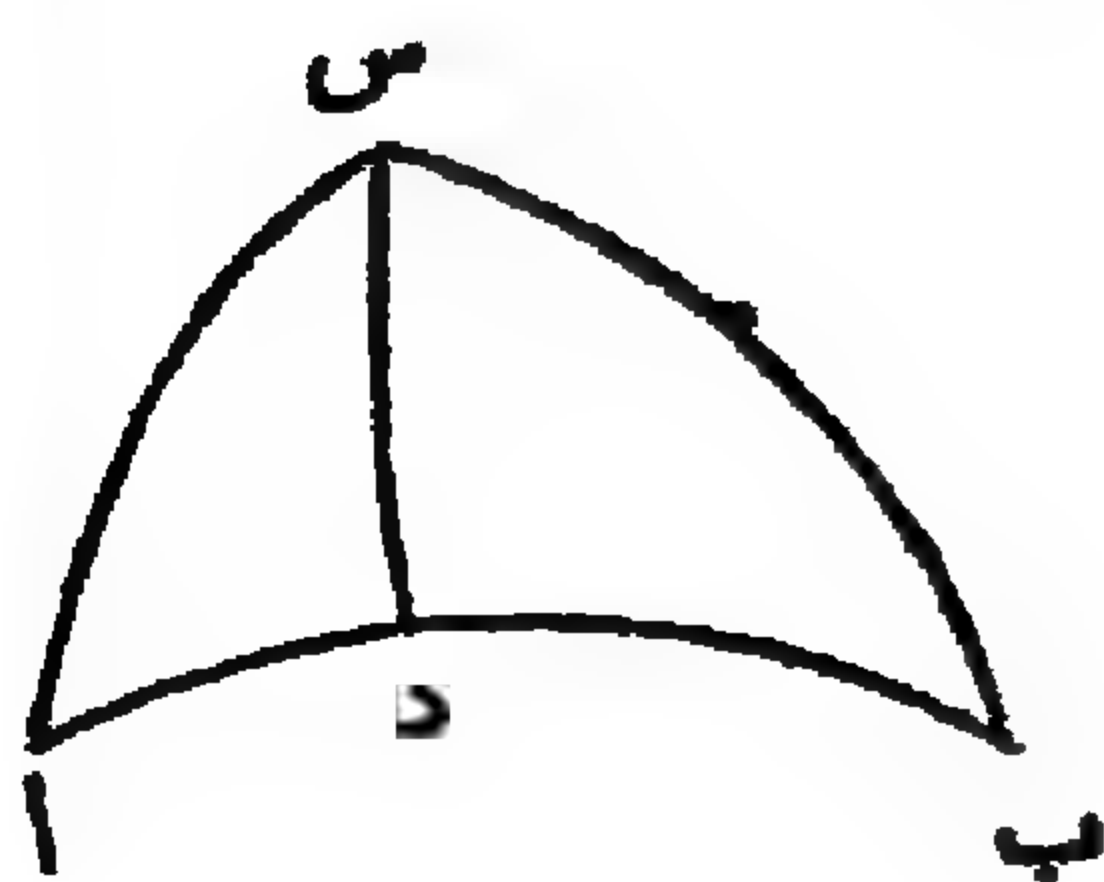
المثلث  $ا س د$  نج  $ا س$  : نج  $ا د$  :: نج  $د س$  :  $ا ق و$  (ق ١١ ك هـ) نج  $ب س$  : نج

$ب د$  :: نج  $ا س$  : نج  $ا د$  وبالمبادلة نج  $ب س$  : نج  $ا س$  :: نج  $ب د$  : نج  $ا د$

### القضية السابعة والعشرون

ليُرسَم كما تقدم فنسبة جيب  $ب د$  الى جيب  $د ا$  كنسبة  $هـ ا س$  الى

$هـ ا ب$  بالتكافؤ



في المثلث  $ب س د$  (ق ١٨) جيب  $ب د$  :  $ا ق$  ::  $م د س$  :  $م ب ب$  وفي المثلث

$ا س د$  ج  $ا د$  :  $ا ق$  ::  $م د س$  :  $م ا$ . فبالمبادلة بالقلب جيب  $ب د$  : ج  $ا د$  ::

$ا$  :  $ب$

### القضية الثامنة والعشرون

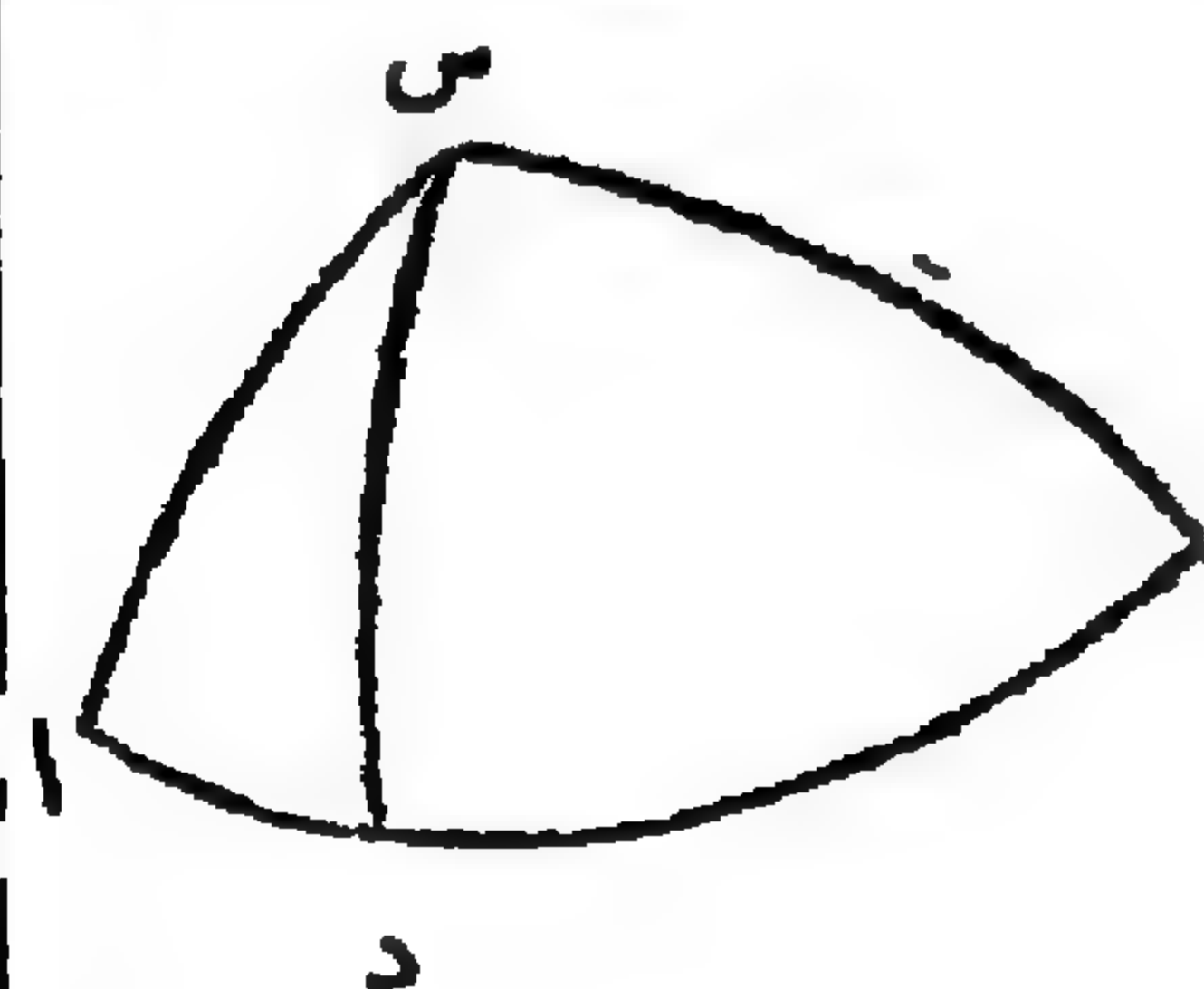
ليُرسَم كما تقدم فنسبة نظير جيب احدى الزاويتين الحادتين بالعمودية الى نظير جيب الاخرى كما س ما حد الضلعين الى ما س الآخر بالتكافؤ

لأن (ق ٢١) نجوب س د : ا ق :: م س د : م ب س وايضا نجواس د : ا ق :: م س د : م اس فبالمبادلة بالقلب نجوب س د : نجواس د :: م اس : م ب س

### القضية التاسعة والعشرون

في مثلث كروي اذا رُسِمَت قوس عمودية من احدى زواياه الى الضلع المقابل او القاعدة فالقائم الزوايا مسطح مما س نصف مجتمع قسي القاعدة في مما س فصلتها يعدل القائم الزوايا مسطح مما س نصف مجتمع ضلعي المثلث في مما س فصلتها

ليكن ا ب س مثلثا كرويا ولترسم القوس س د من الزاوية عند س عمودية على



القاعدة ا ب ثم لنفرض ب س = ا و اس =

ب وب د = م و ا د = ن فالقائم الزوايا

م ا (م + ن) × م ا (م - ن) = ب

م ا (ا + ب) × م ا (ا - ب)

لا (ق ٢٦) نجوا : نجوب :: نجوم :

نجن و (ق ٢٥) نجوا + نجوب : نجوا -

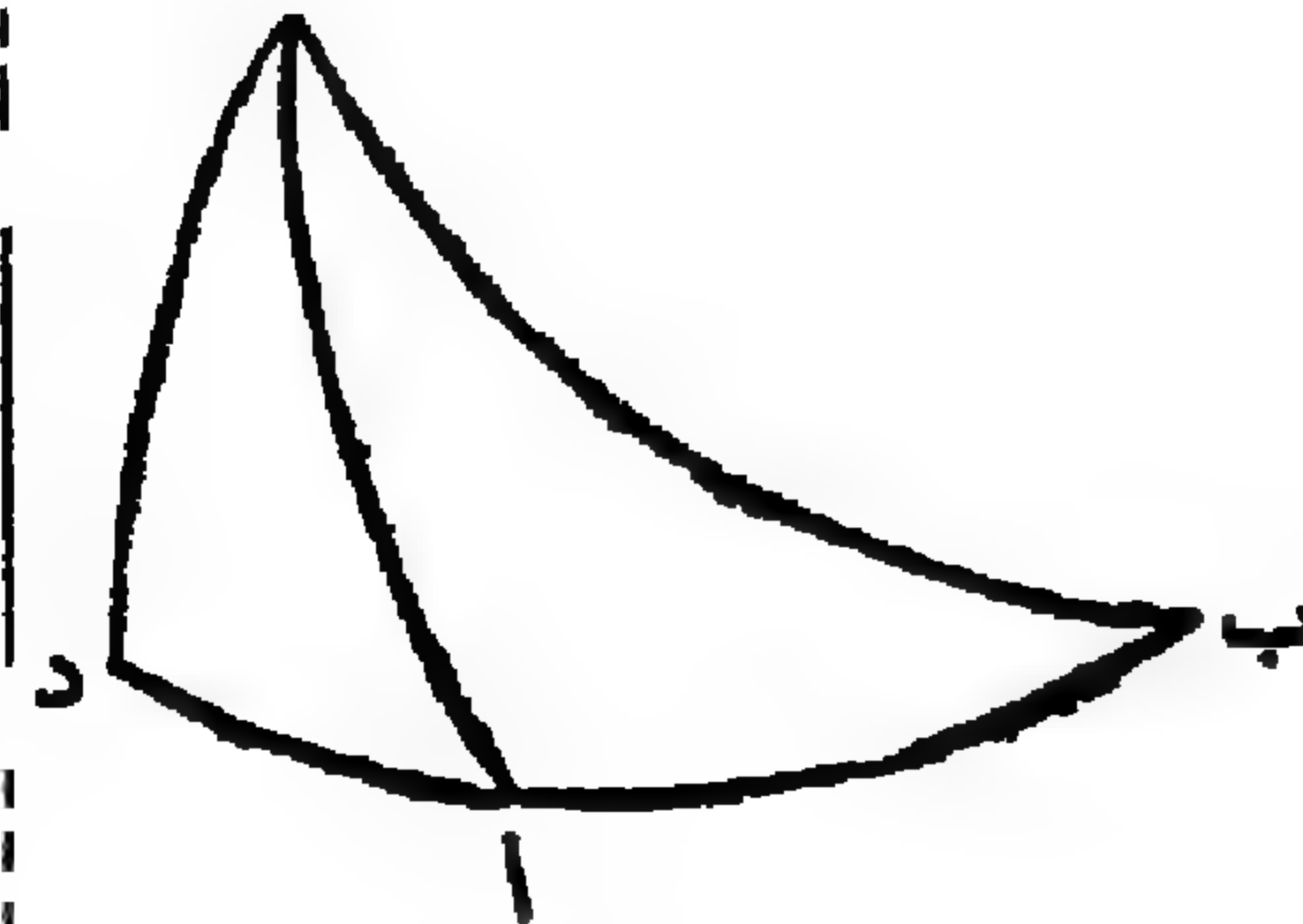
نجن ب :: نجوم + نجن : نجم - نجن

و (ق ٢٤) مثلثات مستوية) نجوا +

نجن ب : نجوا - نجوب :: نم ا (ا + ب) :

نم ا (ا - ب) وايضا نجوم + نجن :

نجم - نجن :: نم ا (م + ن) : نم ا (م -



ن) فتكون (ق ١١ ك) نم ا (ا + ب) : م ا (ا - ب) :: نم ا (م + ن) :



م  $\frac{1}{2}$  (م - ن) ونسبة الاشكال القائمة الزوايا بعضها الى بعض اذا كانت على طول واحد هي كنسبة قواعدها بعضها الى بعض فتكون نسبة م  $\frac{1}{2}$  (ا + ب)  $\times$  ن  $\frac{1}{2}$  (ا + ب) : م  $\frac{1}{2}$  (ا + ب)  $\times$  م  $\frac{1}{2}$  (ا - ب) :: م  $\frac{1}{2}$  (م + ن)  $\times$  ن  $\frac{1}{2}$  (م + ن) : م  $\frac{1}{2}$  (م + ن)  $\times$  م  $\frac{1}{2}$  (م - ن). فالجزء الاول من هذه النسبة والثالث متساويان لان كل واحد منها يعدل مربع نصف القطر (فرع اول مثلثات بسيطة) فالثاني والرابع متساويان (ق ٩ ك هـ) او م  $\frac{1}{2}$  (م + ن)  $\times$  م  $\frac{1}{2}$  (م - ن) = م  $\frac{1}{2}$  (ا + ب)  $\times$  م  $\frac{1}{2}$  (ا - ب) او بترجيح الحروف الاصلية م  $\frac{1}{2}$  (ب + د + ا د)  $\times$  م  $\frac{1}{2}$  (ب - د - ا د) = م  $\frac{1}{2}$  (ب + س + ا س)  $\times$  م  $\frac{1}{2}$  (ب - س - ا س)

فرع اول. لان اضلاع اشكال متساوية ذات زوايا قائمة هي متناسبة بالتكافؤ فنسبة م  $\frac{1}{2}$  (ب + د + ا د) : م  $\frac{1}{2}$  (ب + س + ا س) :: م  $\frac{1}{2}$  (ب - س - ا س) : م  $\frac{1}{2}$  (ب - د - ا د)

فرع ثان. اذا وقعت العمودية س د داخل المثلث فلنا ب د + ا د = ا ب القاعدة واذا وقعت س د خارج المثلث ب د - ا د = ا ب فلي الحالة الاولى نصير النسبة السابقة في الفرع الاول هكذا

م  $\frac{1}{2}$  ا ب : م  $\frac{1}{2}$  (ب + س + ا س) :: م  $\frac{1}{2}$  (ب - س - ا س) : م  $\frac{1}{2}$  (ب - د - ا د) وفي الحالة الثانية نصير بالقلب والمبادلة

م  $\frac{1}{2}$  ا ب : م  $\frac{1}{2}$  (ب + س + ا س) :: م  $\frac{1}{2}$  (ب - س - ا س) : م  $\frac{1}{2}$  (ب + د + ا د)  
تنبيه \* هذه القضية والاثنان الاثنتان قد وضعهن المعلم نايبير الاسكونسي وهن جزيلات الفائدة لسهولة استعمالهن في الانساب

### القضية الثلثون

في مثلث كروي اذا رسمت عمودية من احدى زواياه على الضلع المقابل او القاعدة تكون نسبة جيب مجتمع الزاويتين عند القاعدة الى جيب فضلتها كنسبة جاس نصف القاعدة الى جاس نصف فضلة قسميها اذا وقعت العمودية داخل المثلث. وكنسبة نظير جاس نصف القاعدة الى

نظير ماسّ مجتمع قسميها اذا وقعت العمودية خارج المثلث ونسبة  
جيب مجتمع الضلعين الى جيب فصلتها كنسبة نظير ماسّ نصف  
الزاوية بين الضلعين الى ماسّ نصف فضلة الزاويتين الحادتين بين  
الضلعين والعمودية اذا وقعت داخل المثلث. والى ماسّ نصف  
مجتمعيها اذا وقعت العمودية خارج المثلث

ليكن ا ب س مثلثا كرويا و ا د عمودية على القاعدة ب س فنسبة ج (س + ب)  
ج (س - ب) :: م ا ب س : م ا (ب د - د س) اذا وقعت ا د داخل المثلث



وج (س + ب) :

ج (س - ب) ::

نم ا ب س : نم ا (ب د + د س) اذا

وقعت ا د خارج المثلث

وايضاً ج (ا ب +

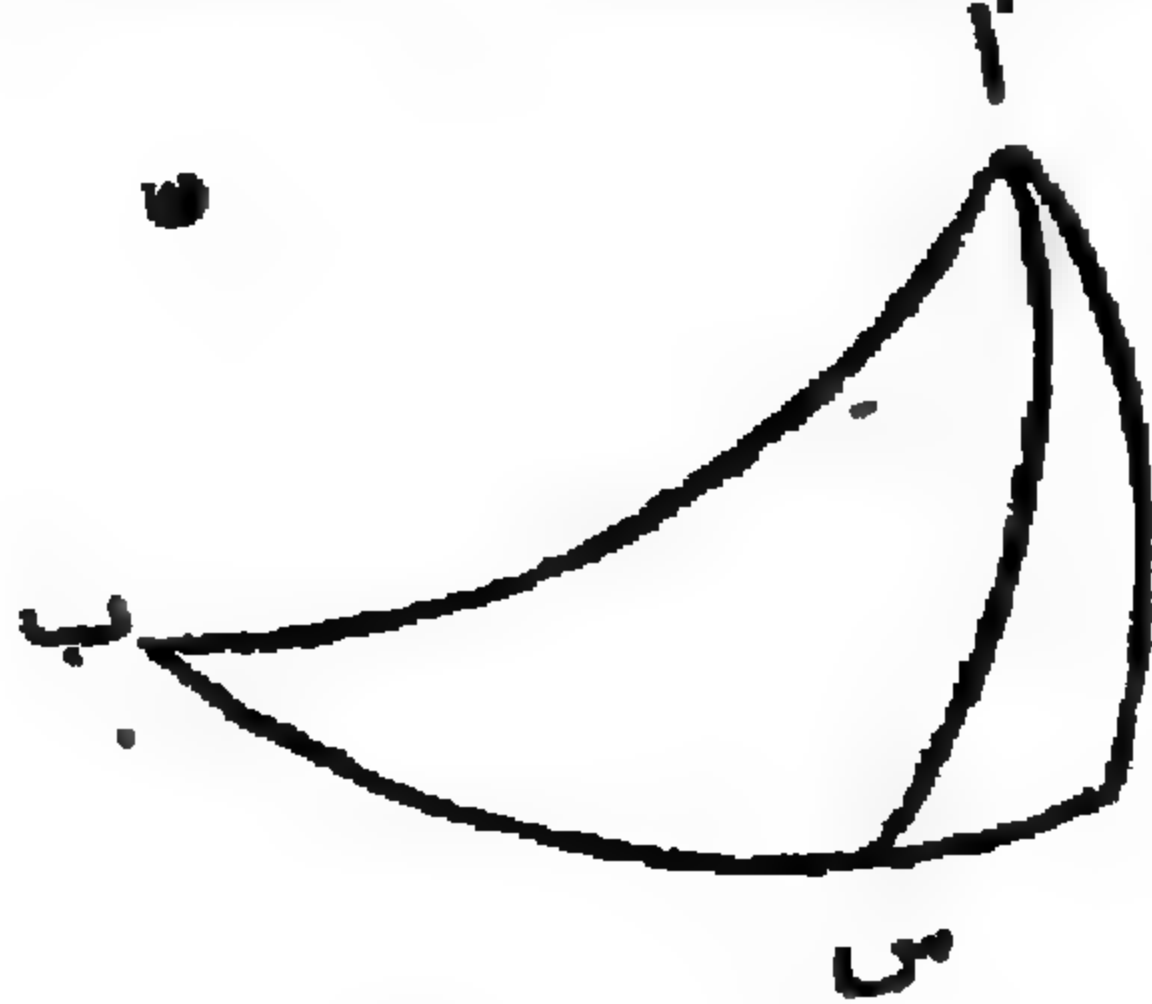
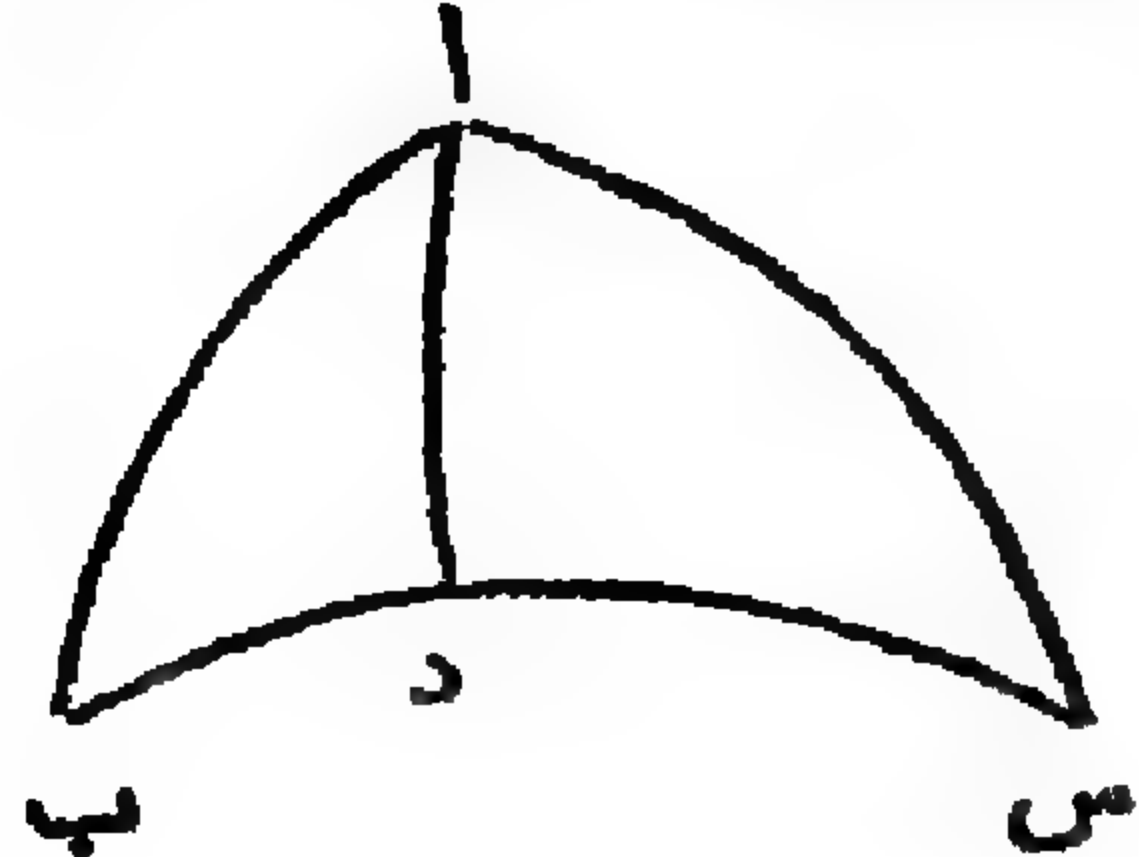
ا س) : ج (ا ب - ا س) :: نم ا ب ا س : نم ا (ب ا د - س ا د) اذا وقعت ا د  
داخل المثلث وج (ا ب + ا س) : ج (ا ب - ا س) :: نم ا ب ا س : نم ا (ب ا د + س ا د)  
اذا وقعت ا د خارج المثلث

لانه في المثلث ب ا س (ق ٢٧) م ب : م ب : م س :: ج س د : ج ب د و (ق ٥)  
م س + م ب : م س - م ب :: ج ب د + ج س د : ج ب د - ج س د  
وحسب السابقة التي ثلوهذه القضية م س + م ب : م س - م ب :: ج (س + ب) : ج (س - ب)  
+ (ب - س) : ج (ب - س) وايضاً ج ب د + ج س د : ج ب د - ج س د :: م ا (ب د + د س) : م ا (ب د - د س)  
(ب د + س د) : م ا (ب د - س د) (ق ٢ مثلثات بسيطة) و (ق ١١ ك ٥)  
ج (س + ب) : ج (س - ب) :: م ا (ب د + س د) : م ا (ب د - س د)

واذا وقعت ا د داخل المثلث ب د + س د : ب س فنسبة ج (س + ب) : ج (س - ب) :: م ا (ب د + س د) : م ا (ب د - س د) واذا وقعت ا د خارج المثلث  
ب د - س د : ب س فنسبة ج (س + ب) : ج (س - ب) :: م ا (ب د + س د) : م ا (ب د - س د)

س د) : مم ا ب س او لكون ممائي قوسين كظييري مماسيها بالتكافؤ ج (س + ب) : ج (س - ب) :: نم ا ب س : نم ا (ب د + س د)

بقي ان نبرهن القسم الثاني من هذه القضية. فلان (ق ٢٨) مم ا ب : مم ا س



:: نج س ا د :  
نج ب ا د تكون  
مم ا ب + مم  
اس : مم ا ب  
- مم اس ::

نج س ا د + نج ب ا د : نج س ا د - نج ب ا د وحسب السابقة المذكورة اسفل  
مم ا ب + مم ا س : مم ا ب - مم ا س :: ج (ا ب + اس) : ج (ا ب - اس)  
و (فرع اول ق ٢ مثلثات بسيطة) نج س ا د + نج ب ا د : نج س ا د - نج ب ا د  
:: نم ا (ب ا د + س ا د) : مم ا (ب ا د - س ا د) فاذا (ق ١١ كه) ج (ا ب  
+ اس) : ج (ا ب - اس) :: نم ا (ب ا د + س ا د) : مم ا (ب ا د - س ا د)  
فاذا وقعت ا د داخل المثلث ب ا د + س ا د = ب ا س فنسبة ج (ا ب + اس) :  
ج (ا ب - اس) :: نم ا ب اس : مم ا (ب ا د - س ا د)  
واذا وقعت ا د خارج المثلث ب ا د - س ا د = ب ا س فنسبة ج (ا ب +  
اس) : ج (ا ب - اس) :: نم ا (ب ا د + س ا د) : مم ا ب اس اولان نم  
ا (ب ا د + س ا د) : مم ا ب اس :: نم ا ب اس : مم ا (ب ا د + س ا د)  
فتكون نسبة ج (ا ب + اس) : ج (ا ب - اس) :: نم ا ب اس : مم ا (ب ا د  
+ س ا د)

سابقة

نسبة مجموع ممائي قوسين الى فضلة مماسيها كنسبة جيب مجموع القوسين  
الى جيب فضلتها

ليكن ا و ب قوسين فنسبة مم ا + مم ب : مم ا - مم ب :: ج (ا + ب)  
: ج (ا - ب) لانه (حسب ع ٢ فصل ٢ مثلثات بسيطة) ج ا × نج ب + نج ا ×

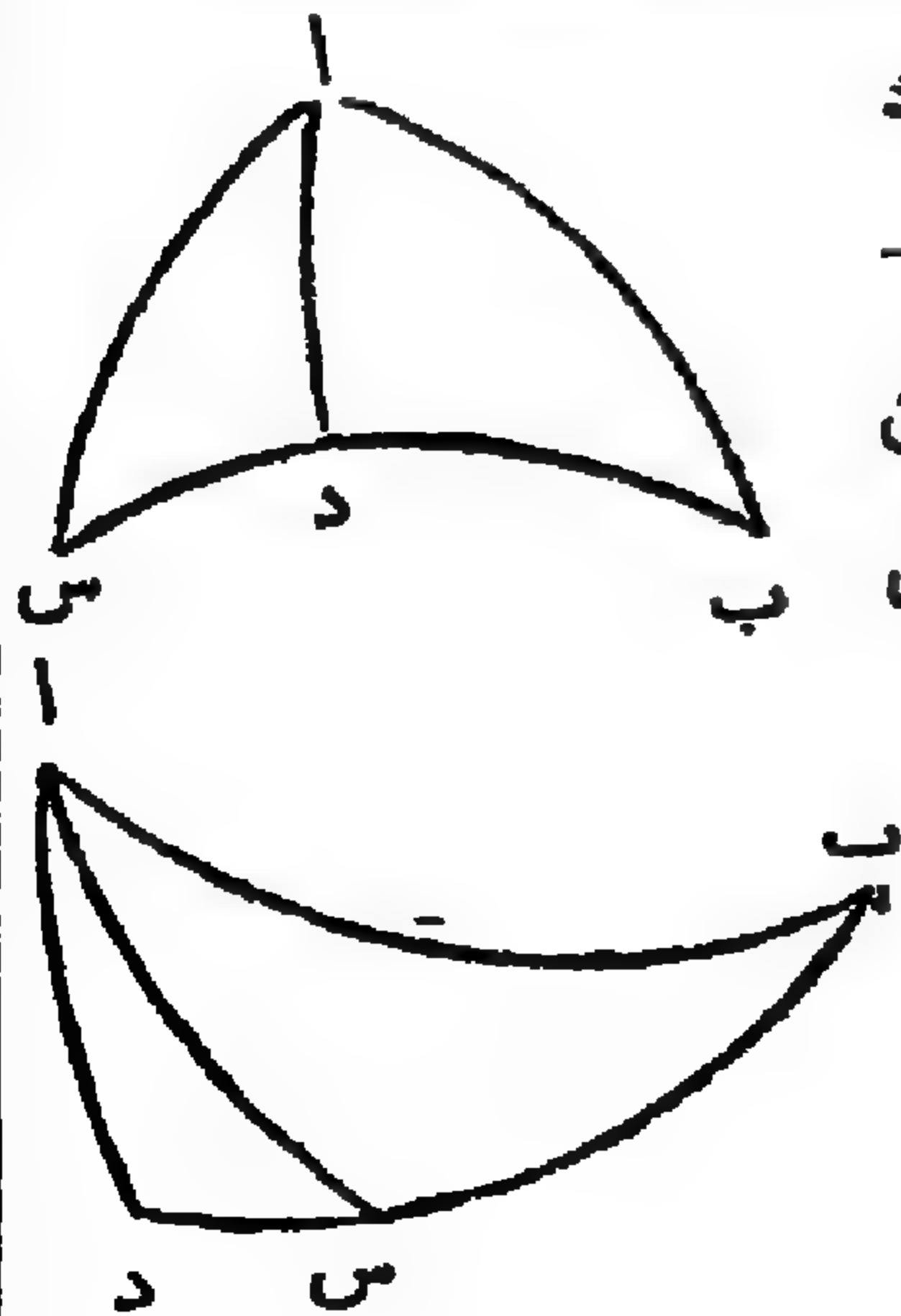


$$\begin{aligned}
 & \text{ا ج ب} = \text{ج د} (ا + ب) \text{ فبالقسمة على نج ا} \times \text{نج ب} \text{ لنا} \\
 & \frac{\text{ا ج ا}}{\text{نج ا} + \text{ج ب}} = \frac{\text{ج د} (ا + ب)}{\text{نج ا} \times \text{نج ب}} \text{ اولان نج ا} = \text{م ا} \text{ لنا} \\
 & \text{م ا} + \text{م ب} = \frac{\text{ج د} (ا + ب)}{\text{نج ا} \times \text{نج ب}} \text{ وعلى هذا الاسلوب يبرهن ان} \\
 & \text{م ا} - \text{م ب} = \frac{\text{ج د} (ا - ب)}{\text{نج ا} \times \text{نج ب}} \text{ فاذا نسبة} \\
 & \text{م ا} + \text{م ب} : \text{م ا} - \text{م ب} :: \text{ج د} (ا + ب) : \text{ج د} (ا - ب)
 \end{aligned}$$

### القضية الحادية والثلاثون

في مثلث كروي تكون نسبة جيب نصف مجتمع زاويتين منه الى جيب نصف فصلتها كنسبة ماس نصف الضلع الذي يلي الزاويتين الى ماس نصف فضلة الضلعين اللذين يقابلان الزاويتين ونسبة نظير جيب نصف مجتمع هاتين الزاويتين الى نظير جيب فصلتها كنسبة ماس نصف الضلع الذي يليها الى ماس نصف مجتمع الضلعين اللذين يقابلانها

لتفرض ان  $س + ب = ا$   $ص - ب = ا$   $ض$  والقاعدة  $ب س = ا$   $ب$  وفضلة قسي القاعدة اي  $ب د - ب س = ا$   $ك$  فلان (ق ٢٠)  $ج د (س + ب) : ج د (س - ب) :: م ا : م ب$  تكون نسبة  $ج د ا$   $ص : ج د ا$   $ض :: م ب : م ك$  ولكن  $ج د ا$   $ص = ج د (ص + ص) = ا$   $ج د$   $ص \times$  نج  $ص$  (فصل ثالث مثلثات بسيطة) وايضاً  $ج د ا$   $ض = ا$   $ج د$   $ض \times$  نج  $ض$  فلنا  $ج د$   $ص \times$  نج  $ص : ج د$   $ض \times$  نج  $ض :: م ب : م ك$  ثم في المثلث الكروي ا ب س قد تبرهن



ان نسبة جـس + جـب : جـس - جـب :: جـاب + جـاس : جـاب - جـاس  
 و (حسب ع ٢ فصل ٢ مثلثات بسيطة) جـس + جـب = ٢ جـا (س + ب) +  
 نجـا (س - ب) = ٢ جـص × نجـض وجـس - جـب = ٢ نجـا (س + ب)  
 × جـا (س - ب) = ٢ نجـص × جـض فالحا نسبة ٢ جـص × نجـض : ٢ نجـا  
 جـص × جـض :: جـاب + جـاس : جـاب - جـاس واذا فرض ان  
 (اب + اس) = ط و (اب - اس) = ظ (ق ٢ مثلثات بسيطة) جـاب  
 + جـاس : جـاب - جـاس :: م (اب + اس) : م (اب - اس) ::  
 م ط : م ظ فنسبة جـص × نجـض : نجـص × جـض :: م ط : م ظ  
 ولان  $\frac{م ك}{م ب} = \frac{جـص \times نجـض}{جـص \times جـض} = \frac{م ظ}{م ط}$  جـص × نجـض  
 فيضرب اشيئاً متساوية في اشيئاً متساوية نصير

$\frac{م ك}{م ب} \times \frac{م ط}{م ظ} = \frac{(جـص) \times نجـض}{(جـص) \times نجـض} = \frac{(جـض) \times نجـض}{(جـض) \times نجـض}$  ولكن  
 (ق ٢٩)  $\frac{م (اب - اس)}{م (اب + اس)} = \frac{م (ب - د - س)}{م (ب + د + س)} = \frac{م (ب - د - س)}{م (ب + د + س)}$  او  $\frac{م ك}{م ط} = \frac{م ظ}{م ب}$  فاذا  
 $\frac{م ك}{م ب} = \frac{م ط \times ط}{م (ب) \times ط}$  وايضاً  $\frac{م ك}{م ب} = \frac{م ط}{م ب}$  ولكن  $\frac{م ك}{م ب} \times \frac{م ط}{م ظ} = \frac{م ك}{م ب}$   
 $\frac{م ط}{م (جـص)} = \frac{(جـض)}{(جـص)}$  فاذا  $\frac{م (ب)}{م (جـص)} = \frac{(جـض)}{(جـص)}$  او نسبة  
 جـص : جـض :: م ب : م ط او جـا (س + ب) : جـا (س - ب) ::

م (ب + س) : م (ب - س) وهذا القسم الاول من القضية  
 ايضاً لان  $\frac{م ط}{م ظ} = \frac{نجـص \times جـض}{جـص \times نجـض}$  او بالقلب  $\frac{م ط}{م ظ} = \frac{جـص \times نجـض}{نجـص \times جـض}$   
 ولان  $\frac{م ك}{م ب} = \frac{جـص \times نجـض}{جـص \times نجـض}$  فبالضرب لنا  $\frac{م ك}{م ب} \times \frac{م ط}{م ظ} = \frac{م ك}{م ب}$   
 (نجـص) (بجـص) وقد تبرهن ان  $\frac{م ك}{م ب} = \frac{م ط \times ط}{م (ب)}$  فاذا  $\frac{م ك}{م ب} \times \frac{م ط}{م ظ} = \frac{م ك}{م ب}$   
 (م ط) (م ب) وقد تبرهن ان  $\frac{م ك}{م ب} \times \frac{م ط}{م ظ} = \frac{م ك}{م ب}$  فاذا (نجـص) (بجـص)

$$\frac{(ط)^2}{(ب)^2} \text{ وبالنتيجة } \frac{نح\text{ض}}{م\text{ب}} = \frac{ط}{م} \text{ او نسبة } نح\text{ص} : نح\text{ض} :: م\text{ب} :$$

$$م\text{ط او } نح(س+ب) : نح(س-ب) :: م\text{ب} : م\text{س} :: م\text{ب} : م(س+ب)$$

وهذا القسم الثاني من القضية

فرع اول. اذا وضع برهان هذه القضية على الزاوية الممتدة اب س (ق ١١)  
فما ان جيب نصف مجتمع متي قوسين او نصف فضلتهما هو جيب نصف مجتمع  
القوسين او نصف فضلتهما وهكذا في نظير الجيوب والمماسات لنصف مجتمع قوسين  
متين او لنصف فضلتهما وبما ان مماس نصف متم قوس هو نظير المماس لنصف  
القوس فالنتيجة هي ان في مثلث كروي تكون نسبة جيب نصف مجتمع ضلعين الى  
جيب نصف فضلتهما كنسبة نظير مماس نصف الزاوية بينها الى مماس نصف فضلة  
الزاويتين اللتين تقابلانها وايضا نسبة نظير جيب نصف مجتمع هذين الضلعين الى  
نظير جيب نصف فضلتهما كنسبة نظير مماس نصف الزاوية بينهما الى مماس نصف  
مجتمع الزاويتين المقابلتين لهما

فرع ثان. اذا فرض ا ب س الزوايا الثلاث لمثلث كروي و ا ب س  
الاضلاع المقابلة لها فلنا هذه النسب

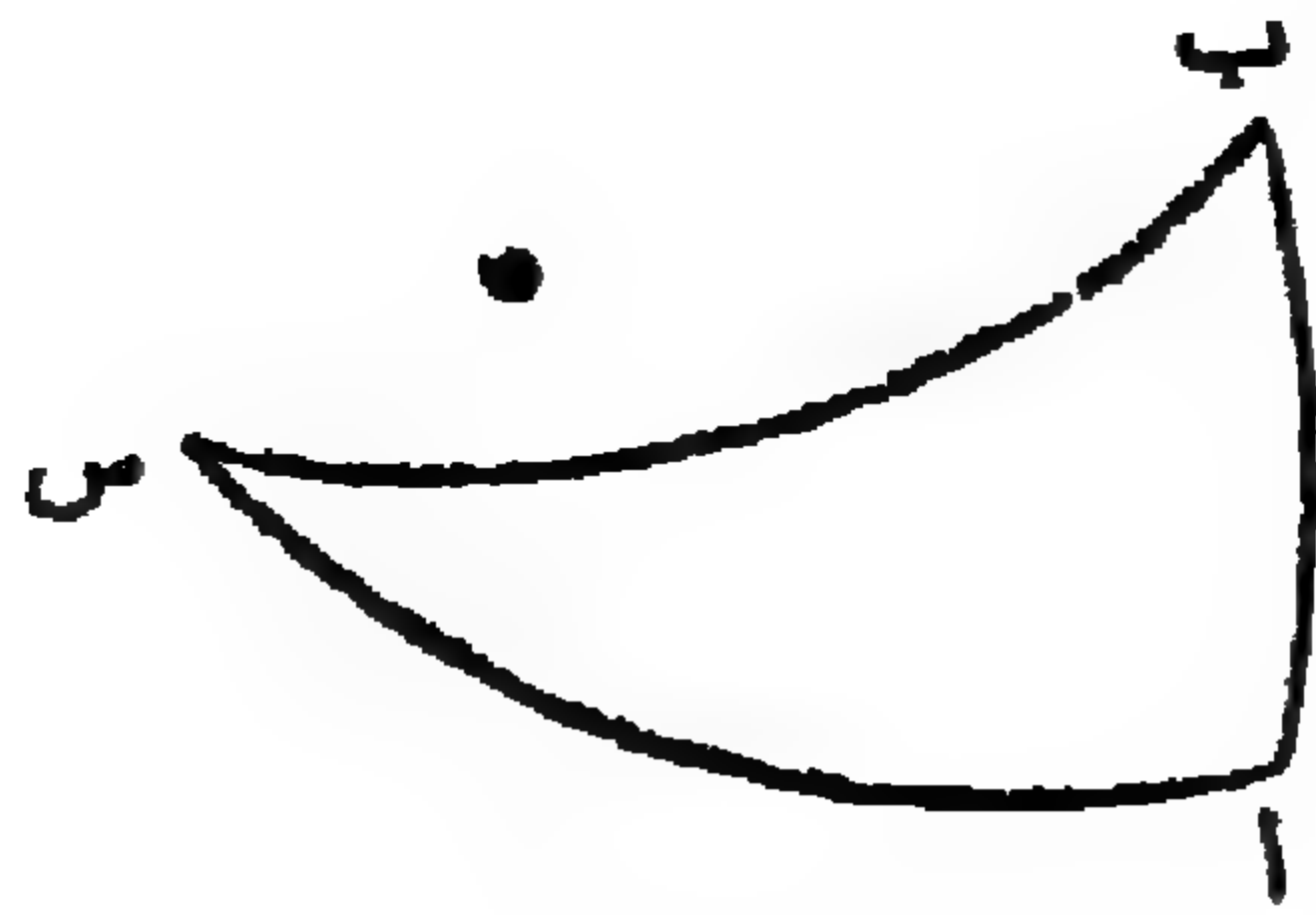
- (١) ج ا (ا+ب) : ج ا (ا-ب) :: م ا س : م ا (ا-ب)
- (٢) نج ا (ا+ب) : نج ا (ا-ب) :: م ا س : م ا (ا+ب)
- (٣) ج ا (ا+ب) : ج ا (ا-ب) :: م ا س : م ا (ا-ب)
- (٤) نج ا (ا+ب) : نج ا (ا-ب) :: م ا س : م ا (ا+ب)

عملية اولى

في مثلث كروي قائم الزاوية مفروض شيان من اجزائه الستة غير  
القائمة فعلينا ان نجد الثلاثة الاخر



هذه العملية لها ست عشرة حالة متضمنة في هذا الجدول مبينة على المثلث  
اب س ذي القائمة عند ا



مفروض	مطلوب	الحل
ب س	ا س	١ اق : جب س :: جب : ج ا س (١٩)
و	ا ب	٢ اق : نجب :: م ب س : م ا ب (٢١)
ب	س	٣ اق : نجب س :: م ب : م س (٢٠)
ا س	ا ب	٤ اق : ج ا س :: م س : م ا ب (١٨)
و	ب س	٥ نجس : اق :: م ا س : م ب س (٢١)
س	ب	٦ اق : نج ا س :: ج س : نج ب (٢٢)
ا س	ا ب	٧ م ب : م ا س :: اق : ج ا ب (١٨)
و	ب س	٨ ح ب : ج ا س :: اق : جب س (١٩)
ب	س	٩ نج ا س : نج ب :: اق : ج س (٢٢)
ا س	ا ب	١٠ نج ا س : نجب س :: اق : نج ا ب (٢٢)
و	ب	١١ ح ب س : ج ا س :: اق : ج ب (١٩)
ب س	س	١٢ م ب س : م ا س :: اق : نجس (٢١)
ا ب	ب س	١٣ اق : نج ا ب :: نج ا س : نجب س (٢٢)
و	ب	١٤ ج ا ب : اق :: م ا س : م ب (١٨)
ا س	س	١٤ ج ا س : اق :: م ا ب : م س (١٨)
ب	ا ب	١٥ ج ب : نجس :: اق : نج ا ب (٢٢)
و	ا س	١٥ ج س : نج ب :: اق : نج ا س (٢٢)
س	ب س	١٦ م ب : م س :: اق : نجب س (٢٠)

جدول تُعرَف به اجناس الاضلاع والزوايا المستعملة في الجدول السابق	
١	ا س وب من جنس واحد
٢	اذا كان ب س $> ٩٠^\circ$ يكون ا ب وب من جنس واحد والا فمختلفان (فرع ١٥)
٣	اذا كان ب س $> ٩٠^\circ$ يكون س وب من جنس واحد والا فمختلفان (١٥)
٤	ا ب وس من جنس واحد (١٤)
٥	اذا كان ا س وس من جنس واحد يكون ب س $> ٩٠^\circ$ والا فيكون ب س $< ٩٠^\circ$ (فرع ١٥)
٦	ب و ا س من جنس واحد
٧	ملتبس
٨	ملتبس
٩	ملتبس
١٠	اذا كان ب س $> ٩٠^\circ$ يكون ا ب و ا س من جنس واحد والا فمختلفان (١٥)
١١	ا س وب من جنس واحد (١٤)
١٢	اذا كان ب س $> ٩٠^\circ$ يكون ا س وس من جنس واحد والا فمختلفان (فرع ١٥)
١٣	ب س $> ٩٠^\circ$ اذا كان ا ب و ا س من جنس واحد (فرع اول ١٥)
١٤	ب و ا س من جنس واحد (١٤)
١٤	س و ا ب من جنس واحد (١٤)
١٥	ا ب وس من جنس واحد (١٤)
١٥	ا س وب من جنس واحد (١٤)
١٥	اذا كانت ب وس من جنس واحد يكون ب س $> ٩٠^\circ$ والا فيكون ب س $< ٩٠^\circ$ (١٥)
تنبيه * يراد بالملتبس ان المطلوب له قيمتان اي زاوية ما او متمها	

هذا الجدول مثل الاول غير انه قد فرض فيوان  $\bar{A}$  = الضلع الذي يقابل الزاوية القائمة  $\bar{A}$  وب = الضلع الذي يقابل الزاوية ب وس = الضلع الذي يقابل الزاوية س

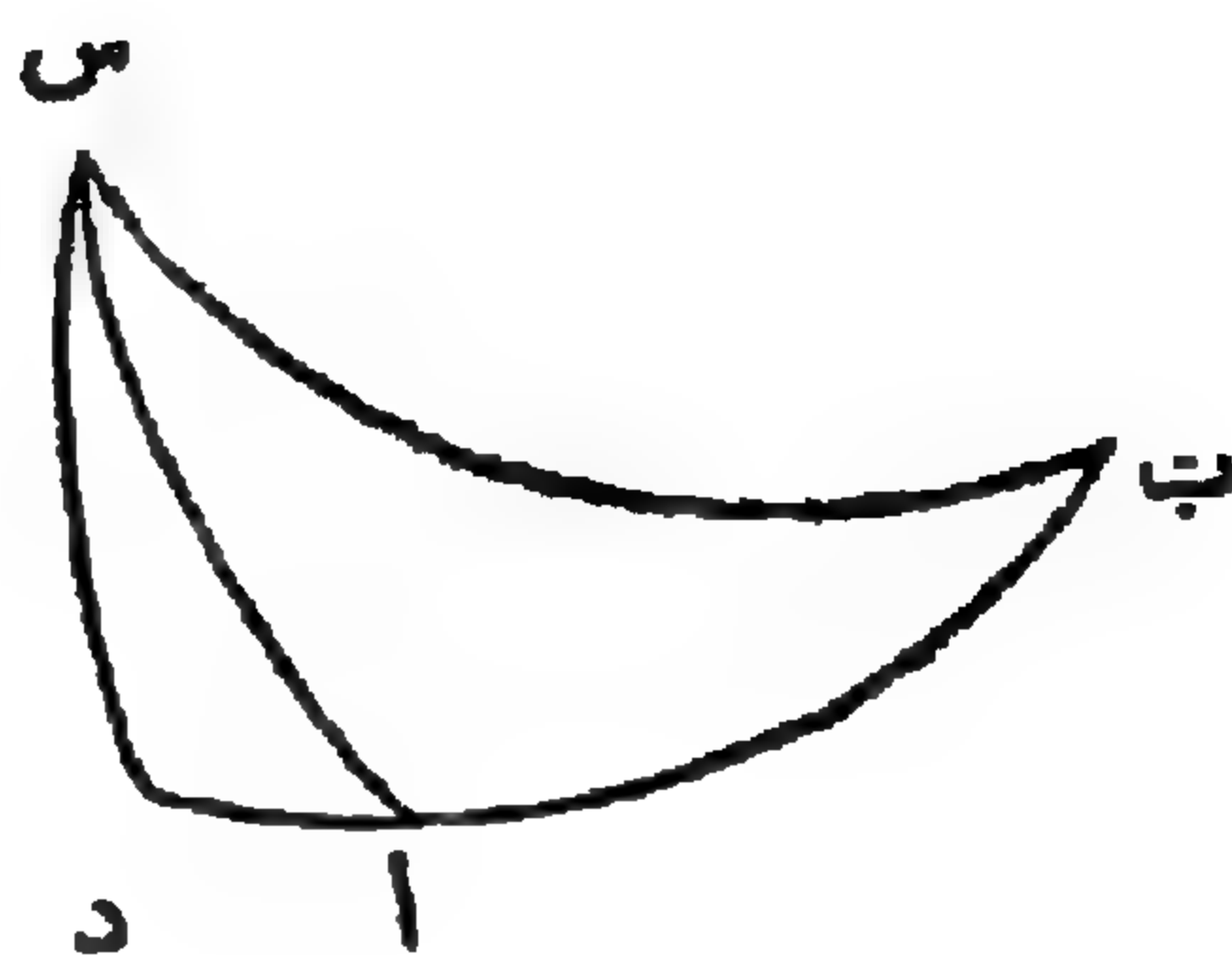
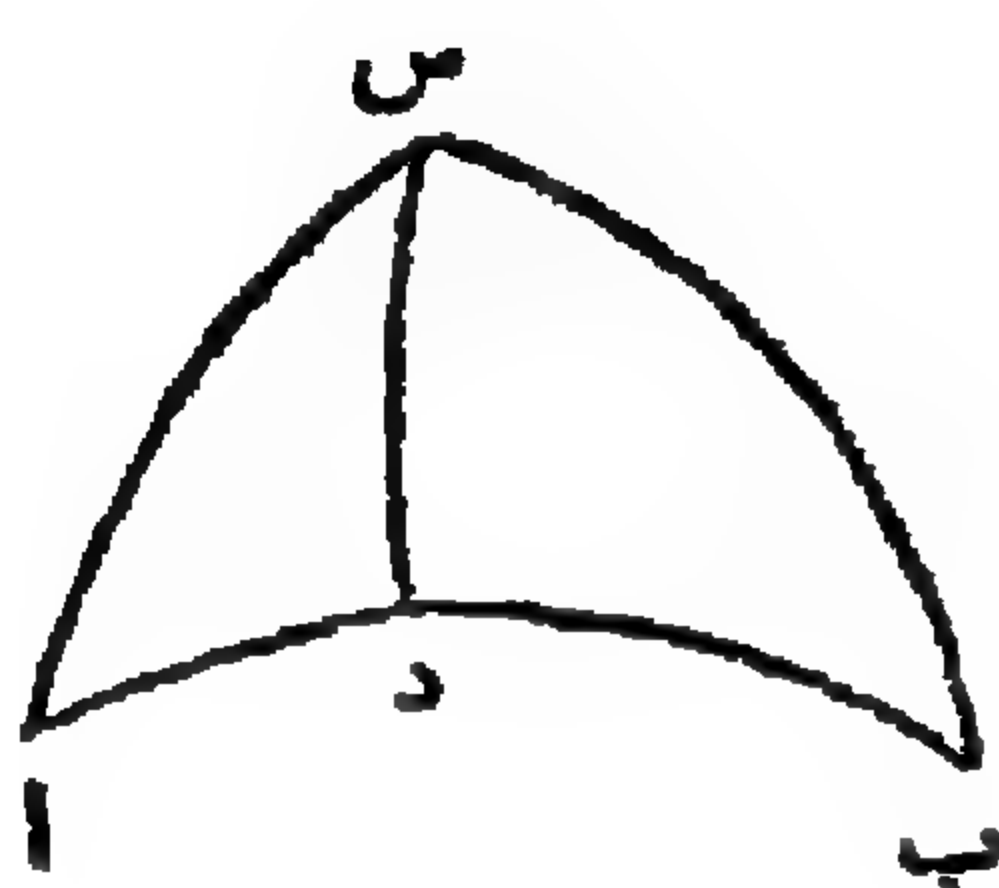
١	ج ب = ج ا × ج ب	ب	ا وب
٢	م م = م ا × نج ب	س	
٣	ن م س = ن م ا × م ب	س	
٤	م م س = ج ب × م م س	س	ب وس
٥	م م = م ب	ا	
٦	نج ب = نج ب × ج س	ب	
٧	ج س = م ب	س	ب وب
٨	ج ا = ج ب	ا	
٩	ج س = نج ب	س	
١٠	ج س = نج ب	س	ا وب
١١	ج ب = ج ا	ب	
١٢	نج ب = م ا	س	
١٣	نج ا = نج ب × نج س	ا	ب وس
١٤	م م = م ب	ب	
١٤	م م س = ج ب	س	
١٥	نج س = نج ب	س	ب وس
١٥	نج ب = ج س	ب	
١٦	نج ا = ن م س	ا	



## عملية ثانية

في مثلث كروي غير ذي قائمة مفروض ثلاثة اشياء من ستة فعلينا ان  
نجد الثلاثة الأخر

تنبيه. في هذا الجدول اذا رايت حرف الحاء فدام رقم هندي هكذا (ح ٤)  
فالاشارة بذلك الى الحالات في الجدول السابق. والاعداد وحدها تشير الى قضايا  
اصول المثلثات الكروية



مفروض	مطلوب	الحل
الضلعان اب اس والزاوية بينهما ١	احدى الزاويتين الاخرتين ب	ارسم العمودية س د من الزاوية المجهولة على ا ب فنسبة ا ق : نج ا :: م ا س : م ا د (ح ٢) فيُعرف ب د وج ب د : ج ا د :: م ا : م ب (٢٧) ب و من جنس واحد اذا كان ا ب < ب د والا فمختلفان (١٦)
الضلع الثالث ب س		ارسم العمودية س د من احدى الزاويتين المجهولتين على الضلع ا ب ثم نسبة ا ق : نج ا :: م ا س : م ا د (ح ٢) فيُعرف ب د ونج ا د : نج ب د :: نج ا س : نج ب س (٢٦) اذا كان ا د و د ب من جنس واحد يكون ا س و س ب من جنس واحد والا فمختلفان

مفروض	مطلوب	الحل
الزاويتان ا و ب	الضلع ب س	من س طرف ا س الذي يلي الضلع المطلوب ارسم س د عمودية على ا ب ثم ا ق : نج ا س :: م ا : ن م ا س د (ح ٢) فتعرف ب س د ونسبة نج ب س د : نج ا س د :: م ا س : م ب س (٢٨) اذا كان ا و ب س د من جنس واحد يكون ب س > ٩٠ والا فاكبر من ٩٠
والضلع بينها ا س	الزاوية الثالثة ب	ارسم العمودية س د من احدى الزاويتين المفروضتين ٤ على ا ب الضلع المقابل ثم ا ق : نج ا س :: م ا : ن م ا س د (ح ٢) فتعرف ب س د ونسبة ج ا س د : ج ب س د :: نج ا : نج ب (٢٥) اذا وقعت س د داخل المثلث او كانت ا س ب اكبر من ب س د تكون ب و من جنس واحد والا فتختلفان (١٦)
الزاوية ب التي تقابل الضلع الاخر المفروض ا س	الزاوية ب التي تقابل الضلع الاخر المفروض ا س	ج ب س : ج ا س :: ج ا : ج ب (٢٤) جنس ب س اتي تقابل ملتبس الا اذا تعين كون ا + ب اكثرا و اقل من ١٨٠ لكون ا س + ب س اكثرا و اقل من ١٨٠ (١٠) المفروض ا س
ضلعان ا س و ب س والزاوية ا التي تقابل احدها ب س	الزاوية الضلعين المفروضين	من ا س ب الزاوية المطلوبة ارسم س د عمودية على ا س ب بين ا ب ثم ا ق : نج ا س :: م ا : ن م ا س د (ح ٢) وم ب س : م ا س :: نج ا س د : نج ب س د (٢٨) و ا س د = ب س د = ا س ب وهي ملتبسة
الضلع الثالث ا ب	الضلع الثالث ا ب	ارسم س د عمودية من س الزاوية بين الضلعين المفروضين على ا ب ثم ا ق : نج ا س :: م ا : ن م ا د (ح ٢) ونج ا س : نج ب س :: نج ا د : نج ب د (٢٦) و ا ب = ا د = ب د فيكون ا ب ملتبسا



مفروض	مطلوب	الحل
	الضلع ب س	ج ب : ج ا :: ج ا س : ج ب س (٢٤) وب س ٨
	المقابل الزاوية	ملتبس الا اذا تعين كون ا س + ب س اكثر او اقل
	الاخرى	من ١٨٠° حسبما كانت ا + ب اكثر او اقل من
	المفروضة ا	١٨٠° (١٠)
زاويتان	الضلع ا ب	من الزاوية المجهولة س ا ر م س د عمودية على ا ب ثم ٩
اوب	الذي يلي	ا ق : نج ا :: م ا س : م ا د (ح ٢) وم ب : م ا
والضلع	الزاويتين	ج ا د : ج ب د وب د ملتبس فاذا ا ب = ا د
ا س	المفروضتين	ب دولة اربع قيمات غير ان البعض منها يخرج بلزوم
الذي يقابل	اوب	كون ا ب اقل من ١٨٠°
احدها	الزاوية	من الزاوية المطلوبة ا ر م س د عمودية على ا ب ثم ١٠
ب	الثالثة	ا ق : نج ا س :: م ا : م ا س د (ح ٢) ونج ا :
	ا س ب	نج ب :: ج ا س د : ج ب س د (٢٥) ب س د
		ملتبس فاذا ا س ب = ا س د + ب س د ولها اربع
		قيمت غير ان البعض منها يخرج بلزوم كون ا س ب
		اقل من ١٨٠°



الاضلاع الثلاثة	احدى الزوايا ا	<p>من س احدى الزاويتين الغير المطلوبتين ارم س د ا ا ١١</p> <p>عمودية على اب . ثم استعلم قوسا ي حتى تكون نسبة</p> <p>م ا ب : م ا ( ا س + ب س ) :: م ا ( ا س ) -</p> <p>ب س : م ا ي . فانها كان اب اكبر من ي فيكون</p> <p>اب مجتمع اد ود ب وي فضلنها واذا كانت اب</p> <p>اصغر من ي يكون مجتمع اد ود ب واب فضلنها</p> <p>( ٢٩ ) وعلى الحاليتين اد وب معروفان وم ا س</p> <p>: م ا د :: ا ق : نجح</p>
الزوايا الثلاث اوب وس	احد الاضلاع ب س	<p>افرض متماث الزوايا ا وب وس المفروضة ا وب ١٢</p> <p>وس واحسبها اضلاع مثلث كروى واستعلم بالحالة</p> <p>السابقة الزاوية من هذا المثلث التي تقابل الضلع ا</p> <p>فهي متمم ضلع المثلث المفروض الذي يقابل الزاوية</p> <p>امنه اي ب س ( ١١ )</p>

في هذا الجدول قُرِضَت الزوايا ا وب وس كما تقدم والاضلاع التي تقابلها  
وبَ وسَ وك وى بعدلان قسي القاعدة او قسي الزاوية التي تقابلها

مفروض	مطلوب	الحل
ضلعان بَ وسَ والزاوية بينهما	ب	استعلم ك حتى ان م م ك : م ب × نج ا ثم م ب = ا ح ك × ا م ج (س - ك)
الزاويتان ا وس	ا	استعلم ك حتى ان م م ك = نج ب × م ا ثم م ا = ا م ب × نج ك نج (س - ك)
والضلع بَ	ب	استعلم ك كما تقدم ثم نج ب = نج ا × ج (س - ك) ج ك
الضلعان ا وبَ والزاوية ا	ب	ج ب = ج ب × ج ا ج ا
	س	استعلم ك حتى ان م م ك = نج ب × م ا ثم نج ب = ب نج ك × م ب ا م
	س	استعلم ك حتى ان م م ك = م ب × نج ا واستعلم ي حتى ان نج ب = نج ا × نج ك نج ب س = ك ± ي
الزاويتان ا وب	ا	ج ا = ج ب × ج ا ج ب
والضلع بَ	س	استعلم ك حتى ان م م ك = م ب × نج ا واستعلم ي حتى ان ج ب = ج ك × م ب م ب س = ك ± ي
	س	استعلم ك حتى ان م م ك = نج ب × م ا واستعلم ي حتى ان ج ب = ج ك × نج ب نج ا س = ك ± ي

معرض	مطلوب	الحل
١	١	<p>١١</p> <p>المعرض ان <math>a + b + s = v</math></p> $\frac{a \times (b - s) + (a - s) \times b}{a \times b} = \frac{1}{2}$ <p>او نخرج <math>\frac{1}{2} = \frac{a \times (b - s) + (a - s) \times b}{a \times b}</math></p>
١	١	<p>١٢</p> <p>المعرض ان <math>a + b + s = v</math></p> $\frac{a \times (b - s) + (a - s) \times b}{a \times b} = \frac{1}{2}$ <p>او نخرج <math>\frac{1}{2} = \frac{a \times (b - s) + (a - s) \times b}{a \times b}</math></p>



# خاتمة اصول قياس المثلثات الكروية

في قواعد الاجراء الدائرة للعلم مايير

قواعد الاجراء الدائرة التي استخرجها المعلم مايير الاسكونسي من اصول قياس  
المثلثات الكروية هي كثيرة العوائد لسهولة حطها واستعمالها في الحسابات واسطة  
الاسباب او اللوعارثات

## حدود

١ في مثلث كروي قائم الراوية اذا عَصَّ المطر عن القائمة تنقي خمسة اجزاء  
اي ثلاثة اصلاخ وراويتان غير قائمتين فالصلعان المحيطان بالقائمة وكالات الملة  
الاحراي الراويتين والوزر في الاجراء الدائرة مثال ذلك في المثلث اب س دي  
القائمة عدد ا فالاجراء الدائرة هي اس اب وكالات ب وب س وس وسُمِّيت  
بالاجراء الدائرة لانها اذا عُدَّت على ترتيب تدور حول المثلث

٢ اذا أُحِدَ واحد من هذه الاجراء الخمسة وسُمِّي الوسط من الاربعة الباقية  
اتمان واليان الوسط هما المواليان احدهما  
عن يمين الوسط والآخر عن يساره  
والاحران هما المقابلان وبين كل واحد  
مهما والوسط واحد من الموالين



مثال ذلك في المثلث اب س فالاجراء  
الدائرة حسب الحد الاول هي اس اب ٩ - ب - ٩٠ - ب س ٩ - س  
واذا حسبنا اس الوسط يكون اب و ٩ - س الموالين و ٩٠ - ب و ٩٠ -  
ب س المقابلين واذا حسبنا اب الوسط يكون اس و ٩ - ب الموالين  
٩٠ - ب س و ٩٠ - س المقابلين واذا حسبنا ب س الوسط يكون  
٩٠ - ب و ٩ - س الموالين واس اب المقابلين وهكذا الى اخره واذا  
تقرر ذلك فليكن الاجراء الدائرة هي في هذه



### القضية

في مثلث كروي قائم الزاوية القائم الزوايا مسطح نصف القطر في جيب  
الوسط يعدل القائم الزوايا مسطح مماسي الموازيين او يعدل مسطح  
نظيري جيبَي المقابلين

تبرهن هذه القضية بان يجعل كل جزء وسطاً في موضع ثم تقابل القضية على  
احد البراهين السابق ذكرها. فاذا جعل ب س وسطاً لنا ٩٠ - ب و ٩٠ - س  
الموازيات و ا ب و ا س المقابلان و ا ق × نج ب س = نم ب × نم س (حسب  
ق ٢٠ فرع) و ا ق × نج ب س = نج ا ب × نج ا س (حسب ق ٢١)

فاذا قصدت ان تحل مسألة بواسطة هذه القضية فانظر الى اي الاشياء المماثلة  
اعني المفروضين والمطلوب يحل وسطاً لكي يكون الآخران على بعد واحد منه فلا  
بد من وجود المطلوب في احدي النظريتين المذكورتين في القضية

فلو فرض ا ب و ا س وكان المطلوب س فالامر واضح انه اذا جعل ا ب  
وسطاً يكون ب س وس المقابلين و ا ق × ج ا ب = ج س × ج ب س لان  
ج س = نج (٩٠ - س) ونج (٩٠ - ب س) = ج ب س فاذا ج س =  
ج ا ب  
ج ب س

ولو فرض ب س وس وكان ا س المطلوب فاذا جعل س وسطاً يكون  
ا س و ٩٠ - ب س الموازيين و ا ق × نج ب س = نم ا س × نم ب س او م ا س =  
نم ب س = نج ب س + م ب س لانه قد تبرهن سابقاً ان م ب س =  
م ب س

وقد استخرج المعلم نايبر من القضية الحادية والتلخيص عبارات لحل المسائل في  
مثلث غير ذي قائمة. فافرض كما تقدم روايا المثلث ا و ب وس والاصلاع التي  
تقابلها ا و ب وس فلما اربعة احوال

(١)

مفروض ضلعان ب و س والزاوية بينهما  
مطلوب الزاويتان ب وس

١٥/١٨

